

ВІДГУК

офіційного опонента доктора фізико-математичних наук,
професора Капустяна О.В. про дисертацію А.В. Дрожжиної
” Асимптотична поведінка розв’язків нелінійних неавтономних
звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку ”,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 - математика

Актуальність теми. Нелінійні неавтономні диференціальні рівняння виникають в багатьох галузях природознавства і тому привертають до себе увагу багатьох дослідників. Після отриманих в ХХ столітті і підсумованих у відомій монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений" (Москва, 1990г) результатів про асимптотичну поведінку розв’язків диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями, зокрема узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера, природними постало питання про можливість їх поширення на диференціальні рівняння з нелінійностями, що є асимптотично близькими до степеневих, а саме на рівняння з правильно змінними нелінійностями. Найбільш вагомі результати у цьому напрямку були одержані у період з 80 років ХХ століття по теперешній час в роботах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, Євтухова В.М., Кирилової Л.О., Білозерової М.О., Харькова В.М. для диференціальних рівнянь другого порядку і в роботах В.М. Євтухова та А.М. Самойленко, В.М. Євтухова та О.М. Клопота – для диференціальних рівнянь n -го порядку з правильно змінними нелінійностями. В дисертаційній роботі А.В. Дрожжиної вперше ставиться задача про поширення цих результатів на диференціальні рівняння n -го порядку загального виду, що у деякому сенсі є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Тому тема дисертації є актуальною, як з теоретичної, так і практичної точок зору.

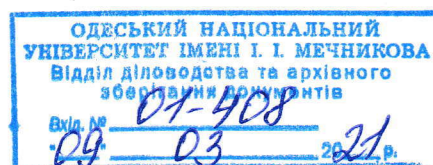
Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І.І. Мечникова у рамках наукових держбюджетних тем: “Дослідження асимптотичної поведінки розв’язків диференціальних рівнянь аналітичними та якісними методами” (номер державної реєстрації 0109U003665) і “Функціональні класи в еволюційних системах” (номер державної реєстрації 0116U001492).

Зміст дисертації і результати, одержані особисто здобувачем та їх новизна. Дисертація складається з анотацій, вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 110 найменувань. Зміст дисертації відповідає спеціальності 111 Математика.

У першому розділі роботи подано детальний огляд досліджень асимптотичної поведінки розв’язків неавтономних диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями. Тут також формулюються необхідні для подальшого дослідження результати В.М. Євтухова про апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(\lambda_0)$ -розв’язків диференціальних рівнянь вищих порядків і основні положення теорії правильно змінних функцій. Обсяг опрацьованого матеріалу засвідчує всебічне ознайомлення автора з науковими здобутками попередників. У другому – п’ятому розділах роботи встановлюються основні результати дисертації.

Дисертація присвячена дослідженню асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язків диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$



де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ – деякий однобічний окіл Y_{i-1} , Y_{i-1} дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $i = 1, \dots, n$.

Розв’язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i-1)}(t) = Y_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-1)}(t)} = \lambda_0.$$

Цей клас розв’язків є конкретизованим для рівняння (1) класом $P_\omega(\lambda_0)$ -розв’язків, апріорні асимптотичні властивості якого були раніше встановлені В.М.Євтуховим в роботах, що присвячені узагальненим диференціальним рівнянням типу Емдена-Фаулера n -го порядку. Згідно з цими асимптотичними властивостями множина $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язків диференціального рівняння (1) може бути поділеною на $n + 2$ неперетинних множин, що відповідають наступним значенням параметру λ_0 :

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}; \quad \lambda_0 = \pm\infty; \quad \lambda_0 = 1; \quad \lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

При кожному з $n+2$ вказаних значень λ_0 $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язки мають суттєво різні асимптотичні властивості і тому потребують окремого розгляду. Для кожного з таких значень λ_0 автором було визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння (1), при виконанні якої для $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язків має місце асимптотичне зображення

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (2)$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [t_0, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна і правильно змінна при прямуванні аргументу до Y_j функція порядку σ_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$. Встановлення умов $(RN)_{\lambda_0}$ можна вважати одним з вагомих здобутків автора роботи, оскільки їх впровадження зробило можливим в подальшому дослідженні використовувати підходи і методи, що були раніше розроблені в роботах В.М. Євтухова і А.М. Самойленко та В.М. Євтухова і О.М. Клопота, присвячених неавтономними диференціальними рівняннями з правильно змінними нелінійностями. Треба також зазначити, що перенесення вказаних підходів і методів на диференціальне рівняння загального виду (1) зовсім не є тривіальним і вимагало від здобувача значної роботи по їх модифікації.

