

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

МИСОВ КОСТЯНТИН ДМИТРОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ДВІЧІ-ЗРІЗАНОВОГО
КОНУСУ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ К. Д. Мисов

Науковий керівник:
Вайсфельд Наталя Данилівна,
доктор фізико-математичних наук, професор

Одеса - 2023

АНОТАЦІЯ

Мисов К. Д. Динамічні задачі кручення пружного двічі-зрізаного конусу – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» спеціальності 113 «Прикладна математика». – Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, 2023.

Розв’язано динамічну задачу теорії пружності для двічі-зрізаного пружного конусу під дією зовнішніх крутильних навантажень прикладених до нижньої сферичної поверхні через абсолютно жорстку накладку. За допомогою застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі. Розв’язок задачі у просторі трансформант побудовано за допомогою апарату фундаментальної системи розв’язків, який далі використано для отримання неперервного розв’язку в просторі оригіналів. Досліджено хвильове поле двічі-зрізаного пружного конусу послабленого дефектами сферичної або конічної форми під дією зовнішніх крутильних навантажень. За допомогою інтегрального перетворення Лежандра побудовано розривні розв’язки динамічного рівняння кручення, на основі яких розв’язання задачі зведено до розв’язання сингулярних інтегральних рівнянь методом ортогональних поліномів.

Тип дефекту уточняється до тріщини та розв’язуються динамічні задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу під дією зовнішніх крутильних навантажень послаблених тріщинами сферичної або конічної форми. Їх розв’язок знаходиться у вигляді суперпозиції вже знайдених неперервного розв’язку та розривного розв’язків. Задовольняючи умовам відсутності напружень на краях тріщини будується сингулярне інтегральне або інтегро-диференціальне рівняння з виділеною особливістю. Вони розв’язуються за схемою методу ортогональних поліномів, що дозволяє знайти невідомі стрибки переміщень. Було проведено аналіз перших власних частот конусу в залежності від різних механічних та геометричних характеристик конусу та тріщини. Також було проаналізовано коефіцієнт інтенсивності напружень на берегах тріщин.

Також розв'язано динамічну задачу кручення двічі-зрізного сферично шаруватого конусу. Розв'язання починається з застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова, який зводить вихідну задачу до одновимірної крайової задачі. Для неї знаходиться фундаментальний розв'язок, використовуючи який будується загальний розв'язок у просторі трансформант одновимірної крайової задачі з невідомими константами для кожного шару. Використовуючи однорідний розв'язок та умови на краях конуса й стиках шарів, будується система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок системи будується у ітеративному вигляді, дозволяючи знаходити невідомі константи шарів незалежно від їх кількості. Далі до розв'язку використовується обернене інтегральне перетворення для переходу в оригінальний простір й отримання остаточного розв'язку. Було проведено аналіз перших власних частот конусу в залежності від різних механічних та геометричних характеристик шарів конусу.

Ключові слова: динамічні задачі, двічі-зрізаний конус, розривний розв'язок, сингулярне інтегральне рівняння, власні частоти.

ABSTRACT

Mysov K.D. Dynamic torsion problems for an elastic twice-truncated cone. – Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the Doctor of Philosophy degree in the field of knowledge 11 “Mathematics and statistics” in the speciality 113 “Applied mathematics”. – Odesa I. I. Mechnikov National University, Odesa, 2023.

The dynamic problem of the theory of elasticity for a twice-truncated with a spherical surfaces elastic cone under the external torsional loads applied to the lower spherical surface through an absolutely rigid overlay is considered. Using the G.Ya. The Popov integral transformation problem is reduced to a one-dimensional vector boundary value problem. The solution of the problem in the transform domain is constructed using the apparatus of the fundamental system of solutions, which is then inverted to obtain a continuous solution in the original domain. Dynamic torsion problems for a twice-truncated with a spherical surfaces elastic cone under the external torsional loads weakened by defects of a spherical or conical shape are also considered, to solve which a

discontinuous solution is constructed. Discontinuous solutions for the dynamic torsion equation in unbound space are constructed by applying the integral Legendre transformation directly to the torsion equation. This reduces the equation to one-dimensional, which is solved using the Melin integral transform. After successive inversion of the solution in the transformant domain, we obtain a discontinuous solution with unknown jumps of displacements and stresses for initial problem.

The type of defect is specified to be a crack and the dynamic torsion problems for a twice-truncated with spherical surfaces elastic cone under the external torsional loads weakened by spherical or conical cracks are solved. Their solution is in the form of a superposition of already found continuous solutions and discontinuous solutions. A singular integral or integro-differential equation with a separated singularity is constructed by satisfying the conditions of the absence of stresses at the edges of the crack. They are solved according to the scheme of the method of orthogonal polynomials, which allows to find unknown displacement jumps. An analysis of the first natural frequencies of the cone was carried out depending on various mechanical and geometric characteristics of the cone and the crack. The stress intensity factor on the crack banks was also analysed.

The dynamic torsion problem for a twice-truncated spherically layered cone is also solved. The solution begins with the application of the G.Ya. Popov integral transformation, which reduces the initial problem to a one-dimensional boundary value problem. Fundamental solution is built, using which a general solution is constructed in the transform domain for a one-dimensional boundary value problem with unknown constants for each layer. A system of linear algebraic equations is constructed using general solution and conditions on the edges of the cone and the junctions of the layers. The solution of the system is built in iterative form, allowing to find the unknown layer constants regardless of their number. Next, the inverse integral transformation is used to derive the solution of initial problem. An analysis of the first natural frequencies of the cone was carried out depending on the various mechanical and geometric characteristics of the layers of the cone.

Key words: dynamic problems, double-cut cone, discontinuous solution, singular integral equation, natural frequencies.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Наукові фахові видання України:

1. Mysov, K.D.: Torsion problem for an elastic twice-truncated cone. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 24, 65-73 (2019) (*наукове фахове періодичне видання України*)

Наукові публікації у виданнях, що індексуються у наукометричних базах:

2. Mysov, K., Vaysfel'd, N.: The Wave Field of a Twice-Truncated Elastic Cone Under Torsion Moment Impact. In: Gdoutos, E.E. (ed.) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*. pp. 242–247. *Structural Integrity*, vol 8. Springer, Cham. (2019) (*Scopus*)

3. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a spherical crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity*. 28, 352–357 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.041> (*Scopus*)

4. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a cone-shaped crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity*. 33, 365–370 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.044> (*Scopus*)

Публікації в інших виданнях:

5. Мисов, К.Д., Вайсфельд, Н.Д.: Усталені крутильні коливання двічі зрізаного пружного конусу. *Науковий журнал «Молодий вчений»*. 62, 119-121 (2018). (*періодичне видання України*)

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Тези в збірниках матеріалів наукових конференцій:

6. Mysov K. D., Vaysfeld N. D. Dynamic torsion of a twice truncated cone. *Proceedings of the 1st International Scientific and engineering conference in Baku*, с. Baku, Azerbaijan, November 28-30 2018. Azerbaizan, Baku, 2018, P. 86-89.

7. Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Динамічна задача кручення для двічі зрізаного конуса. *Сучасні проблеми механіки та математики: Збірник наукових*

праць міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», м. Львів, 22-25 травня 2018. Львів 2018, С.120-121.

8. Mysov K., Vaysfeld N. The wave field of the rotating cone. International Conference of Young Mathematicians: Abstracts, с. Kyiv, June 6-8 2019. Kyiv, 2019, P.37.

9. Мисов К., Вайсфельд Н. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного конусу. Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей другої міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського, м. Дніпро, 10-12 Жовтня 2019. Дніпро, 2019, С.112-113.

10. Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Д. Концентрація динамічних напружень поблизу конусоподібної тріщини в двічі-зрізаному пружному конусі. Сучасні проблеми механіки: VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021. Київ, 2021, С.51.

11. Мисов К.Д. Хвильове поле двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу під дією крутильного моменту. Збірник тез X Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених «Інформаційні технології - 2023», Київ, 18 травня 2023. Київ, 2023, С.163.

12. Мисов К.Д. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу // Збірник тез міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики - 2023», Львів, 23-25 травня 2023. Львів, 2023, С. 195-196.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	9
ВСТУП.....	10
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	17
1.1. Огляд праць, що присвячено статичним задачам теорії пружності.....	18
1.2. Динамічні задачі теорії пружності для об'єктів конічної форми.....	20
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО ДЕФЕКТОМ	22
2.1. Постановка вихідної динамічної задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу послабленого дефектом	22
2.2. Загальна схема побудови розв'язку динамічної задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу.....	27
2.3. Побудова розривного розв'язку динамічного рівняння кручення для дефектів сферичної та конічної форми	33
2.3.1. Дефект сферичної форми.....	33
2.3.2. Дефект конічної форми.....	39
2.4. Висновки до другого розділу.	44
РОЗДІЛ 3. ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО СФЕРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ.....	45
3.1. Постановка задачі.....	45
3.2. Побудова та розв'язання сингулярного інтегрального рівняння	48
3.3. Числовий аналіз результатів розрахунку	55
3.3.1. Аналіз власних частот.....	56
3.3.2. Аналіз напружень	62
3.3.3. Аналіз КІН на берегах тріщини	66
3.4. Висновки до третього розділу.....	71
РОЗДІЛ 4. ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДЛЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО КОНІЧНОЮ ТРІЩИНОЮ.....	72
4.1. Постановка задачі.....	72
4.2. Побудова та розв'язання сингулярного інтегро-диференційного рівняння	74
4.3. Числовий аналіз результатів розрахунку.....	80
4.3.1. Аналіз власних частот.....	81

4.3.2. Аналіз напружень	82
4.3.3. Аналіз КІН на берегах тріщини	84
4.4. Висновки до четвертого розділу	89
РОЗДІЛ 5. ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОВОГО СФЕРИЧНО ШАРУВАТОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ	90
5.1. Постановка задачі	90
5.2. Побудова одновимірної задачі та її розв'язання	93
5.3. Числовий аналіз результатів розрахунку	98
5.3.1. Аналіз власних частот	99
5.3.2. Аналіз напружень	105
5.4. Висновки до п'ятого розділу	107
ВИСНОВКИ	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	110
ДОДАТОК А. ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ ІНТЕГРУВАННЯ	117
ДОДАТОК Б. ВИВЕДЕННЯ НАПРУЖЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІР	119
ДОДАТОК В. ПОШУК АСИМПТОТИЧНОГО УЯВЛЕННЯ ДЛЯ $\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R)$	121
ДОДАТОК Г. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФОРМУЛИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА	124
ДОДАТОК Ґ. ПОШУК АСИМПТОТИЧНОГО УЯВЛЕННЯ ДЛЯ $\sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta)$ ТА $(P_k^2(\cos \gamma))^2$	125
ДОДАТОК Д. ВИДІЛЕННЯ СИНГУЛЯРНОЇ ЧАСТИНИ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІР	128
ДОДАТОК Е. ПОШУК НЕВІДОМИХ КОНСТАНТ $\{ {}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$	132
ДОДАТОК Є. СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	136
ДОДАТОК Ж. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ	138

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

КІН – коефіцієнт інтенсивності напруги

СЛАУ – система лінійних інтегральних рівнянь

ДІР – диференціальне інтегральне рівняння

СІР – сингулярне інтегральне рівняння

СІДР – сингулярне інтегро-диференціальне рівняння

ФГМ – функціонально градієнтні матеріали

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі кручення конічних тіл, в особливості послаблених дефектами різного вигляду, займають важливе місце в механіці деформованого твердого тіла, що пов'язано з їх роллю при моделюванні різноманітних інженерних задач. Основні підходи до аналітичного розв'язання такого роду задач засновані на зображенні розв'язків рівняння кручення (частковий випадок трьох рівнянь Ламе) через допоміжні функції, знаходження яких потребує розв'язок допоміжних задач. Побудова таких задач, а також їх розв'язання являється основною незручністю цих методів, бо це істотно збільшує кількість операцій, які часто можуть бути нетривіальними. Запропонований у роботі підхід полягає у прямому застосуванні інтегрального перетворення до рівняння кручення. Це дозволяє аналітично розв'язати задачу у просторі трансформант. За допомогою методу розривних розв'язків та методу суперпозиції будується сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язується методом ортогональних многочленів. Цей підхід продемонстровано на розв'язанні динамічних задач кручення через абсолютно жорстку накладку прикладену до нижньої сферичної поверхні пружного двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу послабленого сферичним або конічним дефектом або з наявною у конусі сферичною шаруватістю. Як свідчить аналіз літератури, у дослідженні задач пружності, об'єктом в яких виступає конус, існують невирішені проблеми, що потребують розвитку аналітичних методів їх розв'язання. Запропонований у роботі підхід дозволив спростити побудову розв'язку, зменшити кількість допоміжних операцій для його отримання та побудувати розв'язки нових за постановкою задач. Цим обґрунтовано актуальність розробки нової методики аналітичного розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для конусів.

Мета і задачі дослідження. *Метою* даної роботи є встановлення особливостей хвильового поля двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу під впливом зовнішнього крутильного навантаження, в залежності від

геометричних та фізичних характеристик конусу, за наявності дефекту та наявності шаруватості.

Досягнення поставленої мети передбачає виконання наступних *завдань*:

1) розвиток методики розв'язання динамічних задач кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу, яка базується на застосуванні розривного розв'язку рівняння кручення.

2) побудова аналітичного розв'язку динамічної задачі кручення пружного двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу, що послаблений сферичним або конічним дефектами. Встановлення кількісних та якісних закономірностей хвильових полів.

3) розв'язання динамічної задачі кручення пружного сферично шаруватого конусу. Дослідження залежності основних механічних характеристик конусу від пружних властивостей шарів та їх кількості.

Об'єктом дослідження є пружний двічі-зрізаний сферичними поверхнями конус послаблений дефектом під впливом зовнішнього крутильного навантаження.

