

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи  
Одеського національного  
університету імені І.І. Мечникова,  
член-кореспондент НАН України,  
доктор біологічних наук,  
професор  
Іваниця В.О.



**ВИСНОВОК**

Одеського національного університету імені І.І. Мечникова про наукову та практичну цінність дисертації  
**Дрожжиної Анастасії Вадимівни**  
на тему: «**Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку**»  
на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності 111 «Математика»

**ВИТЯГ**

з протоколу №1 від 19.11.2020

засідання фахового семінару кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Одеського національного університету імені І.І. Мечникова

**ПРИСУТНІ:** д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Євтухов В.М. (науковий керівник)**; д. ф.-м. н., професор завідувач кафедри математичного аналізу **Кореновский А.О. (головуючий)**; д. ф.-м. н., професор, завідувач кафедри вищої математики **Щоголев С.А. (рецензент)**; к. ф.-м. н., доцент, завідувач кафедри оптимального керування та економічної кібернетики **Кічмаренко О.Д. (рецензент)**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Білозерова М.О. (секретар)**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Самкова Г.Є.**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Курбатова І.М.**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Покась С.М.**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Шарай Н.В.**; к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математичних методів аналізу економіки Одеського національного економічного університету **Шинкаренко В.М.**; к. ф.-м. н., доцент кафедри

«Математика, фізика та астрономія» Одеського національного морського університету **Кусік Л.І.**; к. ф.-м. н. **Корепанова К.С.**; лаборанти кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Шарай Т.П.** та **Флора Т.В.**

Головуючим на засіданні відкритим голосуванням було обрано д. ф.-м. н., професора завідувача кафедри математичного аналізу **Кореновський А.О.**, секретарем засідання була призначена к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології **Білозерова М.О.**

### **ПОРЯДОК ДЕННИЙ:**

Розгляд та рекомендація до захисту дисертаційної роботи Дрожжиної Анастасії Вадимівни на тему «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку» на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності 111 «Математика».

### **СЛУХАЛИ:**

Основні положення дисертаційної роботи Дрожжиної А. В. на тему «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку», представленої на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності 111 «Математика».

Тема дисертаційної роботи затверджена на засіданні Вченої ради ОНУ імені І.І. Мечникова. Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Євтухов В'ячеслав Михайлович.

Попередню експертизу дисертаційної роботи та наукових праць провели та підготували проект висновку доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Щоголев С.А. та кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Кічмаренко О.Д.

Дрожжина А.В. зробила доповідь про основні положення дисертаційної роботи.

Членами розширеного засідання дисертанту були поставлені такі запитання:

Доктор фізико-математичних наук, професор Кореновський А.О. :

1. Чи Ви можете пояснити, що означає термін «сингулярний розв'язок»?
2. На слайді № 11 є позначення  $b_j$ , а потім Ви через  $v_j$  позначаєте знак  $b_j$ . Далі Ви умови у термінах знаків  $b_j$  записали менше або



більше нуля, чи можна було це записати у термінах  $b_j$ ? Навіщо було вводити додаткові позначення?

Кандидат фізико-математичних наук Кусік Л.І.

1. Чим відрізняється дослідження поведінки  $P_\omega$ -розв'язків рівнянь другого порядку від диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку?

Доктор фізико-математичних наук, професор Щоголев С.А.

1. У монографії Кігурадзе досліджувалися сингулярні розв'язки, швидко зростаючі розв'язки, Кнезеровські розв'язки. А  $P_\omega$ -розв'язки це принципово інший клас розв'язків, чи узагальнюючий якийсь з цих типів розв'язків? І якщо так, то чи не перевіряли Ви чи не перетинаються Ваші результати з тими, які отримані у монографії Кігурадзе та його учнів?
2. Є таке просте у порівнянні з рівняннями, що розглядаються у Вашій дисертаційній роботі, рівняння Томаса Фермі. Чи не пробували Ви застосовувати Ваші результати до цього рівняння, а також, порівняти з тим, що отримано раніше для цього рівняння?

Кандидат фізико-математичних наук, професор Круглов В.Є.:

1. Що ми розуміємо під розв'язком рівняння (1.1)?
2. Чим поняття розв'язку цього рівняння відрізняється від поняття  $P_\omega$ -розв'язку?

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Шарай Н.В. :

1. У прикладі (6.1) говорилося про Кнезеровські розв'язки. Що Ви розумієте під цими розв'язками та як вони пов'язані зі швидко зростаючими розв'язками, про які Ви говорили?