У результаті проведеного особисто дисертантом дослідження вперше для диференціального рівняння загального виду (1) при кожному з $n + 2$ вказаних вище можливих значень параметру λ_0 визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ і при її виконанні одержано наступні результати:

– встановлено необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язків, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення у неявному вигляді для таких розв’язків та їх похідних до порядку $n - 1$ включно;

– визначено додаткові умови на повільно змінні складові правильно змінних функцій φ_j , при виконанні яких асимптотичні зображення можуть бути поданими у явному вигляді;

– встановлено достатні умови існування розв’язків з отриманими асимптотичними зображеннями і вирішено питання про кількість таких розв’язків;

– встановлено умови існування і асимптотичні зображення сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв’язків.

– проілюстровано результати роботи на прикладах двох класів диференціальних рівнянь n -го порядку, один з яких раніше в літературі не розглядався.

Всі одержані автором в дисертації результати є новими і суттєво доповнюють відомі результати про асимптотичну поведінку розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій, які захищаються. Всі отримані в дисертації результати є строго математично обґрунтованими. Їх достовірність забезпечується чіткими і повними доведеннями теорем і наслідків з цих теорем, а також узгодженістю з відомими результатами, зокрема, з результатами І.Т.Кігурадзе для нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь n -го порядку і з результатами В.М. Євтухова і О.М. Клопота для неавтономних диференціальних рівнянь n -го порядку з правильно змінними нелінійностями.

Наукове та практичне значення дисертаційної роботи і використання її результатів. Робота носить теоретичний характер. Всі отримані в ній результати можуть бути використаними в подальших дослідженнях нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків, які проводяться в Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, інституті математики НАН України, Інституті математики імені А. Размадзе Тбіліського державного університету імені І. Джавахішвілі та інших закладах освіти і науки. Крім того, вони можуть бути застосованими для дослідження рівнянь, що виникають у багатьох прикладних задачах науки і техніки, зокрема в теорії плазми продуктів згорання.

Зауваження та рекомендації. Незважаючи на цінність проведеного автором дослідження, вважаю про необхідність висловити деякі зауваження та побажання.

1. Потрібно було зробити в роботі порівняльний аналіз класів $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків, що досліджувались автором, з класами розв'язків І.Т. Кігурадзе, які були введені раніше при розгляді нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків загального виду, а не тільки обмежитись поданими в дисертації прикладами.

2. На наш погляд треба було пояснити, чому результати дисертації не охоплюють випадок, коли в зображеннях (2) порядки функцій φ_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) задовольняють умову $\gamma = 0$.

3. Було б цікавим дослідити хоча б для деяких конкретного виду рівнянь n -го порядку особливі випадки, коли серед коренів алгебраїчних рівнянь з теорем другого, третього та п'ятого розділів існують чисто уявні корені.

4. Для отримання асимптотичних зображень $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків в явному виді у теоремах 2.2, 3.2, 4.2, 5.2 накладалась додаткова умова S на повільно змінні складові функцій φ_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$). Вважаю, що автору треба було зазначити, в якому сенсі ця умова є остаточною при вирішенні даного питання.

5. У роботі потрібно було увести означення сингулярного $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, \lambda_0)$ -розв'язку, а не пояснювати його сенс заміною ω на ω_* ($\omega_* \in]a, \omega[$) в означенні $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, \lambda_0)$ -розв'язку.

Ці зауваження, у цілому, носять характер побажань для подальшої наукової роботи автора і ні в якій мірі не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Повнота опублікування результатів дисертації та особистий внесок здобувача до всіх наукових публікацій. Всі результати дисертаційної роботи опубліковано в чотирьох статях, дві з яких надруковані в фахових виданнях ("Український математичний журнал "Нелінійні коливання"), переклад яких індексований у наукометричній базі SCOPUS, та 2 інші ("Дослідження в математиці та механіці "Науковий вісник Ужгородсь-

кого університету") у наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України, а також у шістьох тезах доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових математичних конференціях. Усі результати дисертації отримано автором самостійно. У двох статтях, що опубліковані у співавторстві з науковим керівником, Євтухову В.М. належать постановка задачі, визначення мети та завдань дослідження, вибір методів і напрямків розв'язання поставленої задачі та загальне керівництво роботою.

Висновок. На підставі ознайомлення з дисертацією та публікаціями вважаю, що дисертаційна робота Дрожжиної Анастасії Вадимівни "Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку" є завершеною науковою працею в галузі асимптотичної теорії диференціальних рівнянь. Вона за актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень і новизною отриманих особисто здобувачем результатів відповідає всім вимогам, передбаченим пунктом 10 Постанови Кабінету Міністрів України № 167 "Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії" від 6.03.2019 р. (із змінами внесеними згідно з постановою КМ № 979 від 21.10.2020 р.), а її автор Дрожжина А.В. заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111- математика.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри диференціальних та
інтегральних рівнянь Київського
національного університету
імені Тараса Шевченка



Капустян О.В.

Підпис засідача
вченої секретарки
КАРАУЛЬНА Н.В.
19.02 2021р.