Предметом дослідження є хвильове поле двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу під впливом крутильних навантажень за наявності шарів та дефектів різної природи.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі задачі теорії пружності для двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу під впливом зовнішнього крутильного навантаження послабленого дефектом розв'язано методом суперпозиції неперервного та розривного розв'язків. Неперервна задача розв'язується за допомогою методу інтегральних перетворень який застосований безпосередньо до рівняння кручення, що зводить задачу до одновимірної крайової задачі, яка далі розв'язується з використанням методики базисних розв'язків та методики функції Гріна. Розривна задача розв'язується послідовним використанням методу інтегральних перетворень який застосований безпосередньо до рівняння кручення за узагальненою та стандартною схемою. Отримані в результаті сингулярне інтегральне рівняння або сингулярне інтегро-диференційне

рівняння розв'язуються методом ортогональних многочленів для врахування особливостей ядра.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів забезпечується: коректністю та строгістю математичних постановок задач в рамках лінійної механіки суцільного тіла та механіки руйнування; використанням для побудови розв'язків сформульованих задач апробованих строгих аналітичних методів; фізичною інтерпретацією результатів розрахунків задач та порівнянням з аналогічними результатами.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше застосовано методу розв'язання динамічних задач кручення теорії пружності для двічі-зрізаних сферичними поверхнями конусів послаблених дефектами, яка базується на безпосередньому інтегральному перетворенні рівняння кручення. Ця методика дозволяє відразу отримати аналітичні подання шуканих механічних характеристик;

- за допомогою методу розривних розв'язків побудовано аналітичний явний розв'язок динамічної задачі кручення пружного двічі-зрізаного конусу за наявності дефектів типу тріщини і тонких жорстких включень;

- отримано аналітичний розв'язок динамічної задачі кручення пружного двічі-зрізаного сферично шаруватого конусу.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У роботах у співавторстві [2, 6, 36, 37, 38, 40] науковому керівнику який виступає співавтором належить постановка задачі та вибір методики їх розв'язання. Здобувачем титулу доктору філософії виконано огляд літератури, виконано усі математичні перетворення, розроблено програмну реалізацію та проведено чисельний аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що увійшли до дисертаційної роботи, доповідались і обговорювались на міжнародних наукових конференціях різного рівня: міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики, Львівський національний університет імені Івана Франка» (Львів, 2018), міжнародній науковій та інженерній конференції «1st International

Scientific and engineering conference» (Baku, Azerbaijan, 2018), міжнародна конференція молодих математиків «International Conference of Young Mathematicians» (Kiev, 2019), міжнародна конференція «International conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics» (Corfu, Greece, 2019), міжнародно науково-технічна конференція «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 2019), міжнародна наукова конференція «1st Virtual Conference on Fracture» (Italy, 2020), міжнародна наукова конференція «26th International conference on fracture and Structural Integrity» (Turin, Italy, 2021), міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2021), всеукраїнська науково-практична конференція молодих вчених «Інформаційні технології – 2023» (Київ, 2023), міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 2023).

У повному обсязі робота доповідалась на

- науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом д.ф.-м.н., проф., член-кореспондента НАН України Я.О. Жука;
- науковому семінарі кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Лободи;
- науковому семінарі відділу обчислювальної механіки деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д.ф.-м.н., проф. В.В. Михаськіва;
- науковому семінарі кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова під керівництвом к.ф.-м.н., доц. Ю.С. Процерава.

Публікації. Основні наукові положення дисертаційного дослідження відображено у 12 публікаціях, з яких: 1 наукова стаття, опублікована в фахових виданнях України [40], одна опублікована в іншому науковому виданні України [6], три опубліковано у зарубіжних виданнях [36, 37, 38], тези 7 наукових конференції

України або міжнародних наукових конференцій різного рівня [1, 2, 3, 5, 35, 39]. Статті [36, 37, 38] прореферовані у міжнародній наукометричній базі Scopus.

Структура і обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаної літератури, що включає 65 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 138 сторінок, із них 116 сторінок основного тексту. Робота містить 44 рисунки.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; сформульовано мету та завдання дослідження; вказано методи розв'язання поставлених задач; висвітлено новизну і достовірність одержаних результатів, їх практичне значення; надано відомості про апробацію роботи, публікації та особистий внесок в них здобувача.

У *першому розділі* проведено огляд наукових робіт, що мають відношення до розв'язання задач пружності об'єктом дослідження в яких виступає пружний конус. Коротко проаналізовано праці та місце автора у науковій проблемі, якій присвячена робота. Продемонстровано, що тематика роботи відповідно до проведеного дослідження є актуальною.

У *другому розділі* сформульовано динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого дефектом загальної природи (тріщина або тонке жорстке включення) сферичної або конічної форми та продемонстровано загальну методіку побудови розв'язку. Розв'язок базується на зображенні хвильового поля у вигляді суперпозиції неперервного та розривного полів. Застосуванням інтегрального перетворення Г.Я. Попова динамічну задачу кручення конусу без дефекту було розв'язано у явному вигляді. Розривне хвильове поле було знайдено методом узагальнених інтегральних перетворень, які обиралися в залежності від форми дефекту.

У *третьому розділі* розглянуто динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу послабленого сферичною тріщиною. Поставлену задачу за вищеописаною методикою другого розділу було зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від невідомого стрибка переміщень. Воно було розв'язано за допомогою методу ортогональних многочленів. Для цього

проведено виділення сингулярного ядра рівняння у вигляді ядра Веббера-Соніна. Зображення хвильового поля конусу подано у вигляді явних аналітичних формул. Досліджено резонансні перші частоти конусу, проаналізовано значення дотичних напружень та коефіцієнту інтенсивності напружень в залежності від розміру тріщини та частоти навантажень.

У *четвертому розділі* розв'язано динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу послабленого тріщиною конічної форми. У даному випадку розв'язок задачі зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень. Відокремлення логарифмічного сингулярного ядра дозволило застосувати метод ортогональних поліномів для його розв'язання. Проаналізовано значення дотичних напружень конусу в залежності від розміру тріщини. Проаналізовано резонансні частоти конусу. Досліджено коефіцієнти інтенсивності напружень.

У *п'ятому розділі* розглянуто динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферично шаруватого конусу. Задачу зведено до одновимірної крайової задачі використовуючи інтегральне перетворення Г.Я. Попова. Було побудовано фундаментальну систему розв'язків для відповідного звичайного диференційного рівняння у просторі трансформант. Після задоволення умов на сферичних поверхнях конусу та умов ідеального контакту на границях шарів було побудовано лінійну алгебраїчну систему рівнянь для пошуку невідомих констант загального розв'язку одновимірної крайової задачі. Для системи було виведено ітеративний розв'язок. Отримані формули дозволили дослідити напружений стан конусу для довільної кількості шарів. Встановлено закономірності розподілу резонансних частот конусу.

У *висновках* сформульовано отримані результати та наведено основні якісні залежності хвильового поля конусу від геометричних параметрів конуса, розмірів дефекту та частоти навантаження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних тем Одеського національного

університету імені І.І. Мечникова «Статичні та динамічні задачі для тіл канонічної форми з дефектами» (2021–2024 рр., реєстраційний номер 0121U111664).

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Запропонована методика побудови розв'язків задач кручення для двічі-зрізаного конусу має теоретичну цінність для розвитку математичного апарату розв'язання осесиметричних задач теорії пружності. Отримані результати також можуть бути використані у будівництві конструкцій (наприклад основи вітряних турбін), дослідженні міцності валів, при моделюванні медичних протезів, частин сучасних апаратів (наприклад “ніс” паяльних апаратів), частин двигунів судів (в тому числі і в складі основного валу), багатьох частин сучасних автомобілів та іншої техніки, тощо.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Розуміння хвильових процесів є важливим для розвитку різних технологій, а саме електроніки та оптики, розробки радіохвильових антен, лазерів, оптичних волокон, які використовуються у комунікаціях, медицині, науці та у багатьох інших галузях. Тому актуальним залишається розробка математичних методів, що дозволяють модулювати хвильові процеси у пружних тілах. Одним з розповсюджених об'єктів в інженерній практиці є конус.

В будівництві конічні пружні тіла використовуються у каркасах будівель, мостах, або в машинобудуванні. Вони є складовими у системах підвіски автомобілів, для поглинання та розподілу сили під час руху. Дуже часто конічні пружні тіла використовуються в протезуванні ортопедичних пристроїв для підтримки тканин або кісток. Вони можуть служити для забезпечення контакту у пружних контактних затискачах, вилках, або тощо. Ці тіла перебувають у цих конструкціях під різного типу навантаженнями. Динамічне навантаження може викликати у цих тілах напруження, що є небезпечними з точки зору стабільності та стійкості цих об'єктів. Саме питання залежності напружено деформованого стану або хвильових полів від розміру тіла, місця та типу прикладеного навантаження спонукає вчених до подальших досліджень у цьому напрямку.

Загальні підходи до аналітичного розв'язання задач теорії пружності розроблено в основних класичних монографіях, які містяться в основних класичних монографіях В. М. Вігака, І. І. Воровіча, О. М. Гузя, М. Д. Коваленка, В. В. Лободи, В. Новацького, Г. Я. Попова, А. Ф. Улітка, R. D. Gregory, W. T. Koiter, P. P. Teodorescu [21, 46, 54, 31]. У подальшому ці методи вдосконалено та розвинуто у працях В. Т. Грінченка, Я. О. Жука, Г. С. Кіта, Ю. М. Коляна, Р. М. Кушніра, В. В. Мелешка, В. В. Михаськіва, Я. С. Підстригача, Ю. В. Токового, Л. А. Фільштінського [63, 34, 30]. Розв'язання задачі для конусів та інших тіл значно ускладнюється за наявності в тілі дефекту або шаруватості. Значний внесок у подолання труднощів розв'язання у цьому випадку зроблено розробками Н. Д.

Вайсфельд, О. В. Коваленко, О. Ф. Кривого, В. Д. Кубенко, М. Г. Моїсеєва, О. Г. Ніколаєва, В. І. Острика, Л. І. Слепяна, В. В. Реута, А. Є. Шевельової, М. В. Хая, J. D. Karłunov [61, 28, 45]. Сингулярні інтегральні рівняння, що виникають під час розв'язання, потребують дослідження характеру особливостей розв'язку. Ці дослідження проведено в роботах Р. В. Дудучави, М. Г. Крейна, О. В. Оніщукоа, В. Г. Попова, М. П. Саврука, З.Ю. Журавльової [55, 64].

Далі наведено короткий огляд праць присвячених розв'язанню статичних та динамічних задач для об'єктів конічної форми.

1.1. Огляд праць, що присвячено статичним задачам теорії пружності

Р. Muki та E. Stenberg [33] розв'язання задачі термопружності конусу основують на осесиметричній варіації загального розв'язку Папковича та інтегральному перетворення Мелліна. У [58] автори представили метод аналізу розповсюдження напружень на границі пів-нескінченого зрізаного пружного конусу під дією навантаження прикладеного до зрізаної поверхні за допомогою розвинення за функціями Папковича-Нейбера. Використанням методу розділення змінних, для розв'язання задачі рівноваги півнескінченного зрізаного пружного конусу з навантаженням прикладеним до зрізаної поверхні наведено у [26]. Yu. N. Nemish [42] застосував варіацію методу збудження форми границі для розв'язання тривимірної граничної осесиметричної задачі для нескінченного конусу зі збудженою боковою поверхнею. Неоднорідний розв'язок задачі про напружений стан тонкостінного двічі-зрізаного полого пружного конусу за допомогою методу прямого асимптотичного інтегрування рівнянь теорії пружності побудовано у [9]. Автори в [22] розв'язали задачу напруженого стану п'єзоелектричного конусу під дією навантаження, що прикладеного до вершини конусу з застосуванням загального розв'язку тривимірних задача для п'єзоелектричних матеріалів. За допомогою методу Галеркіна у роботі [27] було порівняно граничні значення напружень для двічі-зрізаного пружного конусу та кругового циліндру. G. Ya. Rorov в [48] вивів точний розв'язок осесиметричної мішаної задачі напруженого стану пружного полого двічі-зрізаного конусу, за допомогою нового інтегрального перетворення. Також за допомогою цього перетворення в роботі [51] було

розв'язано задачу кручення цільного двічі-зрізаного пружного конусу. В [52] за допомогою застосування інтегральних перетворення Фур'є та Меліна до рівнянь Ламе, побудовано точний розв'язок проблеми напруженого стану нескінченного зрізаного пружного конусу, за умови стискаючого тиску на конічній поверхні. Функцію Гріна для поперечно ізотропного термопружного конусу з джерелом тепла на його вершині було побудовано у [62] за допомогою гармонічних функцій загального розв'язку для поперечно ізотропних термопружних матеріалів. D. Kuryliak [29] дослідив проблему осевої симетрії E-поляризованої електромагнітної хвильової дифракції кругового конусу сконструйованого на стику ідеально електропровідного пів-нескінченного зрізаного конусу та ідеально магнетопровідного скінченного конусу. Автор використав інтегральне перетворення Конторовича-Лебедева та аналітичну процедуру регуляризації.

Набагато менше праць присвячено аналітичному дослідженню концентрації напружень у конічних тілах з дефектами. G. Popov [50], використав метод розривних розв'язань звів розв'язок задачі напруженого стану нескінченного конусу послабленого довільною кількістю радіальних тріщин до розв'язку системи одновимірних інтегро-диференціальних рівнянь.

Дослідження пружного стану шаруватих конічних тіл відображено у наступному огляді. Yu. N. Nemish у роботах [43] та [44] використав метод граничної пертурбації для розв'язання тривимірної проблеми асиметричної деформації шаруватого кругового конусу. В [25], за допомогою методу розділення змінних, розв'язано деякі граничні задачі термопружності для нескінченного полого конусу та нескінченної конічної панелі у випадку конічної шаруватості. У працях [11], [12] та [13] автори досліджують методом скінченних елементів, як різні типи впливу змінюють напружений стан двічі-зрізаного товстостінного полого конусу з функціонально градієнтних матеріалів у статисти. G. Popov, N. Vaysfel'd в [53] та [60] застосували метод інтегральних перетворень та метод матричного числення для знаходження точного розв'язку деяких задач кручення шаруватого конусу. Авторами в [20] запропоновано розв'язок лінійної проблеми для пружної трьохшарової конічної оболонки під комбінованою дією декількох зовнішніх

навантажень. Для задачі навантаженого стану товстостінної двічі-зрізаної конічної шаруватої дисковими поверхнями оболонки у [41] було порівняно розв'язки знайдені методом узгоджених асимптотичних розкладів та методом скінченних елементів. В [57] стійкість багат шарових конічних оболонок під дією рівномірного зовнішнього навантаження проаналізовано за допомогою методу Галеркіна та розкладання на ряди Фур'є.

Серед оглянутих праць, задачі, що поставлено для конусів зрізаних сферичними поверхнями розв'язано у [9, 48, 51, 25, 60].

1.2. Динамічні задачі теорії пружності для об'єктів конічної форми

Потрібно відмітити, що у порівнянні з працями, що присвячено дослідженню пружних конусів у статичній постановці, робіт, де досліджено хвильові поля, набагато менше

У [32] досліджено хвильове поле зрізаного пів-нескінченного конусу під дією кручення. У [54] розв'язано задачу про сталі коливання пружного нескінченного конусу під дією навантаження прикладеного до вістря конусу. Задача була розв'язана використовуючи допоміжну задачу для хвильових функцій, метод інтегральних перетворень та метод функції Гріна. У праці [24] знайдено нестационарне хвильове поле для пружного зрізаного сферичними поверхнями скінченного конусу з ненульовою власною вагою. Задачу сформульовано за допомогою апарату хвильових функцій та розв'язано методом інтегральних перетворень.