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кічмаренко О.Д.:

1. У всіх теоремах у Вас  $\gamma \neq 0$ . А що буде у випадку коли  $\gamma = 0$ ?

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Покась С.М.:

1. Чи є якийсь геометричний сенс умови  $S$  (означення 2.2), яка використовується у Вашій роботі?
2. Чи є приклади функцій, які задовольняють цю умову  $S$ ?

Кандидат фізико-математичних наук, доцент Білозерова М.О.:

1. У Ваших теоремах достатньо складні умови. Чи можете Ви, наприклад, для теореми 1.1 пояснити сенс цих умов?
2. Чи не можливо було би деякі умови у теоремах замінити на простіші?

На всі поставлені запитання Дрожжина А.В. надала змістовні та аргументовані відповіді.

#### **ВИСТУПИЛИ:**

**Доктор фізико-математичних наук, професор Євтухов В.М. (науковий керівник)**, який висвітлив деякі аспекти історії розвитку тематики дисертаційного дослідження, зазначив актуальність та важливість дисертації для даного наукового напрямку, а також те, що всі результати дисертації є новими та самостійно отриманими здобувачем.

**Доктор фізико-математичних наук, професор Щоголев С.А. (рецензент)**, який зауважив, що дисертаційна робота є завершеним актуальним дослідженням і містить цікаві результати. Серед недоліків та дискусійних положень рецензент зазначив:

1. Було б цікавим дослідити хоча б для деяких рівнянь  $n$ -го порядку конкретного виду особливі випадки, коли серед коренів алгебраїчних рівнянь з теорем другого, третього та п'ятого розділів існують чисто уявні корені.

На думку Щоголева С.А. дисертаційна робота Дрожжиної А.В. є завершеним та актуальним науковим дослідженням і робота може бути рекомендована до захисту за спеціальністю 111 «Математика».

**Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кічмаренко О.Д. (рецензент)**, яка зазначила актуальність та високий науковий рівень дисертаційної роботи. Серед недоліків та дискусійних положень рецензент зазначила:

1. В роботі не розглянуто випадки  $\gamma = 0$  та  $\gamma = 2$ . Варто було би їх розглянути.

На думку Кічмаренко О.Д. дисертаційна робота Дрожжиної А.В. є актуальним завершеним науковим дослідженням і робота може бути рекомендована до захисту.

**Кандидат фізико-математичних наук, доцент Білозерова М.О.**, яка відзначила високий рівень складності доведень у теоремах, отриманих у дисертаційній роботі та професійність при подоланні труднощій у доведеннях, які виникали за рахунок довільності порядку диференціального рівняння, яке розглядається у роботі.

#### **УХВАЛИЛИ:**

Прийняти висновок рецензентів на дисертаційну роботу Дрожжиної Анастасії Вадимівни у такій редакції:



## ВИСНОВОК

про наукову новизну та практичне значення результатів дисертації  
Дрожжиної Анастасії Вадимівни  
на тему: «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних  
звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку»  
на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та  
статистика» зі спеціальності 111 «Математика»

**Актуальність теми дослідження.** Нелінійні неавтономні диференціальні рівняння виникають в багатьох галузях природознавства. Однак теорія таких рівнянь ще дуже далека від остаточного завершення і тому кожний новий результат у цьому напрямку представляє значний інтерес.

Сучасна асимптотична теорія нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь базується на результатах, що були отримані починаючи з кінця XIX століття до 90-х років XX століття для рівнянь типу Емдена-Фаулера і рівнянь більш загального виду зі степеневими нелінійностями в роботах R. Emden, R. Fowler, F.V. Atkinson, I.T. Кігурадзе, Т.А. Чантурія, S. Belogorec, В.О. Кондратьєва, О.В. Костіна, В.М. Євтухова, І.В. Асташової, J.S.V. Wong та багатьох інших авторів. Одержані у цей період результати були підсумовані у відомій монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений", М., 1990 р. В подальшому у зв'язку з бурхливим розвитком, створеної у 1930 році І. Караматою, теорії правильно змінних функцій проявився інтерес до дослідження асимптотичної поведінки розв'язків двочлених диференціальних рівнянь з правильно та швидко змінними нелінійностями, які є суттєвими узагальненнями рівнянь зі степеневими нелінійностями. Важливі результати у цьому напрямку були одержані в роботах V. Maric, M. Tomić, S.D. Taliaferro, В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової, Харькова В.М., Білозерової М.О. для диференціальних рівнянь другого порядку, та в роботах В.М. Євтухова і А.М. Самойленка, а також В.М. Стаухова і О.М. Клопота для диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку. У дисертаційній роботі А.В. Дрожжиної ставиться задача про поширення отриманих для таких класів диференціальних рівнянь результатів на нелінійні неавтономні диференціальні рівняння  $n$ -го порядку загального виду. Раніше спроба такого поширення була здійснена лише для рівнянь другого порядку в роботах В.М. Євтухова і Л.І. Кусік. Згідно з вищевикладеним тема дисертаційної роботи А.В. Дрожжиної є своєчасно поставленою і дуже актуальною, як з теоретичної, так і практичної точок зору.