Нестационарну концентрацію напружень у нескінченному пружному конусі досліджено у [59] за допомогою застосування методу інтегральних перетворень. Це звело задачу до розв'язку одновимірного інтегро-диференціального рівняння з невідомим стрибком переміщень в просторі Лапласа. Отримане рівняння було розв'язано методом дискретизації рівняння за часом та методом ортогональних поліномів.

Шаруваті та функціонально градієнтні матеріали, їх вплив на стан хвильових полів досліджено у [17] де використано нову модель, згідно якої об'ємна частка двох екстремально різних матеріалів у кожному шарі змінюється для аналізу

динамічної поведінки обертання конічного полого валу. У [10] наведено аналіз хвильових полів функціонально градуйованого товстого полого зрізаного конусу скінченної довжини під дією внутрішнього навантаження методом скінченних елементів та методом прямого інтегрування Ньюмарка. Аналітично числову процедуру запропоновано у [56] для розв'язання проблем вібрації шаруватих тіл обертання за довільних комбінаціях граничних умов. Процедура використовує методи модифікованого варіаційного принципу комбінованого з методом найменших квадратичних залишків й приводить до розв'язку у формі мішаних рядів базисних функцій. У праці [23] досліджується вільна вібрація двох з'єднаних шаруватих конічних оболонок та отримано аналітичний розв'язок у вигляді степеневих рядів.

Огляд робіт, їх кількість та різноманітність методів розв'язання задач підтверджують актуальність обраної теми. Широке застосування об'єктів конічної форми у різних галузях виробництва та інженерії спонукає до розв'язання нових за постановкою задач. Огляд показав, що у літературі відсутні задачі, що присвячені дослідженню хвильових полів двічі-зрізаних сферичними поверхнями конусів послаблених дефектами (тріщинами та тонкими жорсткими включеннями) різної форми. Дослідженню вказаних задач присвячено дисертаційну роботу.

РОЗДІЛ 2.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО ДЕФЕКТОМ

В даному розділі міститься опис аналітичного апарату, що застосовано для побудови розв'язку динамічної задачі для двічі-зрізаного пружного конусу, коли момент кручення прикладено до нижньої сферичної поверхні через абсолютно жорстку накладку, при наявності дефектів сферичної та конічної форми. Для розв'язання поставлених задач побудовано окремо неперервний розв'язок динамічної задачі кручення двічі-зрізаного конусу та розривний розв'язок динамічного рівняння кручення для дефектів конічної та сферичної форми. Пошук неперервного розв'язку проведено з використанням інтегрального перетворення Г.Я. Попова [59]. Для знаходження розривного розв'язку було застосовано інтегральне перетворення Лежандра безпосередньо до рівняння кручення.

Результати розділу викладено у роботах [6, 36, 37, 38, 40], а також в тезах конференцій [1, 3, 5, 35, 39].

2.1. Постановка вихідної динамічної задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу послабленого дефектом

Розглянуто пружний двічі-зрізаний конус (Рис. 2.1) (G – модуль пружності, ρ – густина), який займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями $a_0 \leq r \leq a_1, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$.

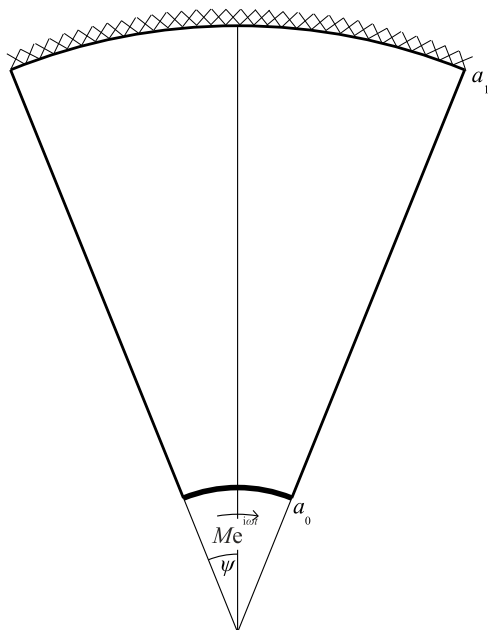


Рис. 2.1. Геометрія двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу

До конусу по нижній сферичній поверхні $r = a_0, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ прикладено крутильний момент через абсолютно жорстку накладку

$$w(r, \theta, \varphi, t)|_{r=a_0} = \alpha(t)lF(\theta), \quad (2.1)$$

де $w(r, \theta, \varphi, t) = u_\varphi(r, \theta, \varphi, t)$, $l = a_1 - a_0$, $F(\theta)$ – довільна відома неперервна функція та $\alpha(t)$ – невідомий кут повороту конусу, який знаходиться з рівняння руху накладки [51]

$$\int_{-\pi-\psi}^{\pi} \int_{-\psi}^{\psi} a_0^3 \sin^2 \theta \tau(r, \theta, \varphi, t)|_{r=a_0} d\theta d\varphi + M(t) - \alpha''(t)J = 0, \quad (2.2)$$

де $\tau(r, \theta, \varphi, t) = \tau_{r\varphi}(r, \theta, \varphi, t) = G \left(\frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} - r^{-1}w(r, \theta, \varphi, t) \right)$, $M(t)$ – крутильний момент прикладений до накладки, J – момент інерції руху накладки.

Верхня сферична поверхня $r = a_1, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ закріплена

$$w(r, \theta, \varphi, t)|_{r=a_1} = 0. \quad (2.3)$$

Бокова поверхня конуса $a_0 \leq r \leq a_1, \theta = \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ вільна від напруження

$$\bar{\tau}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\theta=\psi} = Gr^{-1} \left(\frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} - w(r, \theta, \varphi, t) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\psi} = 0, \quad (2.4)$$

де $\bar{\tau}(r, \theta, \varphi, t) = \tau_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi, t)$.

Конус послаблений одним з двох типів дефектів:

Сферичний дефект $r = R, -\gamma \leq \theta \leq \gamma, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ характеризується невідомими стрибками переміщень та їх похідних записаними у наступному вигляді

$$\left\langle w(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=R} \right\rangle = w(R-0, \theta, \varphi, t) - w(R+0, \theta, \varphi, t) = \xi_1(\theta, \varphi, t) \quad (2.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} \right\rangle = \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=R-0} - \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \xi_2(\theta, \varphi, t). \quad (2.6)$$

Конічний дефект $R_0 \leq r \leq R_1, \theta = \pm\gamma, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ характеризується невідомими стрибками переміщень та їх похідних записаними у наступному вигляді

$$\left\langle w(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\theta=\gamma} \right\rangle = w(r, \gamma-0, \varphi, t) - w(r, \gamma+0, \varphi, t) = \xi_1(r, \varphi, t) \quad (2.7)$$

$$\left\langle \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma} \right\rangle = \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} - \frac{\partial w(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} = \xi_2(r, \varphi, t). \quad (2.8)$$

Для розв'язання проблеми треба знайти невідоме переміщення, що задовольняють умовам на поверхнях конуса (2.1)-(2.4), та рівнянню кручення при нульових початкових умовах, а також невідомі стрибки (2.5) або (2.6) у випадку наявності сферичного дефекту та (2.7) або (2.8) у випадку наявності конічного дефекту.

Конус розглянуто за умов усталених коливань, тобто усі механічні характеристики конусу було представлено у вигляді

$$f(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\omega t} f(r, \theta, \varphi), \quad (2.9)$$

де ω – частота усталених коливань. Далі множник $e^{i\omega t}$ опущено у всіх формулах. Зображена в роботі методологія розглянута у випадку осесиметричних задач, коли

кручення конусу проходить вздовж зміни куту φ , таким чином переміщення та напруження не змінюються при зміні цього куту. В наступних формулах його опущено. Також враховуючи граничні умови та те що кут θ змінюється на інтервалі $-\psi \leq \theta \leq \psi$ задачу розв'язано на половині інтервалу $0 \leq \theta \leq \psi$, бо на іншу можна продовжити за симетрією.

Таким чином враховуючи вищезазначене, можемо переписати задачу у наступному вигляді:

Рівняння кручення

$$\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{(\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet)'^\bullet}{\sin \theta} - \frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = -r^2 q^2 w(r, \theta), \quad (2.10)$$

$$a_0 \leq r \leq a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$$

де $(w(r, \theta))^\bullet = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta}$, $(w(x, y))' = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r}$, $c = \sqrt{G / \rho}$ – швидкість поперечних

хвиль та $q = \frac{\omega}{c}$ – хвильове число.

Граничні умови

$$w(r, \theta)|_{r=a_0} = \alpha l F(\theta), 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.11)$$

$$w(r, \theta)|_{r=a_1} = 0, 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.12)$$

$$Gr^{-1} \left(\frac{w(r, \theta)}{\partial \theta} - w(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\psi} = 0, a_0 \leq r \leq a_1, \quad (2.13)$$

де кут α знаходиться з рівняння

$$2\pi a_0^3 \int_0^\psi \sin^2 \theta (\tau(r, \theta))|_{r=a_0} d\theta + M + \omega^2 \alpha J = 0. \quad (2.14)$$

Стрибки переміщень та їх похідних при проходженні через дефект:

Сферичний дефект $r = R, 0 \leq \theta \leq \gamma$ має невідомі стрибки записані у наступному вигляді

$$\langle w(r, \theta)|_{r=R} \rangle = w(R-0, \theta) - w(R+0, \theta) = \xi_1(\theta), 0 \leq \theta \leq \gamma \quad (2.15)$$

$$\left\langle \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R} \right\rangle = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R-0} - \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=R+0} = \xi_2(\theta), 0 \leq \theta \leq \gamma. \quad (2.16)$$

Конічний дефект $R_0 \leq r \leq R_1, \theta = \gamma$ має невідомі стрибки записані у наступному вигляді

$$\left\langle w(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma} \right\rangle = w(r, \gamma-0) - w(r, \gamma+0) = \xi_1(r), R_0 \leq r \leq R_1 \quad (2.17)$$

$$\left\langle \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma} \right\rangle = \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma-0} - \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\gamma+0} = \xi_2(r), R_0 \leq r \leq R_1. \quad (2.18)$$

Загальний розв'язок вихідної задачі, а саме єдине ненульове переміщення $w(r, \theta)$ відшукано у вигляді суперпозиції неперервного та розривного розв'язків

$$w(r, \theta) = w^1(r, \theta) + w^2(r, \theta), \quad (2.19)$$

де $w^1(r, \theta)$ задовольняє крайовим умовам (2.11)-(2.13) та рівнянню кручення (2.10), а $w^2(r, \theta)$ задовольняє рівнянню кручення (2.10) та використовується для знаходження невідомих стрибків (2.15) та (2.16) або (2.17) та (2.18), в залежності від форми дефекту.

При відомих $w^1(r, \theta)$ та $w^2(r, \theta)$ ненульові напруження знаходяться за формулами

$$\tau^i(r, \theta) = \tau_{r\varphi}^i(r, \theta) = G \left(\frac{\partial w^i(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w^i(r, \theta) \right), i = 1, 2 \quad (2.20)$$

$$\bar{\tau}^i(r, \theta) = \tau_{\theta\varphi}^i(r, \theta) = Gr^{-1} \left(\frac{\partial w^i(r, \theta)}{\partial \theta} - w^i(r, \theta) \cot \theta \right), i = 1, 2. \quad (2.21)$$

Це дозволяє записати напруження вихідної задачі у вигляді

$$\tau(r, \theta) = \tau^1(r, \theta) + \tau^2(r, \theta) \quad (2.22)$$

$$\bar{\tau}(r, \theta) = \bar{\tau}^1(r, \theta) + \bar{\tau}^2(r, \theta). \quad (2.23)$$

Завдяки напруженню (2.22) та рівнянню (2.14) знайдено кут отвору α .

Треба зазначити, що розглянутий в роботі метод може бути використаний, як у загальному динамічному випадку з використання інтегрального перетворення

Фур'є замість заміни $f(r, \theta, \varphi, t) = e^{i\alpha t} f(r, \theta, \varphi)$, так і при інших граничних умовах кручення. Приклад використання наведеної в роботі методики у випадку, коли кручення проведено через прикладання крутильного навантаження до бокової поверхні конуса, розглянуто в роботі [40] та в тезах конференцій [1, 3, 39].

2.2. Загальна схема побудови розв'язку динамічної задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу

В цьому підрозділі було знайдено неперервний розв'язок $w^1(r, \theta)$ задачі кручення двічі-зрізаного пружного конусу. Для спрощення запису формул верхній індекс опущено, тобто у наступних формулах підрозділу маємо $w(r, \theta) = w^1(r, \theta)$.

Враховуючи (2.10)-(2.13) динамічна задача кручення двічі-зрізаного пружного конусу має вигляд

$$\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{\left(\sin \theta (w(r, \theta))' \right)' \cdot}{\sin \theta} - \frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = -r^2 q^2 w(r, \theta) \quad (2.24)$$

$$a_0 \leq r \leq a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$$

$$w(r, \theta)|_{r=a_0} = \alpha l F(\theta), 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.25)$$

$$w(r, \theta)|_{r=a_1} = 0, 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.26)$$

$$Gr^{-1} \left(\frac{w(r, \theta)}{\partial \theta} - w(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\psi} = 0, a_0 \leq r \leq a_1. \quad (2.27)$$

Задачу зведено до одновимірної крайової задачі шляхом застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова [59] за змінною θ до рівнянь кручення (2.24) та крайових умов (2.25) та (2.26)

$$w_k(r) = \int_0^\psi \sin \theta w(r, \theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta$$

$$w(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k(r) P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}, \quad (2.28)$$

де $P_v^m(x)$ – приєднані поліноми Лежандра [14], а $\|P_v^m(x)\|^2$ це норма приєднаних поліномів Лежандра.

Застосуємо пряме інтегральне перетворення з (2.28) до рівняння (2.24). Перенесемо праву частину рівняння (2.24) в ліву, помножимо її на $\sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta)$ та інтегруємо за змінною θ на сегменті $0 \leq \theta \leq \psi$

$$\int_0^\psi \sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) \left(\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{(\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet)^\bullet}{\sin \theta} \right) d\theta + \int_0^\psi \sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) \left(-\frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} + r^2 q^2 w(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.29)$$

Інтегруємо другий доданок в (2.29) по частинам двічі, та отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\psi P_{v_k}^1(\cos \theta) (\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet)^\bullet d\theta = \\ & = \left(\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet P_{v_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w(r, \theta) (P_{v_k}^1(\cos \theta))^\bullet \right)_{\theta=\psi} + \\ & + \int_0^\psi w(r, \theta) (\sin \theta (P_{v_k}^1(\cos \theta))^\bullet)^\bullet d\theta \end{aligned} \quad (2.30)$$

В першому доданку в (2.29) вносимо інтегрування під похідну та отримуємо

$$\int_0^\psi \sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) \left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' d\theta = \left(r^2 (w_k(r))' \right)'$$

Таким чином (2.29) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & \left(r^2 (w_k(r))' \right)' + \left(\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet P_{v_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w(r, \theta) (P_{v_k}^1(\cos \theta))^\bullet \right)_{\theta=\psi} + \\ & + \int_0^\psi \left(\frac{(\sin \theta (P_{v_k}^1(\cos \theta))^\bullet)^\bullet}{\sin \theta} - \frac{P_{v_k}^1(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} + P_{v_k}^1(\cos \theta) r^2 q^2 \right) \sin \theta w(r, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

Після додавання та віднімання $\nu_k (\nu_k + 1) P_{\nu_k}^1 (\cos \theta) \sin \theta w(r, \theta)$ під інтегралом у виразі (2.31) та врахування узагальненого рівняння Лежандра в полярній формі [14]

$$\frac{\left(\sin \theta \left(P_{\nu}^m (\cos \theta)\right)^{\bullet}\right)^{\bullet}}{\sin \theta} + \left(\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right) P_{\nu}^m (\cos \theta) = 0 \quad (2.32)$$

отримаємо

$$\left(r^2 (w_k(r))'\right)' + \left(\sin \theta (w(r, \theta))^{\bullet} P_{\nu_k}^1 (\cos \theta) - \sin \theta w(r, \theta) \left(P_{\nu_k}^1 (\cos \theta)\right)^{\bullet}\right)_{\theta=\psi} + \\ + (r^2 q^2 - \nu_k (\nu_k + 1)) w_k(r)$$

Таким чином рівняння (2.24) перетвориться на

$$\left(r^2 (w_k(r))'\right)' + (r^2 q^2 - \nu_k (\nu_k + 1)) w_k(r) = \\ = - \left(\sin \theta (w(r, \theta))^{\bullet} P_{\nu_k}^1 (\cos \theta) - \sin \theta w(r, \theta) \left(P_{\nu_k}^1 (\cos \theta)\right)^{\bullet}\right)_{\theta=\psi}$$

Прийняв до уваги граничну умову (2.27) виконаємо підстановку у правій частині

$$(w(r, \theta))^{\bullet} \Big|_{\theta=\psi} = w(r, \theta) \cot \theta$$

та матимемо

$$\left(r^2 (w_k(r))'\right)' + (r^2 q^2 - \nu_k (\nu_k + 1)) w_k(r) = \\ = - \sin \psi w(r, \psi) \left(\cot \theta P_{\nu_k}^1 (\cos \theta) - \left(P_{\nu_k}^1 (\cos \theta)\right)^{\bullet}\right)_{\theta=\psi}$$

Коефіцієнти інтегрального перетворення Попова ν_k обрано так, щоб задовольнялось трансцендентне рівняння [59]

$$\cot \psi P_{\nu_k}^1 (\cos \psi) - \left(\frac{\partial P_{\nu_k}^1 (\cos \theta)}{\partial \theta}\right) \Big|_{\theta=\psi} = 0 \quad (2.33)$$

Таким чином можемо записати одновимірну крайову задачу у просторі трансформант

$$\left(r^2 (w_k(r))' \right)' + \left(r^2 q^2 - \nu_k (\nu_k + 1) \right) w_k(r) = 0, \quad a_0 \leq r \leq a_1 \quad (2.34)$$

$$w_k(r) \Big|_{r=a_0} = \alpha F_k, \quad 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.35)$$

$$w_k(r) \Big|_{r=a_1} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \psi \quad (2.36)$$

де $F_k = \int_0^\psi \sin \theta F(\theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta$.

Розв'язок векторної одновимірної крайової задачі відшукується за допомогою апарату базисної системи розв'язків [65].

Для початку, у рівнянні (2.34) проведено заміну

$$w_k(r) = r^{-\frac{1}{2}} \tilde{w}_k(r),$$

після якої рівняння кручення у просторі трансформант (2.34) зведено до рівняння Бесселя

$$r \left(r (w_k(r))' \right)' + \left(r^2 q^2 - \left(\nu_k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) w_k(r) = 0, \quad a_0 \leq r \leq a_1$$

З огляду на зроблену заміну та на загальновідомі розв'язки рівняння Бесселя [15] маємо фундаментальну систему розв'язків $\{ {}_1\Phi_k(r), {}_2\Phi_k(r) \}$ рівняння (2.34) у вигляді

$${}_1\Phi_k(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_{\nu_k+1/2}(qr)$$

$${}_2\Phi_k(r) = r^{-\frac{1}{2}} Y_{\nu_k+1/2}(qr)$$

де $J_k(x)$ та $Y_k(x)$ функції Бесселя першого та другого роду відповідно.

Загальний розв'язок задачі (2.34)-(2.36) побудовано у формі [65]

$$w_k(r) = {}_1\Psi_k(r) {}_1C_k + {}_2\Psi_k(r) {}_2C_k \quad (2.37)$$

де ${}_1C_k = \alpha l F_k$, ${}_2C_k = 0$ – праві частини граничних умов (2.35) й (2.36) відповідно та $\{ {}_1\Psi_k(r), {}_2\Psi_k(r) \}$ – базисна система розв’язків. Функції ${}_m\Psi_k(r)$, $m=1,2$ повинні задовольняти наступним крайовим задачам

$$\left(r^2 ({}_m\Psi_k(r))' \right)' + (r^2 q^2 - \nu_k(\nu_k + 1)) {}_m\Psi_k(r) = 0, \quad i=1,2, m=1,2, a_0 \leq r \leq a_1 \quad (2.38),$$

$$U_i [{}_m\Psi_k(r)] = \delta_{im}$$

де $\delta_{im}^{(j)}$ – символ Кронекера та

$$U_i [{}_m\Psi_k(r)] = {}_m\Psi_k(a_{i-1}), \quad i=1,2.$$

Розв’язки диференціальних рівнянь в задачах (2.38) мають вигляд

$${}_m\Psi_k(r) = {}_1C_{m1}\Phi_k(r) + {}_2C_{m2}\Phi_k(r), \quad m=1,2 \quad (2.39)$$

Після підстановки до розв’язків до граничних умов маємо систему

$$\begin{cases} {}_1C_{m1}\Phi_k(a_0) + {}_2C_{m2}\Phi_k(a_0) = \delta_{1m} \\ {}_1C_{m1}\Phi_k(a_1) + {}_2C_{m2}\Phi_k(a_1) = \delta_{2m} \end{cases},$$

в якій за методом Крамера отримаємо

$${}_1C_m = \frac{\delta_{1m2}\Phi_k(a_1) - \delta_{2m2}\Phi_k(a_0)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)}, \quad m=1,2.$$

$${}_2C_m = \frac{\delta_{2m1}\Phi_k(a_0) - \delta_{1m1}\Phi_k(a_1)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)}$$

Тоді базисна система розв’язків (2.39) матиме вигляд

$${}_m\Psi_k(r) = \frac{\delta_{1m2}\Phi_k(a_1) - \delta_{2m2}\Phi_k(a_0)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)} {}_1\Phi_k(r) +$$

$$+ \frac{\delta_{2m1}\Phi_k(a_0) - \delta_{1m1}\Phi_k(a_1)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)} {}_2\Phi_k(r), \quad m=1,2$$

Остаточно отримано базисну систему розв’язків $\{ {}_1\Psi_k(r), {}_2\Psi_k(r) \}$ у вигляді

$${}_1\Psi_k(r) = \frac{{}_1\Phi_k(r){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(r)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)}$$

$${}_2\Psi_k(r) = \frac{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(r) - {}_1\Phi_k(r){}_2\Phi_k(a_0)}{{}_1\Phi_k(a_0){}_2\Phi_k(a_1) - {}_1\Phi_k(a_1){}_2\Phi_k(a_0)}.$$

Загальний розв'язок (2.37) вихідної задачі у просторі трансформант знайдено у вигляді

$$w_k(r) = \alpha l F_{k1} \Psi_k(r).$$

Після застосування до нього оберненого інтегрального перетворення (2.28) маємо

$$w(r, \theta) = \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} {}_1\Psi_k(r). \quad (2.40)$$

Знайдений розв'язок (2.40) можна одразу підставити до (2.14) для знаходження невідомого куту повороту α .

Треба зауважити, що у випадку наявності дефекту кут повороту α може бути знайдено з рівняння (2.14) при відомому розривному розв'язку $w^2(r, \theta)$, тому його знаходження більш докладніше буде описано у Розділах 3-4.

Підсумовуючи Підрозділ 2.3, треба зазначити, що у випадку коли рівняння кручення (2.24) є неоднорідним, як це є у разі кручення конусу прикладаючи навантаження до бокової поверхні у [40]. В цьому випадку, загальний розв'язок (2.34)-(2.36) одновимірної крайової задачі знаходиться у вигляді

$$w_k(r) = \Psi_{1k}(r)C_{1k} + \Psi_{2k}(r)C_{2k} + \int_{a_0}^{a_1} G_k(r, \xi) F_k(r) d\xi,$$

де $F_k(r)$ – ненульова права частина неоднорідного рівняння кручення у просторі трансформант, а $G_k(r, \xi)$ – функція Гріна у просторі трансформант. Знаючи базисні розв'язки однорідного рівняння, функція Гріна у симетричній формі знаходиться в наступному вигляді

$$G_{\nu_k}(r, \xi) = \begin{cases} c_{11}(\xi)\Psi_{1k}(r) + c_{12}(\xi)\Psi_{2k}(r), & a_0 \leq r < \xi \\ c_{21}(\xi)\Psi_{1k}(r) + c_{22}(\xi)\Psi_{2k}(r), & \xi < r \leq a_1 \end{cases},$$

де невідомі константи знаходяться з чотирьох визначаючих властивостей функцій Гріна [65].

2.3. Побудова розривного розв'язку динамічного рівняння кручення для дефектів сферичної та конічної форми

В цьому підрозділі знайдено розривний розв'язок $w^2(r, \theta)$ для дефектів сферичної та конічної форми. Для спрощення запису формул верхній індекс опущено, тобто у всіх наступних формулах підрозділу маємо $w(r, \theta) = w^2(r, \theta)$.

2.3.1. Дефект сферичної форми

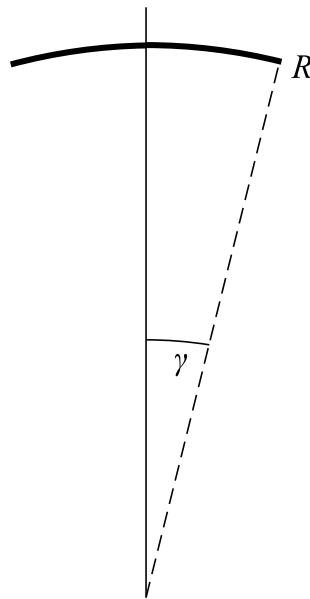


Рис. 2.2. Геометрія сферичного дефекту

Сферичний дефект, який описано в сферичній системі координат співвідношеннями $r = R, 0 \leq \theta \leq \gamma$ (Рис. 2.2), розглянуто у просторі $0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Розривний розв'язок $w(r, \theta)$ задовольняє рівнянню кручення (2.10) у просторі $r = R, 0 \leq \theta \leq \gamma, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$, тобто

$$\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{(\sin \theta (w(r, \theta))')^2}{\sin \theta} - \frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = -r^2 q^2 w(r, \theta). \quad (2.41)$$

$$0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Для пошуку неперервного розв'язку застосовано пряме інтегральне перетворення Лежандра [49] в полярній формі за змінною θ

$$w_k(r) = \int_0^\pi \sin \theta w(r, \theta) P_k^1(\cos \theta) d\theta$$

$$w(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!} w_k(r) P_k^1(\cos \theta),$$
(2.42)

безпосередньо до рівняння кручення (2.41)

Перенесемо праву частину рівняння (2.41) в ліву, помножимо рівняння на $\sin \theta P_k^1(\cos \theta)$ та інтегруємо за змінною θ на сегменті $0 \leq \theta \leq \pi$.

$$\int_0^\pi \sin \theta P_k^1(\cos \theta) \left(\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{(\sin \theta (w(r, \theta)))^\bullet}{\sin \theta} \right) d\theta +$$

$$\int_0^\pi \sin \theta P_k^1(\cos \theta) \left(-\frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} + r^2 q^2 w(r, \theta) \right) d\theta$$
(2.43)

Інтегруємо другий доданок в (2.43) по частинам та отримаємо

$$\int_0^\pi P_k^1(\cos \theta) (\sin \theta (w(r, \theta)))^\bullet d\theta = \int_0^\pi w(r, \theta) (\sin \theta (P_k^1(\cos \theta)))^\bullet d\theta +$$

$$+ \left(\sin \theta (w(r, \theta))^\bullet P_k^1(\cos \theta) - \sin \theta w(r, \theta) (P_k^1(\cos \theta))^\bullet \right) \Big|_0^\pi,$$

де неінтегральні доданки дорівнюють нулю. У першому доданку з (2.43) вносимо інтегрування під похідну та отримаємо

$$\int_0^\pi \sin \theta P_k^1(\cos \theta) \left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' d\theta = \left(r^2 (w_k(r))' \right)'$$

Таким чином (2.43) прийме вигляд

$$\left(r^2 (w_k(r))' \right)' + \int_0^\pi \left(\frac{(\sin \theta (P_k^1(\cos \theta)))^\bullet}{\sin \theta} - \frac{P_k^1(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} + P_k^1(\cos \theta) r^2 q^2 \right) \sin \theta w(r, \theta) d\theta$$
(2.44)

Приймаємо до уваги вигляд узагальненого рівняння Лежандра в полярній формі (2.32) та додаємо та віднімаємо у (2.44) від виразу під інтегралом $k(k+1)P_k^1(\cos \theta)$ та отримаємо

$$\left(r^2 (w_k(r))' \right)' + (r^2 q^2 - k(k+1)) w_k(r)$$

Остаточно після інтегрування рівняння (2.41) прийме вигляд

$$\left(r^2 (w_k(r))' \right)' + (r^2 q^2 - k(k+1)) w_k(r) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (2.45)$$

Далі до (2.45) застосовано інтегральне перетворення Ханкеля за змінною r

$$w_{k\alpha} = \int_0^\infty r I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) w_k(r) dr \quad (2.46)$$

$$w_k(r) = (-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) w_{k\alpha} d\alpha$$

за узагальненою схемою [49]. Для початку, у рівнянні (2.45) зробимо заміну

$$w_k(r) = w_k(r) r^{\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

та отримаємо

$$r \left(r (w_k(r))' \right)' + \left(r^2 q^2 - \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) w_k(r) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (2.48)$$

Помножимо рівняння (2.48) на $\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r)}{r}$ та застосуємо пряме інтегральне