**Мета і завдання дослідження та зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Метою дисертаційної роботи А.В. Дрожжиної є встановлення необхідних та достатніх умов існування всіх можливих типів  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$  - розв'язків диференціального рівняння  $n$ -го порядку загального виду, що є асимптотично близьким у деякому сенсі до рівняння з правильно змінними нелінійностями, а також асимптотичних зображень для цих розв'язків та їх похідних до  $(n-1)$ -го порядку включно з вирішенням питання про кількість таких розв'язків.

Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І.І. Мечникова у рамках наукових держбюджетних тем: "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь аналітичними та якісними методами" (номер державної реєстрації 010911003665) і "Функціональні класи в еволюційних системах" (номер державної реєстрації 011611001492).

**Наукова новизна.** У результаті проведеного особисто дисертантом дослідження:

- здійснено аналіз попередніх досліджень асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями і на підставі його зроблено висновок про актуальність обраної теми дисертації;
- для кожного з  $n + 2$  можливих значень параметру  $\lambda_0$  визначено умову  $RN_{\lambda_0}$  на праву частину диференціального рівняння  $n$ -го порядку загального виду, при виконанні якої на  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$  -розв'язках це рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до рівняння з правильно змінними нелінійностями, що дало можливість в подальшому використовувати методи дослідження асимптотичної поведінки  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$  -розв'язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями;
- при умові  $RN_{\lambda_0}$  одержано необхідні і достатні умови існування у диференціального рівняння  $n$ -го порядку загального виду  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$  -розв'язків, а також асимптотичні формули у неявному вигляді для таких розв'язків та їх похідних до порядку  $n-1$  включно;
- вирішено питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями;



- визначено додаткові умови на праву частину рівняння, при виконанні яких одержані асимптотичні формули можуть бути поданими у явному вигляді;
- встановлено умови існування і асимптотичні зображення сингулярних  $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$  -розв'язків у диференціального рівняння  $n$ -го порядку загального виду;
- проілюстровано результати роботи на прикладах двох класів диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, один з яких раніше в літературі не розглядався.

Всі одержані автором результати є новими і вперше встановленими для нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку загального виду.

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів дисертаційного дослідження Дрожжиної А.В.** полягає в тому, що вони можуть використаними в подальших дослідженнях нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків, які проводяться в Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, інституті математики НАН України, Інституті математики імені А. Размадзе Тбіліського державного університету імені І. Джавахішвілі та інших закладах освіти і науки. Крім того, вони можуть бути застосованими для дослідження рівнянь, що виникають у багатьох прикладних задачах науки і техніки, зокрема в теорії плазми продуктів згорання.

**Апробація наукових результатів.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та отримали позитивну оцінку на міжнародних конференціях: Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей з міжнар. конф., присвяченої 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка (м. Кам'янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.), Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. (м. Чернівці, 17-18 вересня 2018 р.), International Conference of Young Mathematicians. (Kyiv, Ukraine, June 6-8, 2019), Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV. (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.), Workshop on the Qualitative Theory of Diff. Eq. (Tbilisi, December 7-9, 2019), Сучасні проблеми

диференціальних рівнянь та їх застосування. (м. Чернівці, 16-19 вересня 2020 р.).

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано чотири статі, дві з яких надруковані в фахових виданнях, переклад яких індексований у наукометричній базі SCOPUS та 2 інші у наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України, а також шість тез доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових математичних конференціях. Усі результати дисертації отримано автором самостійно. У двох статтях, що опубліковані у співавторстві з науковим керівником, Євтухову В.М. належать постановка задачі, визначення мети та завдань дослідження, вибір методів і напрямків розв'язання поставленої задачі та загальне керівництво роботою.

### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ:

Дисертаційна робота та усі наукові публікації Дрожжиної А.В. відповідають вимогам «Порядку проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №167 від 6 березня 2019 року. Аналіз змісту дисертаційного дослідження та опублікованих праць вказує на дотримання здобувачем вимог академічної доброчинності.

#### *Статті у наукових фахових виданнях, переклад яких індексується у базі SCOPUS:*

1. Евтухов В.М., Дрожжина А. В. Асимптотика быстро меняющихся решений дифференциальных уравнений, асимптотически близких к уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями. *Нелінійні коливання*. 2019. Т.22, № 3. С. 350-368.
2. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.*. 2019. Т.71, № 12. С. 1624-1644.  
Evtukhov, V.M., Droggina, A.V. Asymptotic Representations for the Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, 71(12), p. 1865–1887



### **Статті у наукових фахових виданнях України:**

3. Дрожжина А.В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету "Математика і інформатика"*, 2018. Вип. 1 (32). С. 67-79.
4. Дрожжина А. В. Асимптотика некоторых типов одного класса решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. *Дослідження в математиці та механіці*. 2019. Т. 24, № 2 (34). С. 7-30.

### **Публікації за матеріалами конференцій:**

5. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку. *Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей з міжнар. конф., присвяченої 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка* (м. Кам'янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.). Кам'янець-Подільський, 2017. С. 39.
6. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях*. (м. Чернівці, 17-18 вересня 2018 р.). Чернівці, 2018. С. 65.
7. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *International Conference of Young Mathematicians*. (Kyiv, Ukraine, June 6-8, 2019). Kyiv, 2019. P. 57.
8. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV*. (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.). Київ, 2019. С. 77.
9. Drozhzhyna A. V. Asymptotic Representations of Rapid Varying Solutions of Differential Equations Asymptotically Close to the Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *QUALITDE – 2019: abstracts of the Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Diff. Eq.* (Tbilisi, December 7-9, 2019). Tbilisi, 2019. P. 57-59.
10. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь. *Сучасні проблеми*

*диференціальних рівнянь та їх застосування.* (м. Чернівці, 16-19 вересня 2020 р.). Чернівці, 2020. С. 118-119.

**Оцінка мови та стилю дисертації.** Стиль викладу дисертації у повній мірі відповідає науковому стилю. Він містить: ясність (понятійність) і предметність тлумачень; логічну послідовність і доказовість викладу; об'єктивний аналіз; точність і лаконічність висловлювань; аргументацію та переконливість тверджень; докладні висновки. При цьому використовуються наступні мовні засоби: велика кількість наукової термінології; оперування абстрактними, переважно іншомовними словами; використання суто наукової фразеології; залучення посилань на першоджерела; наявність чіткої композиційної структури тексту (послідовний поділ на розділи, параграфи, абзаци із застосуванням цифрової нумерації); наявні дієслівні форми, частіше безособові, узагальнені чи неозначені, як правило, теперішнього часу; значну роль відіграють дієприслівникові та дієприкметникові звороти, які додатково характеризують дії та предмети; монологічний характер тексту; застосування однотипних складних речень і різноманітних стандартних виразів.

**Рекомендація дисертації до захисту.** Дисертаційна робота Дрожжиної Анастасії Вадимівни на тему: «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку» рекомендується до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 «Математика та статистика» зі спеціальності 111 «Математика».

**Загальний висновок.** На підставі ретельного ознайомлення з дисертацією, основними публікаціями і результатами апробації на фаховому семінарі кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І.І. Мечникова вважаємо, що дисертаційна робота Дрожжиної Анастасії Вадимівни «Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку» за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень і новизною отриманих результатів відповідає всім вимогам, передбаченим пунктом 10 Постанови Кабінету Міністрів України № 167, і може бути



поданою до захисту за спеціальністю 111 Математика на спеціалізованій вченій раді Одеського національного університету імені І.І. Мечникова.

Висновок підготовлений доктором фізико-математичних наук, професором Щоголевим С. А. та кандидатом фізико-математичних наук, доцентом Кічмаренко О.Д.

**Рецензент**

д. ф.-м. н., професор,  
завідувач кафедри вищої математики



Щоголев С.А.

**Рецензент**

к. ф.-м. н., доцент,  
завідувач кафедри оптимального керування  
та економічної кібернетики



Кічмаренко О.Д.

**Головуючий на засіданні**

д. ф.-м. н., професор завідувач кафедри  
математичного аналізу



Кореновський А.О.

**Секретар засідання**

к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри  
диференціальних рівнянь,  
геометрії та топології



Білозерова М.О.

19 листопада 2020 р.