перетворення з (2.46) за узагальненою схемою й матимемо

$$\int_0^\infty I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left(\left(r (w_k(r))' \right)' + \left(r q^2 - r^{-1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) w_k(r) \right) dr. \quad (2.49)$$

Інтегруємо двічі по частинам перший доданок в (2.49)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left(r (w_k(r))' \right)' dr &= \int_0^{R-0} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left(r (w_k(r))' \right)' dr + \int_{R+0}^\infty I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left(r (w_k(r))' \right)' dr = \\ &= F_k - \int_0^\infty w_k(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) dr \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
F_k &= \left(r(w_k(r))' I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) + r w_k(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) \Big|_{r=0}^{r=R-0} + \\
&+ \left(r(w_k(r))' I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) + r w_k(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) \Big|_{r=R+0}^{r=\infty} = \\
&= R \left(\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right) \right\rangle_{\eta=R} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha R) - \langle w_k(R) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta) \right) \Big|_{\eta=R} \right)
\end{aligned}$$

Таким чином, отримаємо рівняння

$$\int_0^{\infty} w_k(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) + \left(r q^2 - r^{-1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) dr + F_k \quad (2.50)$$

В підінтегральній частині рівняння (2.50) додаємо та віднімаємо

$\left(r \alpha^2 I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) w_k(r)$ й отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{w_k(r)}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) - \left(r^2 \alpha^2 + \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) dr + \\
&+ (q^2 + \alpha^2) \int_0^{\infty} w_k(r) r I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) dr + F_k
\end{aligned}$$

В першому рівнянні маємо модифіковане рівняння Бесселя до якого підставлено один з його розв'язків, тому воно дорівнює нулеві. Таким чином рівняння (2.45) остаточно в просторі трансформант приймає вигляд

$$(q^2 + \alpha^2) w_{k\alpha} + R \left(\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right) \right\rangle_{\eta=R} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha R) - \langle w_k(R) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta) \right) \Big|_{\eta=R} \right) = 0$$

й з нього легко знаходиться розв'язок

$$w_{k\alpha} = - \frac{R \left(\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right) \right\rangle_{\eta=R} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha R) - \langle w_k(R) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta) \right) \Big|_{\eta=R} \right)}{\alpha^2 + q^2}.$$

Застосуємо до нього обернене інтегральне перетворення з (2.46) та отримаємо

$$w_k(r) = R \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right)_{\eta=R} \right\rangle \left(-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha \right)_{\eta=R} -$$

$$-R \left\langle w_k(R) \right\rangle \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha \right)_{\eta=R}.$$

В Додатку А детально приведено пошук наступного інтегралу

$$-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha = \frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(r q), r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(r q) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), r < \eta \end{cases}, \quad (2.51)$$

де $H_k(x)$ – перша функція Ханкеля.

З огляду на формулу (2.51), проведени раніше заміну (2.47) та значення наступних похідних

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\eta} \frac{\pi i}{2\sqrt{\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(r q), r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(r q) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), r < \eta \end{cases} \right) \right)_{\eta=R} =$$

$$\frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(r q), r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(r q) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), r < \eta \end{cases} \right)_{\eta=R} +$$

$$+ R^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(r q), r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(r q) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), r < \eta \end{cases} \right) \right)_{\eta=R}$$

й

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{\frac{1}{2}} w_k(\eta) \right) \right)_{\eta=R} \right\rangle = \left(\frac{\partial \left(r^{\frac{1}{2}} w_k(\eta) \right)}{\partial \eta} \right)_{\eta=R-0} - \left(\frac{\partial \left(r^{\frac{1}{2}} w_k(\eta) \right)}{\partial \eta} \right)_{\eta=R+0} =$$

$$= \frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} \langle w_k(R) \rangle + R^{\frac{1}{2}} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right)_{\eta=R} \right\rangle$$

маємо розв'язок у просторі трансформант Лежандра у вигляді

$$w_k(r) = R \left(\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} \langle w_k(R) \rangle + R^{\frac{1}{2}} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right)_{\eta=R} \right\rangle \right) R^{\frac{1}{2}} (\Gamma_{q,k}(r, \eta))_{\eta=R} - \\ - R^{\frac{1}{2}} \langle w_k(R) \rangle \left(\frac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{q,k}(r, \eta) + R^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) \right)_{\eta=R} \end{array} \right),$$

де

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq), & r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), & r < \eta \end{cases}.$$

Остаточно, після скорочення перших доданків у кожній скобці, матимемо

$$w_k(r) = R^2 \left(\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} w_k(\eta) \right)_{\eta=R} \right\rangle (\Gamma_{q,k}(r, \eta))_{\eta=R} - \langle w_k(R) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) \right)_{\eta=R} \right) \quad (2.52)$$

де $H_k(x)$ – перша функція Ханкеля.

До отриманого розв'язку (2.52) у просторі трансформант застосовано обернене перетворення Лежандра (2.42), з урахуванням позначення стрибків переміщення (2.15) та його похідної (2.16). Після обернення отримано розв'язок рівняння кручення (2.41) в оригінальному просторі у вигляді

$$w(r, \theta) = R^2 \int_0^\gamma \xi_2(\tau) \sin \tau (K_q(\theta, \tau; r, \eta))_{\eta=R} d\tau - \\ - R^2 \int_0^\gamma \xi_1(\tau) \sin \tau \left(\frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\eta=R} d\tau, \quad (2.53)$$

де

$$K_q(\theta, \tau; r, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^1(\cos \theta) P_k^1(\cos \tau), \quad \sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq), & r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), & r < \eta \end{cases}$$

Невідомі стрибки $\xi_1(\theta)$ та $\xi_2(\theta)$ знаходяться у Розділі 3 після деталізації типу дефекту.

2.3.2. Дефект конічної форми

Конічний дефект, який описано в сферичній системі координат співвідношеннями $R_0 \leq r \leq R_1, \theta = \pm\gamma$ (Рис. 2.3), розглянуто у просторі $0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$.

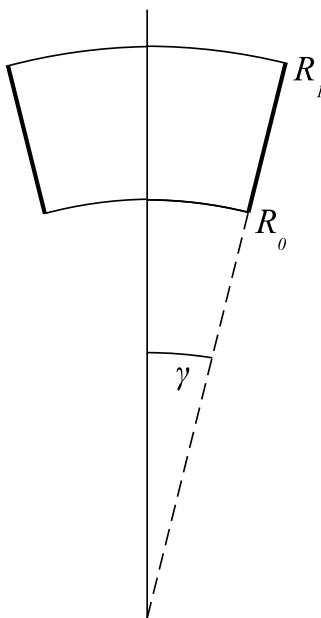


Рис. 2.3. Геометрія конічного дефекту

Розривний розв'язок, як і у випадку сферичного дефекту, задовольняє рівнянню кручення (2.41). Для пошуку недеревного розв'язку застосовано пряме інтегральне перетворення Лежандра в полярній формі (2.42) за змінною θ за узагальненою схемою [49] до рівняння (2.41).

Перенесемо праву частину рівняння (2.41) в ліву, помножимо рівняння на $\sin \theta P_k^1(\cos \theta)$ та інтегруємо за змінною θ на сегменті $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta P_k^1(\cos \theta) \left(\left(r^2 (w(r, \theta))' \right)' + \frac{(\sin \theta (w(r, \theta)))''}{\sin \theta} \right) d\theta + \int_0^{\pi} \sin \theta P_k^1(\cos \theta) \left(-\frac{w(r, \theta)}{\sin^2 \theta} + r^2 q^2 w(r, \theta) \right) d\theta \quad (2.54)$$

Інтегруємо другий доданок у (2.54) за узагальненою схемою по частинам двічі, урахувавши що при переході через $\theta = \gamma$ трапляється стрибок переміщення та його похідної

$$\int_0^{\pi} P_k^1(\cos\theta) \left(\sin\theta(w(r,\theta)) \right)' d\theta = \int_0^{\gamma-0} P_k^1(\cos\theta) \left(\sin\theta(w(r,\theta)) \right)' d\theta + \\ + \int_{\gamma+0}^{\pi} P_k^1(\cos\theta) \left(\sin\theta(w(r,\theta)) \right)' d\theta = F_k(r) + \int_0^{\pi} w(r,\theta) \left(\sin\theta(P_k^1(\cos\theta)) \right)' d\theta,$$

де

$$F(r) = \left(\sin\theta(w(r,\theta)) P_k^1(\cos\theta) - \sin\theta w(r,\theta) (P_k^1(\cos\theta))' \right) \Big|_{\theta=\gamma+0}^{\theta=\gamma-0} = \\ = \sin\gamma \left(P_k^1(\cos\gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial\tau} w(r,\tau) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P_k^1(\cos\tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(r,\gamma) \rangle \right).$$

З огляду на позначення для стрибків переміщення (2.17) та його похідної (2.18), маємо $F_k(r)$ у вигляді

$$F_k(r) = \sin\gamma \left(P_k^1(\cos\gamma) \xi_2(r) - \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P_k^1(\cos\tau) \right)_{\tau=\gamma} \xi_1(r) \right).$$

У першому доданку з (2.54) вносимо інтегрування під похідну та отримаємо

$$\int_0^{\pi} \sin\theta P_k^1(\cos\theta) \left(r^2(w(r,\theta))' \right)' d\theta = \left(r^2(w_k(r))' \right)'$$

Таким чином (2.54) прийме вигляд

$$\left(r^2(w_k(r))' \right)' + \sin\gamma \left(P_k^1(\cos\gamma) \xi_2(r) - \left(\frac{\partial}{\partial\tau} P_k^1(\cos\tau) \right)_{\tau=\gamma} \xi_1(r) \right) + \\ + \int_0^{\pi} \left(\frac{\left(\sin\theta(P_k^1(\cos\theta))' \right)' }{\sin\theta} - \frac{P_k^1(\cos\theta)}{\sin^2\theta} + P_k^1(\cos\theta) r^2 q^2 \right) \sin\theta w(r,\theta) d\theta \quad (2.55)$$

Приймаємо до уваги вигляд узагальненого рівняння Лежандра в полярній формі (2.32) та додаємо й віднімаємо $k(k+1)P_k^1(\cos\theta)$ від виразу під інтегралом у (2.55) та отримаємо

$$\left(r^2(w_k(r))' \right)' + (r^2 q^2 - k(k+1)) w_k(r).$$

Остаточно після інтегрування рівняння (2.41) прийме вигляд

$$\left(r^2 (w_k(r))' \right)' + (r^2 q^2 - k(k+1)) w_k(r) = F_k, \quad 0 < r < \infty, \quad (2.56)$$

де

$$F_k(r) = \sin \gamma \left[P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(r, \tau) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(r, \gamma) \rangle \right].$$

В рівнянні (2.56) проведено заміну

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= w(r, \theta) r^{\frac{1}{2}} \\ w_k(r) &= w_k(r) r^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

та маємо

$$r \left(r (w_k(r))' \right)' + \left(r^2 q^2 - \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) w_k(r) = F_k(r), \quad 0 < r < \infty, \quad (2.58)$$

де

$$F_k(r) = \sin \gamma \left[P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(r, \tau) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(r, \gamma) \rangle \right].$$

До рівняння (2.58) застосовано інтегральне перетворення Ханкеля за змінною r

$$\begin{aligned} w_{k\alpha} &= \int_0^\infty r I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) w_k(r) dr \\ w_k(r) &= (-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) w_{k\alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (2.59)$$

Помножимо рівняння (2.58) на $\frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r)}{r}$ та застосуємо до нього пряме інтегральне

перетворення (2.46) за стандартною схемою

$$\int_0^\infty I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left[\left(r (w_k(r))' \right)' + \left(r q^2 - r^{-1} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) w_k(r) \right] dr = F_{k\alpha}, \quad (2.60)$$

де

$$F_{k\alpha} = \int_0^\infty \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha\eta)}{\eta} \left(\sin \gamma \left(P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(\eta, \gamma) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(\eta, \gamma) \rangle \right) \right) d\eta$$

Для початку, інтегруємо двічі по частинам перший доданок у (2.60)

$$\int_0^\infty I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \left(r(w_k(r))' \right)' dr = \left(r(w_k(r))' I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) + r w_k(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) \Big|_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^\infty w_k(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) dr$$

Неінтегральний доданок дорівнює нулю. До підінтегрального доданку додаємо та

віднімаємо $\left(r \alpha^2 I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) w_k(r)$ й матимемо

$$\int_0^\infty \frac{w_k(r)}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) \right) - \left(r^2 \alpha^2 + \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) \right) dr + \\ + (q^2 + \alpha^2) \int_0^\infty w_k(r) r I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) dr = F_{k\alpha}$$

В першому інтегралі маємо модифіковане рівняння Бесселя до якого підставлено один з його розв'язків, тому воно дорівнює нулю. Таким чином рівняння (2.56) остаточно в просторі трансформант має вигляд

$$(q^2 + \alpha^2) w_{k\alpha} = \\ = \int_0^\infty \eta^{-1} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha\eta) \left(\sin \gamma \left(P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(\eta, \gamma) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(\eta, \gamma) \rangle \right) \right) d\eta$$

з нього легко знаходиться розв'язок

$$w_{k\alpha} = - \frac{\int_0^\infty \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha\eta)}{\eta} \left(\sin \gamma P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(\eta, \gamma) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle \right) d\eta}{\alpha^2 + q^2} + \\ + \frac{\int_0^\infty \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha\eta)}{\eta} \left(\sin \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(\eta, \gamma) \rangle \right) d\eta}{\alpha^2 + q^2}$$

Застосуємо до нього обернене інтегральне перетворення (2.46) та отримуємо

$$w_k(r) = \sin \gamma \int_0^\infty \eta^{-1} P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(\eta, \tau) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle \left(-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha \right) d\eta -$$

$$-\sin \gamma \int_0^\infty \eta^{-1} \left(\frac{\partial P_k^1(\cos \tau)}{\partial \tau} \right)_{\tau=\gamma} \langle w(\eta, \gamma) \rangle \left(-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha \right) d\eta$$

З урахуванням формули (2.51) та проведеної заміни (2.57) маємо розв'язок рівняння кручення у просторі трансформант Лежандра

$$w_k(r) = \sin \gamma \int_0^\infty P_k^1(\cos \gamma) \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} w(\eta, \gamma) \right)_{\tau=\gamma} \right\rangle \Gamma_{q,k}(r, \eta) d\eta -$$

$$-\sin \gamma \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P_k^1(\cos \tau) \right)_{\tau=\gamma} \langle w(\eta, \gamma) \rangle \Gamma_{q,k}(r, \eta) d\eta \quad (2.61)$$

де

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(r q), & r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(r q) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), & r < \eta \end{cases}$$

та $H_k(x)$ – перша функція Ханкеля.

Остаточно до отриманого розв'язку (2.61) у просторі трансформант, з урахуванням позначення стрибків переміщення (2.17) та його похідної (2.18), застосовано обернене перетворення Лежандра (2.42). Отримано розривний розв'язок в оригінальному просторі

$$w(r, \theta) = \int_{R_0}^{R_1} \xi_2(\eta) \sin \gamma \left(K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\tau=\gamma} d\eta -$$

$$-\int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sin \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\tau=\gamma} d\eta \quad (2.62)$$

де

$$K_q(\theta, \tau; r, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^1(\cos \theta) P_k^1(\cos \tau), \quad \sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

$$\Gamma_{q,k}(r,\eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq), r > \eta \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q), r < \eta \end{cases} \quad (2.63)$$

Невідомі стрибки $\xi_1(\theta)$ та $\xi_2(\theta)$ знаходяться у Розділі 4 після деталізації типу дефекту.

2.4. Висновки до другого розділу.

Розв'язок динамічної задачі кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого сферичним або конічним дефектом було побудовано як суперпозицію неперервного та розривного розв'язків.

Неперервний розв'язок було знайдено при розв'язанні динамічної задачі кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу. За допомогою інтегрального перетворення Г.Я. Повева задача була зведена до одновимірної крайової задачі. Отримана задача у просторі трансформант була точно розв'язана за допомогою апарату базисних розв'язків. До розв'язку в просторі трансформант було застосовано обернене інтегральне перетворення Г.Я. Попова, що дозволило знайти точний розв'язок в оригінальному просторі. Також було коротко продемонстровано метод знаходження загального розв'язку у просторі трансформант у випадку неоднорідності рівняння одновимірної задачі.

Розривний розв'язок було знайдено при розв'язанні динамічного рівняння кручення для сферичного або конічного дефекту. Безпосереднє застосування інтегрального перетворення Лежандра до рівняння кручення дозволило уникнути побудови та використання допоміжних гармонічних або бігармонічних функцій. В просторі трансформант Лежандра до рівняння було застосовано інтегральне перетворення Мелліна та знайдено точний розв'язок у просторі трансформант. Після послідовного застосуванням обернених інтегральних перетворень було знайдено розривний розв'язок в оригінальному просторі. Отримані розв'язки включають у себе невідомі функції стрибків переміщення та його похідної при переході через дефект, які знаходяться у наступних главах з уточненням типу дефекту.

РОЗДІЛ 3.

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО СФЕРИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

У розділі розв'язано динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого сферичною тріщиною. Момент кручення приложено до конусу через абсолютно жорстку накладку прикріплену до нижньої сферичної поверхні конусу.

Розв'язок задачі знайдено в вигляді суперпозиції неперервного та розривного розв'язків, які були знайдені в Розділі 2. Розв'язок задачі зведено до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння (СІР) відносно похідної від невідомого стрибка переміщень, яке було розв'язано методом ортогональних поліномів з виділенням сингулярної частини у вигляді ядра Веббера-Соніна.

Проведено числовий аналіз розподілу напружень на боковій поверхні конусу та аналіз значень власних (резонансних) частот у залежності від різних механічних або геометричних характеристик конусу та тріщини. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в залежності від розміру та положення тріщини.

Результати розділу опубліковано в праці [37].

3.1. Постановка задачі

Розглянуто пружний двічі-зрізаний пружний конус (Рис. 3.1), який займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями $a_0 \leq r \leq a_1, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$. Задача осесиметрична, тому змінна φ ігнорується бо не впливає на розв'язок. Розв'язок достатньо провести для половини конусу $a_0 \leq r \leq a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$, а на іншу половину продовжити по симетрії. Задача сформульована у випадку сталих коливань (2.9). Конус піддається крученню (2.11) по нижній сферичній поверхні $r = a_0, 0 \leq \theta \leq \psi$ через абсолютно жорстку накладку. Рівняння руху накладки відомо (2.14). Верхня сферична поверхня конусу

$r = a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$ зацмлена (2.12). Бокова поверхня конуса $a_0 \leq r \leq a_1, \theta = \psi$ вільна від напружень (2.13).

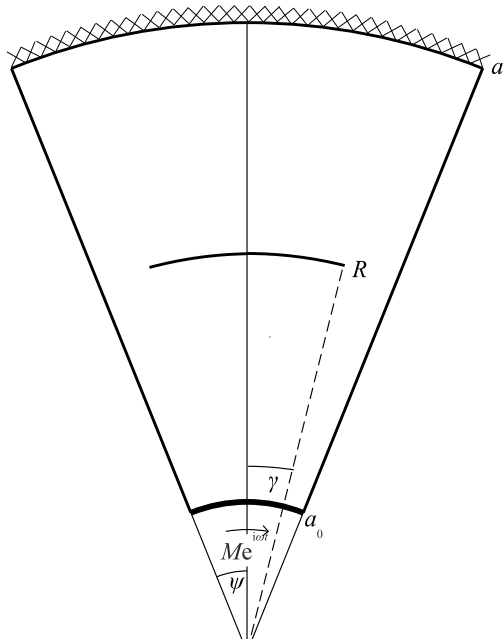


Рис. 3.1. Геометрія двічі-зрізаного сферичними поверхнями конуса послабленого сферичною тріщиною

Конус послаблений сферичною тріщиною, яка займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями $r = R, 0 \leq \theta \leq \gamma$. Краї тріщини $r = R \pm 0, 0 \leq \theta \leq \gamma$ вільні від напруги, тобто

$$\tau(r, \theta) \Big|_{r=R \pm 0} = G \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w(r, \theta) \right) \Big|_{r=R \pm 0} = 0 \quad (3.1)$$

Для розв'язання задачі потрібно відшукати ненульове переміщення (2.19) і ненульові напруження (2.22) та (2.23). Доданки $w^1(r, \theta)$ та $w^2(r, \theta)$ переміщення (2.19) наведено у (2.40) та (2.53) відповідно, а саме

$$w^1(r, \theta) = \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} {}_1\Psi_k(r) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
w^2(r, \theta) = & R^2 \int_0^\gamma \xi_2(\tau) \sin \tau \left(K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\eta=R} d\tau - \\
& - R^2 \int_0^\gamma \xi_1(\tau) \sin \tau \left(\frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\eta=R} d\tau
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Враховуючи (3.1) можемо стрибок похідних переміщення (2.16) виразити через стрибок переміщення (2.15). Маємо

$$\begin{aligned}
\tau(r, \theta) \Big|_{r=R-0} - \tau(r, \theta) \Big|_{r=R+0} &= G \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w(r, \theta) \right) \Big|_{r=R-0} - \\
-G \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w(r, \theta) \right) \Big|_{r=R+0} &= G \left(\left\langle \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \right\rangle_{r=R} - R^{-1} \langle w(r, \theta) \rangle_{r=R} \right) = \\
= G(\xi_2(\theta) - R^{-1} \xi_1(\theta)) &= 0
\end{aligned}$$

тобто

$$\xi_2(\theta) = R^{-1} \xi_1(\theta) \tag{3.4}$$

Після проведення заміни (3.4) у (3.3) маємо

$$w^2(r, \theta) = R^2 \int_0^\gamma \xi_1(\tau) \sin \tau \left(\frac{1}{\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\eta=R} d\tau \tag{3.5}$$

Розв'язок (3.5) приведено до більш зручного, для майбутніх розрахунків, вигляду. Інтегровано по частинам у (3.5) інтеграл по τ , з урахуванням визначення асоціативних поліномів Лежандра [14]

$$P_k^1(\cos \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} P_k^0(\cos \tau),$$

отримано

$$\begin{aligned}
& \int_0^\gamma \xi_1(\tau) \sin \tau \left(\frac{1}{\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right) \Big|_{\eta=R} d\tau = \\
& = \left[\begin{array}{l} u = \sin \tau \xi_1(\tau) \quad dv = P_k^1(\cos \tau) d\tau \\ du = \frac{\partial}{\partial \tau} (\sin \tau \xi_1(\tau)) d\tau \quad v = P_k^0(\cos \tau) \end{array} \right] = \\
& = - \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \left(\frac{1}{\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right) \Big|_{\eta=R} d\tau
\end{aligned}$$

й остаточно (3.5) прийняв вигляд

$$w^2(r, \theta) = R^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \left(\frac{1}{\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right) \Big|_{\eta=R} d\tau, \quad (3.6)$$

де

$$X(\tau) = \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} (\sin \tau \xi_1(\tau))}{\sin \tau}$$

$$K_q(\theta, \tau; r, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^1(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau), \quad \sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

Таким чином невідомою функцією яку треба знайти стає $X(\tau)$, тобто стрибок напружень.

3.2. Побудова та розв'язання сингулярного інтегрального рівняння

Невідомий стрибок відшукано у вигляді

$$X(\tau) = \alpha X(\tau) \quad (3.7)$$

Використавши (3.7), з рівняння руху накладки (2.14), було отримано формулу для пошуку невідомого куту повороту конусу

$$\alpha = M \left(\omega^2 J + 2\pi a_0^3 \int_0^\psi \sin^2 \theta \left(\hat{\tau}(r, \theta) \right) \Big|_{r=a_0} d\theta \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

де

$$\tau(r, \theta) = \alpha \hat{\tau}(r, \theta) \quad (3.9)$$

Таким чином пошук куту повороту можна робити вже після знаходження невідомої функції $X(\tau)$ й відповідно напруження (2.22).

СІР будується задовольнянням умови (3.1) при $r = R + 0$, тобто

$$\frac{1}{G} \tau^2(r, \theta) \Big|_{r=R+0} = -\frac{1}{G} \tau^1(r, \theta) \Big|_{r=R+0}. \quad (3.10)$$

У Додатку Б наведено виведення напруження $\tau^2(r, \theta)$, яке має вигляд

$$\tau^2(r, \theta) = -GR^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^{\infty} P_k^1(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) \sigma_k \left(\Gamma_{q,k}(r, \eta) \right) \Big|_{\eta=R} d\tau, \quad (3.11)$$

де

$$\Gamma_{q,k}(r,\eta) = \left(\frac{\pi i q^2}{2\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J'_{k+1/2}(\eta q) H'_{k+1/2}(rq) \\ J'_{k+1/2}(rq) H'_{k+1/2}(\eta q) \end{array} \right\} - \frac{3\pi i q}{4r\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J'_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H'_{k+1/2}(\eta q) \end{array} \right\} - \right. \\ \left. - \frac{3\pi i q}{4\eta\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J_{k+1/2}(\eta q) H'_{k+1/2}(rq) \\ J'_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{array} \right\} + \frac{9\pi i}{8r\eta\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{array} \right\} \right) \quad (3.12)$$

Підставивши (3.11) в (3.10) та врахувавши (3.9) отримаємо СІДР

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^{\infty} P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) \sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) d\tau = \frac{\tau^1(r, \theta) \Big|_{r=R+0}}{GR^2}, \quad (3.13)$$

де $\Gamma_{q,k}(r, \eta)$ наведено у (3.12), $X(\tau)$ наведено у (3.7) та

$$\tau^1(r, \theta) = \frac{\tau^1(r, \theta)}{\alpha}.$$

Далі проведено наступну асимптотичну процедуру. Ряд розбивається на два ряди $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) g_k(x) = \sum_{k=0}^N f_k(x) g_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ й у другому замінюється функція $f_k(x)$ на її асимптотичне уявлення $F_k(x)$ при $k \rightarrow \infty$, та також додається та віднімається наступний доданок $\sum_{k=0}^N F_k(x) g_k(x)$. Остаточоно отримується формула

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) g_k(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x) g_k(x) + \left(\sum_{k=0}^N f_k(x) g_k(x) - \sum_{k=0}^N F_k(x) g_k(x) \right). \quad (3.14)$$

Застосовано процедуру (3.14) до (3.13), з урахуванням наступного асимптотичного уявлення (дивись Додаток В)

$$\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) = \frac{1}{2R} + \underline{O}(k^{-1}), k \rightarrow \infty,$$

та отримано

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^N \left(\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) - \frac{1}{2R} \right) P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) d\tau + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2R} P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) d\tau = \frac{\tau^1(r, \theta) \Big|_{r=R+0}}{GR^2} \end{aligned}$$

Після інтегрування отриманого рівняння по θ та тривіальних перетворень отримано СІР

$$\begin{aligned} & \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^N \left(2R\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) - 1 \right) P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) d\tau + \\ & + \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^\infty P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) d\tau + \int \frac{2\tau^1(r, \theta) \Big|_{r=R+0}}{GR} d\theta + C_1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Тут невідома константа C_1 , яка з'явилася при інтегруванні обох частин, знаходиться з рівняння замкнутості тріщини

$$\int_0^\gamma \sin \tau X(\tau) d\tau = 0 \quad (3.16)$$

Для виділення ядра, було застосовано формулу з [47]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^\infty P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) = 2S_0(\theta, \tau) \\ & S_0(\theta, \tau) = \frac{1}{2} \sec \frac{\theta}{2} \sec \frac{\tau}{2} W_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

де $W_0(x, y)$ – інтеграл Вебера-Соніна, котрий дорівнює

$$W_0(x, y) = \int_0^\infty J_0(tx) J_0(ty) dt.$$

Після підстановки формули (3.17) до (3.15) маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^N \left(2R\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) - 1 \right) P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) d\tau + \\ & + \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sec \frac{\theta}{2} \sec \frac{\tau}{2} W_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) d\tau = \int \frac{2\tau^1(r, \theta) \Big|_{r=R+0}}{GR} d\theta + C_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Далі вводиться заміна змінних, для перетворення інтервалу інтегрування $(0, \gamma) \rightarrow (0, 1)$, за наступною схемою

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = x, \quad \frac{1}{h} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} = y, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = h, \quad d\tau = \frac{2ady}{1+(hy)^2} \\ \theta = 2\operatorname{arctgh}hx, \quad \tau = 2\operatorname{arctgh}y, \quad \gamma = 2\operatorname{arctgh}h \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\sec \frac{\theta}{2} = \sqrt{1+(hx)^2}, \quad \sec \frac{\tau}{2} = \sqrt{1+(hy)^2}, \quad \sin \tau = \frac{2hy}{1+(hy)^2}, \quad \sin \frac{\tau}{2} = \frac{hy}{\sqrt{1+(hy)^2}}$$

Після застосування заміни (3.19) до рівняння (3.18) було отримано СІР

$$\int_0^1 \chi(y) y W_0(x, y) dy + \int_0^1 \chi(y) y S_q(x, y) dy = F_q(x) + C_1, \quad (3.20)$$

де

$$F_q(x) = \frac{2}{GR} \frac{1}{\sqrt{1+(hx)^2}} \left(\int_{\theta=2\operatorname{arctgh}hx} \tau^1(R, \theta) d\theta \right)$$

$$\chi(y) = \frac{X(2\operatorname{arctgh}y)}{(1+(hy)^2)^{3/2}} \quad (3.21)$$

$$S_q(x, y) = \frac{h \left(\sum_{k=0}^N (2R\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) - 1) P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) \right)_{\substack{\theta=2\operatorname{arctgh}x \\ \tau=2\operatorname{arctgh}y}}}{\sqrt{1+(hy)^2} \sqrt{1+(hx)^2}}.$$

Розв'язання СІР проведено за схемою методу ортогональних поліномів [8].

Розв'язок СІР (3.20) відшукано у вигляді

$$\chi(y) = \chi^1(y) + C_1 \chi^2(y). \quad (3.22)$$

Для знаходження $\chi^1(y)$ та $\chi^2(y)$ розв'язано два СІР однакового вигляду з різною правою частиною

$$\int_0^1 \chi^1(y) y W_0(x, y) dy + \int_0^1 \chi^1(y) y S_q(x, y) dy = F_q(x) \quad (3.23)$$

$$\int_0^1 \chi^2(y) y W_0(x, y) dy + \int_0^1 \chi^2(y) y S_q(x, y) dy = 1. \quad (3.24)$$

Згідно з методом ортогональних поліномів функції $\chi^1(y)$ та $\chi^2(y)$ розвинуто у ряди за ортогональними поліномами Лежандра $P_k(x)$ у наступному вигляді

$$\chi^1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n^1 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}} \quad (3.25)$$

$$\chi^2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n^2 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (3.26)$$

Далі наведено схему метода ортогональних поліномів для СІР (3.23). Підставляється розвинення (3.25) до рівняння (3.23) та отримується

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^1 \int_0^1 \frac{W_0(x,y) P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^1 \int_0^1 \frac{S_q(x,y) P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} = F_q(x) \quad (3.27)$$

До (3.27) застосовується спектральне співвідношення [8, В.26]

$$\int_0^1 \frac{W_0(x,y) P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi [(2n-1)!!]^2 P_{2n}(\sqrt{1-x^2})}{[(2n)!!]^2}$$

та СІР зводиться до

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^1 \frac{\pi [(2n-1)!!]^2 P_{2n}(\sqrt{1-x^2})}{[(2n)!!]^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^1 \int_0^1 \frac{S_q(x,y) P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} = F_q(x)$$

Обидві частини рівності помножаються на $\left(-\frac{x P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} \right)$ при $m = \overline{0, \infty}$ й

інтегруються по x на інтервалі $(0,1)$, з урахуванням наступного співвідношення (див. Додаток Г)

$$\int_0^1 \frac{x P_{2n}(\sqrt{1-x^2}) P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\delta_{nm} \frac{1}{4n+1},$$

та СІР зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ)

$$\begin{aligned} \chi_m^1 - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{S_q(x, y) xy P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\Delta_m \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2}} dy dx = \\ = - \int_0^1 \frac{F_q(x) x P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\Delta_m \sqrt{1-x^2}} dx, \quad m = \overline{0, \infty} \end{aligned}$$

де

$$\Delta_m = \frac{1}{4m+1} \frac{\pi [(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2}$$

Для СІР (3.24), з урахуванням розвинення (3.26), проведено аналогічну процедуру, що дозволило і її звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Таким чином маємо дві СЛАУ

$$(I + A)X^i = F^i, \quad i = 1, 2,$$

де

$$\|A\|_{mn} = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{S_q(x, y) xy P_{2n}(\sqrt{1-y^2}) P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\Delta_m \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2}} dy dx$$

$$\|X^i\|_m = \chi_m^i, \quad i = 1, 2$$

$$\|F^1\|_m = - \int_0^1 \frac{F_q(x) x P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\Delta_m \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\|F^2\|_m = - \int_0^1 \frac{x P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\Delta_m \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\Delta_m = \frac{1}{4m+1} \frac{\pi [(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2}.$$

Системи розв'язано методом редукції [8]. Функцію $\chi(y)$ знайдено завдяки формулам (3.22), (3.25) та (3.26). За допомогою рівняння замкнутості тріщини (3.16) знайдено невідому константу C_1 , яка з урахуванням (3.25), (3.26) та заміни (3.19), прийняла вигляд

$$C_1 = - \int_0^1 \frac{y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n^1 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}} dy}{\sqrt{1+(hy)^2}} \Bigg/ \int_0^1 \frac{y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n^2 P_{2n}(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}} dy}{\sqrt{1+(hy)^2}}.$$

Функцію $X(\tau)$, з урахуванням (3.21) та заміни (3.19), знайдено у вигляді

$$X(\tau) = \chi \left(\frac{1}{h} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right) \left(1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right)^2 \right)^{3/2} \quad (3.28)$$

Невідомий кут повороту α знайдено з рівняння (3.8). Після підстановки (3.28) в (3.7) отримано невідому функцію стрибку напружень $X(\tau)$ в розв'язку (3.6).

Були введені наступні позначення

$$K_q^{p_1, p_2, \mu_1, \mu_2}(\theta, \tau; r, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k P_k^{p_1}(\cos \theta) P_k^{p_2}(\cos \tau) \Gamma_{q,k}^{\mu_1, \mu_2}(r, \eta), \quad (3.29)$$

$$\sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

та

$$\Gamma_{q,k}^{\mu_1, \mu_2}(r, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right)^{\mu_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta} \right)^{\mu_2} \circ \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq), & r > \eta \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q), & r < \eta \end{cases}, \quad (3.30)$$

що дозволило записати розривний розв'язок (3.6) у вигляді

$$w^2(r, \theta) = -R^2 \int_0^{\gamma} X(\tau) \sin \tau K_q^{1,0,0,1}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\eta=R} d\tau \quad (3.31)$$

За допомогою (3.2) та (3.31) знайдені ненульові напруження за формулами (2.20), (2.21), (2.22) та (2.23)

$$\tau(r, \theta) = \tau^1(r, \theta) + \tau^2(r, \theta),$$

де

$$\tau^1(r, \theta) = Gal \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \left(\frac{\partial_1 \Psi_k(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi_k(r) \right)$$

$$\tau^2(r, \theta) = -GR^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau K_q^{1,0,1,1}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\eta=R} d\tau,$$

та

$$\bar{\tau}(r, \theta) = \bar{\tau}^1(r, \theta) + \bar{\tau}^2(r, \theta),$$

де

$$\bar{\tau}^1(r, \theta) = Gr^{-1} \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\psi \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^2(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \Psi_k(r)$$

$$\bar{\tau}^2(r, \theta) = -Gr^{-1} R^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau K_q^{2,0,0,1}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\eta=R} d\tau.$$

3.3. Числовий аналіз результатів розрахунку

Для проведення якісного числового аналізу розрахунку у цьому розділі проведено у безрозмірних координатах. Безрозмірний лінійний радіус змінюється за формулою $\tilde{r} = \frac{r}{r_0}$, таким чином \tilde{r} змінюється в інтервалі $a_0 < \tilde{r} < a_1$, де $a_0 = \frac{a_0}{r_0}$,

$a_1 = \frac{a_1}{r_0}$ та $r_0 = 5$ см. Якщо не вказано інакше, то $a_0 = r_0$. Лінійний розмір конусу

змінюємо через змінення значень відносного лінійний розмір конусу, а саме $h_r = \frac{a_1}{a_0}$

. Він дорівнює $h_r = 3$, якщо не вказано інакше. Кут отвору конусу має значення

$\psi = \frac{\pi}{3}$, якщо не вказано інакше.

Механічні характеристики конусу при безрозмірних координатах введено

наступним чином $G = \frac{G}{G_0}$, $\rho = \frac{\rho}{\rho_0}$ й відповідно $\tilde{c} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{c}{c_0}$, де $c_0 = \frac{G_0}{\rho_0}$,

$G_0 = 50 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_0 = 5$ г / см³. Якщо не вказано інакше, то $G = G_0$ т $\rho = \rho_0$.

Крутильний момент має вигляд – $M = \frac{M}{G_0}$, момент інерції накладки

розраховано за формулою $J = \frac{V_{a_0}}{2} \frac{\rho_{a_0}}{\rho_0} (a_0 \sin \psi)^2$, де густина накладки має значення

$\rho_{a_0} = 7 \text{ г/см}^3$ та об'єм накладки має значення $V_{a_0} = 0.1$. Якщо не вказано інакше, то $F(\theta) = \theta$.

Розміри тріщини змінюються відносно розмірів конусу, тобто $\gamma = h_\gamma \psi$ та

$R = a_0 + h_R (a_1 - a_0)$, де $R = \frac{R}{r_0}$. Параметри h_γ та h_R вказано для кожного окремого

випадку.

3.3.1. Аналіз власних частот

Перед початком аналізу залежності напруженого стану конусу та КІН при різних механічних та геометричних характеристик конусу треба визначити значення власних частот. Це зв'язано з тим що при приближенні до власної частоти починає погіршуватися виконання крайових умов. При достатньому наближенні до власної частоти, крайові умови перестають виконуватися з необхідною точністю, що не дозволяє використовувати побудовану модель в деякій їх околиці.

Власні частоти розраховано за методикою описаною в [19]. Вона полягає у тому що зафіксовані в точці конусу напруження розраховуються для різних значень частоти, яка змінюється на деякому інтервалі. Резонансні частоти при цьому будуть знаходитися на інтервалах всередині яких буде проходити різкий стрибок напружень зі зміною знаку, тобто зміни фази. Як описано в [19] для покращення точності розрахунків при пошуку власних частот можна збільшити кількість членів рядів у розв'язку чи при розв'язанні систем побудованих на основі СІР або СІДР.

Для початку проаналізовано власні частоти для конусу не послабленого тріщиною, задача для якого розв'язувалася в Підрозділі 3.2. Для членів ряду у розв'язку (2.40) було розраховано асимптотичні уявлення, для перевірки його

збіжності та для розрахування членів ряду при великому значенні параметру інтегрального перетворення V_k .

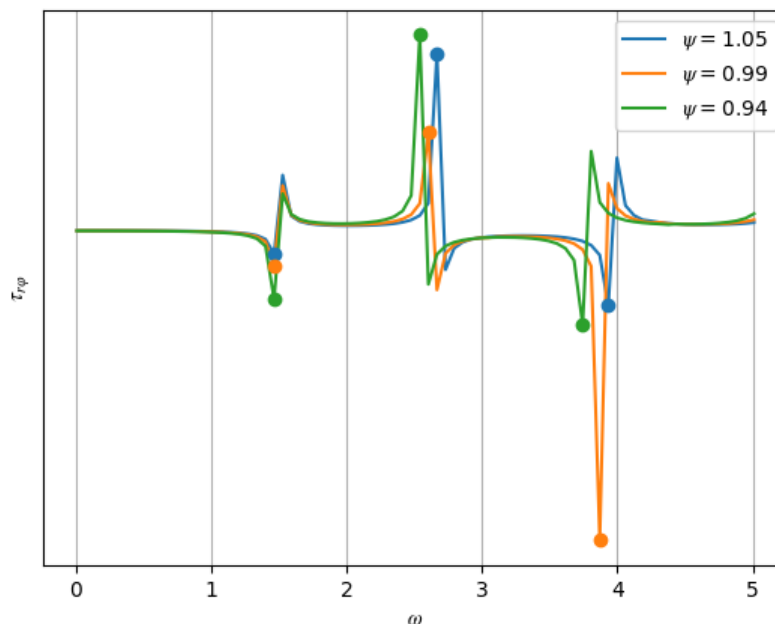


Рис. 3.2. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для різних кутів отвору конусу

На Рис. 3.2. можна побачити інтервали які містять перші власні частоти ω_i при значеннях кута отвору на 5% та на 10% менше ніж $\psi = \frac{\pi}{3}$. З графіків видно, що зміна куту отвору прямо пропорційна зміні значень власних частот, тобто при зменшенні куту отвору власні частоти зменшуються, а при збільшенні куту вони збільшуються. Також на графіку можна побачити, що при переході частоти через резонансну проходить зміна фази, що збігається з класичними результатами при аналізі власних частот об'єктів різної форми. При аналізі напружень та КІН при різних геометричних та механічних характеристик конусу чи тріщини треба враховувати факт, що перехід через власні частоти змінює знак.

На Рис. 3.3. зображено залежність перших власних частот ω_i від відносного розмірі конусу, коли він на 5% та на 10% менше ніж $h_r = 3$. Як можна побачити зміна відносного лінійного розміру конусу обернено пропорційна зміні значень

власних частот. Тобто при збільшенні лінійного розміру конусу зменшуються власні частоти. Також порівнявши Рис. 3.2 та Рис. 3.3 видно, що вплив лінійного розміру на власні частоти більший ніж від зміни куту отвору.

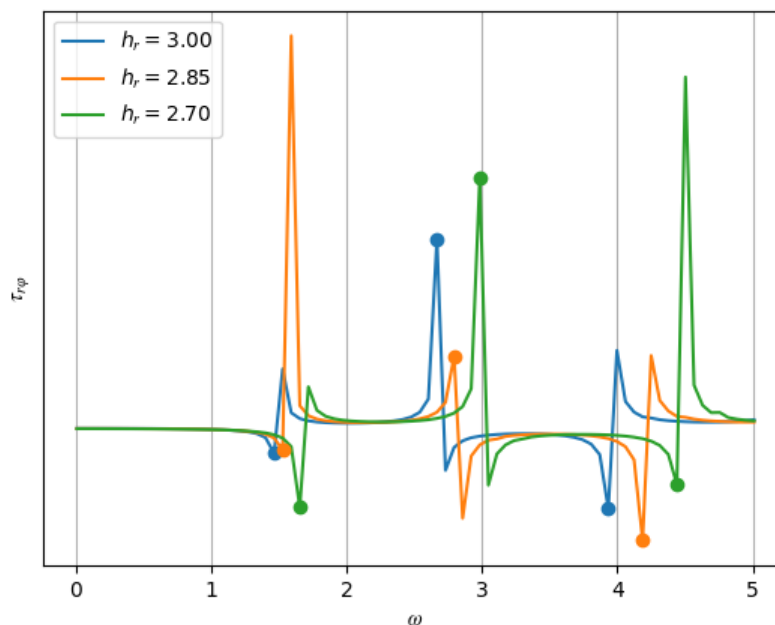


Рис. 3.3. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для різних відносних лінійних розмірів конусу

На Рис. 3.4. зображено залежність перших власних частот ω_i від значення меншого радіусу конусу при фіксованому відносному лінійному розмірі конусу. Тобто $h_r = 3$ та $a_0 = h_0 r_0$ де значення h_0 вказані на відповідному графіку. Як і при зміні відносного лінійного розміру конусу, збільшення меншого радіусу зі збереженням відносного розміру призводить до зменшення резонансних частот. При аналізі власних частот відносно зміни геометричних характеристик тіла можна зробити висновки, що короткий широкий конус більш стабільний при обертанні ніж довгий тонкий.

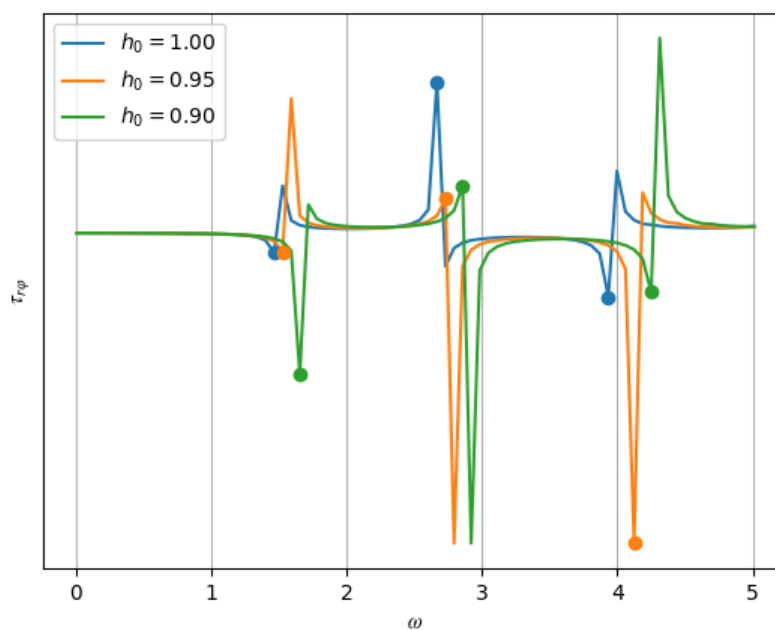


Рис. 3.4. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω при збільшенні відстані конусу від центра координат

На Рис. 3.5. зображено залежність перших власних частот ω_i від модулю зсуву конусу при $G = h_G G_0$, де $G_0 = 1$. На ньому можна побачити, що чим більший модуль зсуву тим більші за значенням його власні частоти. Це пояснюється тим що більш жорстке тіло є більш стійким до крутильних навантажень.

Також було проаналізовано вплив сферичної тріщини на значення резонансних частот конусу. На Рис. 3.6. можна побачити графіки власних частот для конусу без тріщини та для конусу зі сферичною тріщиною. Тріщина знаходиться всередині конусу та задається параметрами $h_\gamma = 0.5$ та $h_R = 0.5$. Як можна побачити при заданих характеристиках тріщини впливу на перші власні частоти конусу майже немає. При подальшому аналізі КІН у Пункті 3.3.3. виявилось що більший вплив на конус має широка тріщина яка розташована ближче до нижньої сферичної поверхні конусу. На Рис. 3.7. зображено порівняння власних частот для конусу без тріщини та конусу послабленого широкою сферичною тріщиною, яка розташована ближче до нижньої сферичної поверхні конусу, тобто $h_\gamma = 0.9$ та $h_R = 0.1$. Легко побачити, що перші власні частоти

суттєво менші ніж у випадку відсутності тріщини. Таким чином можна зробити висновок, що наявність конічної тріщини може суттєво послабити конус під час кручення.

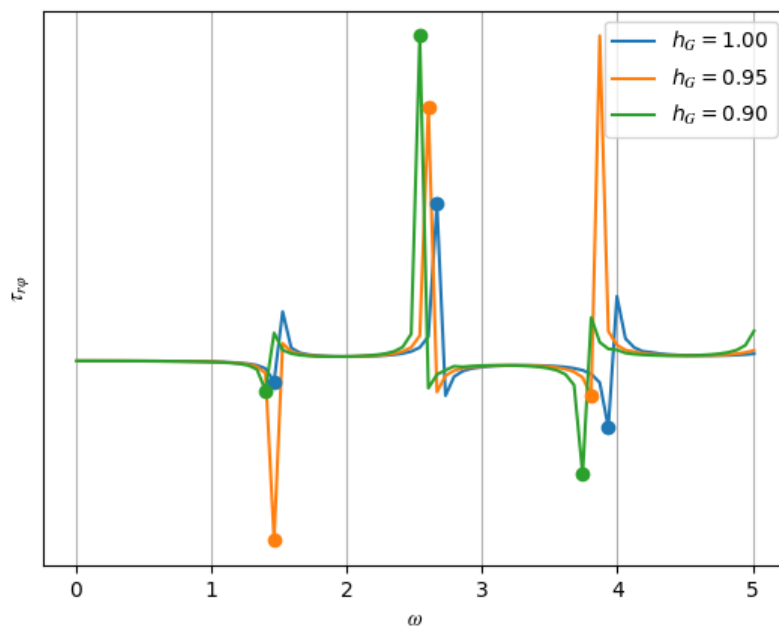


Рис. 3.5. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для різних модулів зсуву

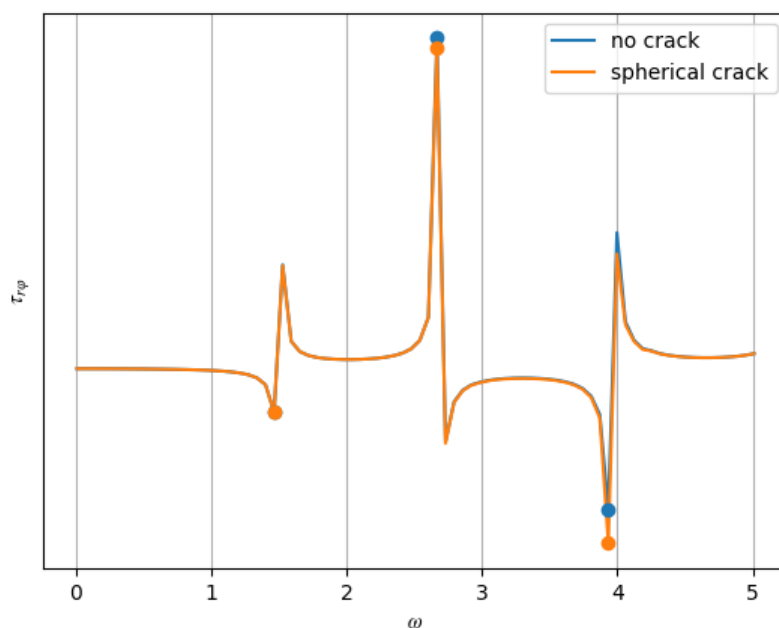


Рис. 3.6. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для конусу у випадку відсутності та наявності сферичної тріщини з параметрами $h_\gamma = 0.5$ та $h_R = 0.5$

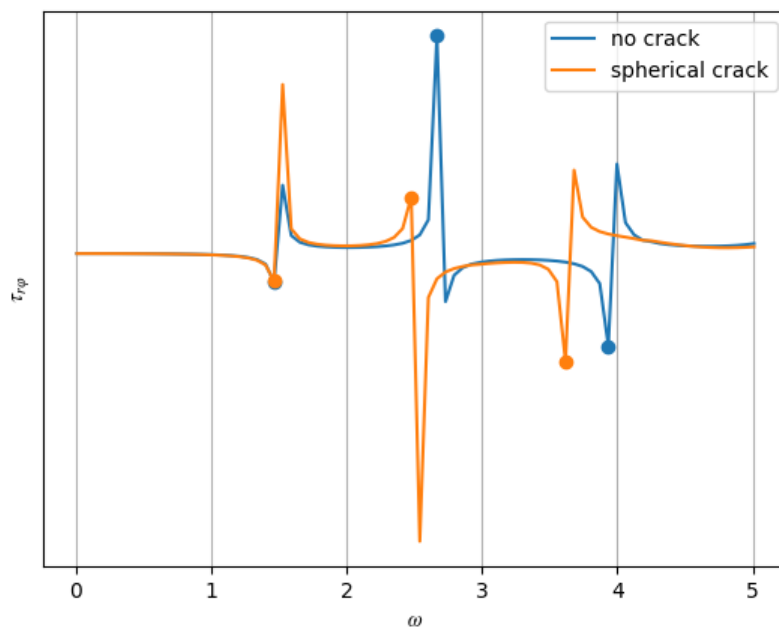


Рис. 3.7. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для конусу у випадку відсутності та наявності сферичної тріщини з параметрами $h_\gamma = 0.9$ та $h_R = 0.1$

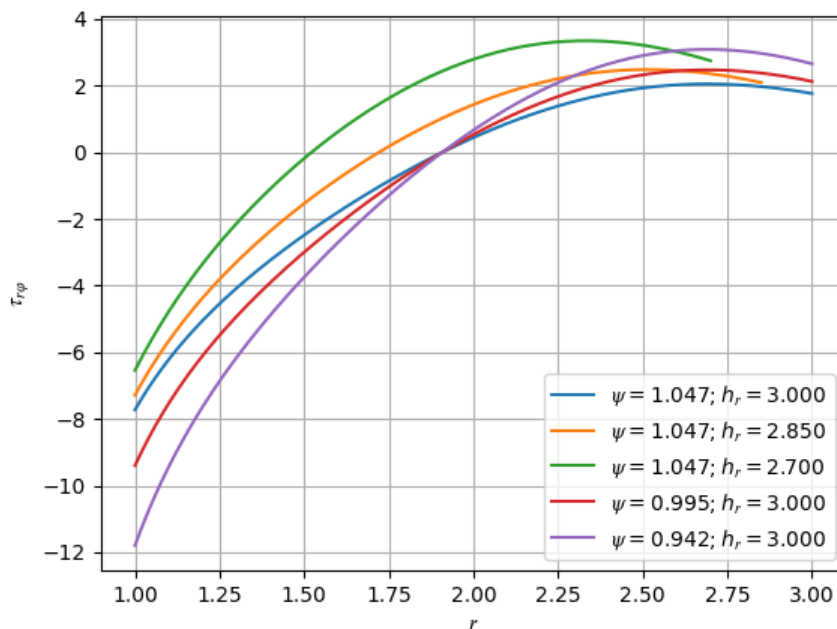


Рис. 3.8. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 2$

3.3.2. Аналіз напружень

У цьому пункті проаналізовано вплив зміни куту отвору та лінійного розміру на напружений стан конусу не послабленого тріщиною. Розв'язок задачі для конусу без тріщини знайдено у Підрозділі 3.2. На Рис. 3.8 та Рис. 3.9 зображено порівняння впливу на напруження $\tau_{r\varphi}$ на боковій та верхній сферичній поверхнях конусу відповідно, в залежності від зміни куту отвору конусу та лінійного розміру конусу на 5% та на 10% при фіксованій частоті коливань $\omega = 2$. Як можна побачити, зміна куту отвору при заданій частоті впливає на напруження $\tau_{r\varphi}$ за абсолютним значенням не менше ніж зміна лінійного розміру.

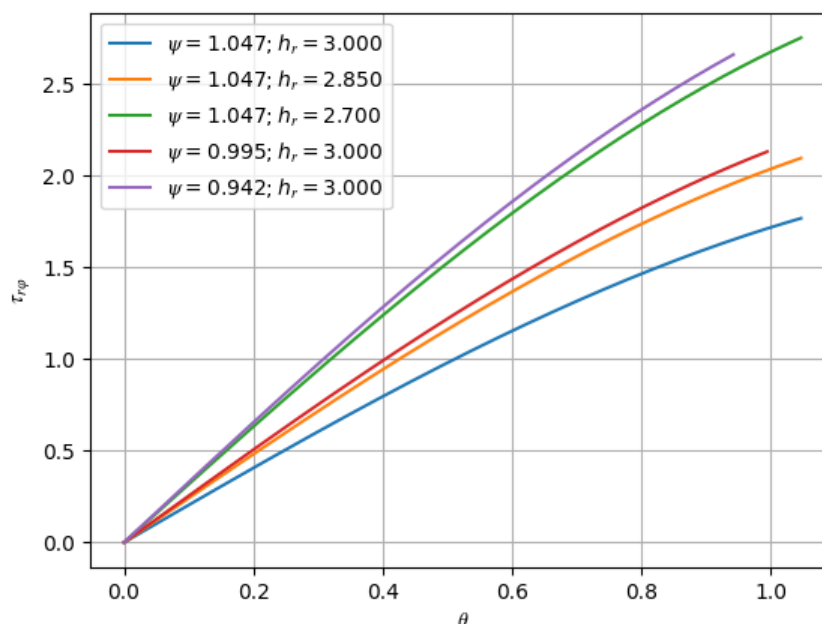


Рис. 3.9. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \theta)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 2$

З огляду на графіки у Пункті 3.3.1, бачимо що частота $\omega = 2$, для заданих на Рис. 3.8 та Рис. 3.9 геометричних характеристик конусу, знаходиться між першою та другою резонансними частотами. При заданій частоті $\omega = 1$, яка знаходиться до першої резонансної частоти, можемо побачити на Рис. 3.10 та Рис. 3.11 напруження $\tau_{r\varphi}$ на боковій та верхній сферичній поверхнях відповідно. При порівнянні Рис. 3.9 з Рис. 3.11 можна побачити, що у випадку зміни фази, змінюється знак напруження

на закріпленій поверхні $r = a_1$. Залежність напружень від геометричних характеристик конусу при цьому не змінюється.

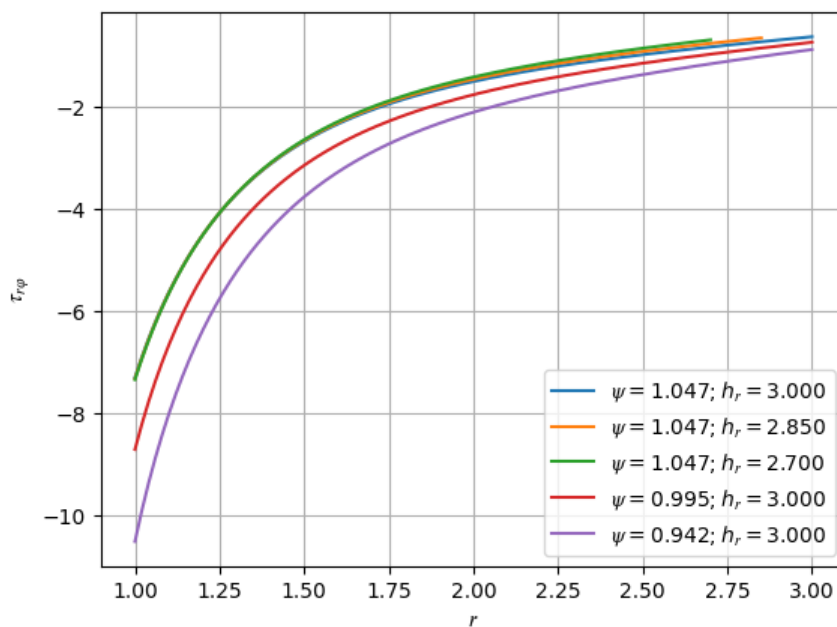


Рис. 3.10. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 1$

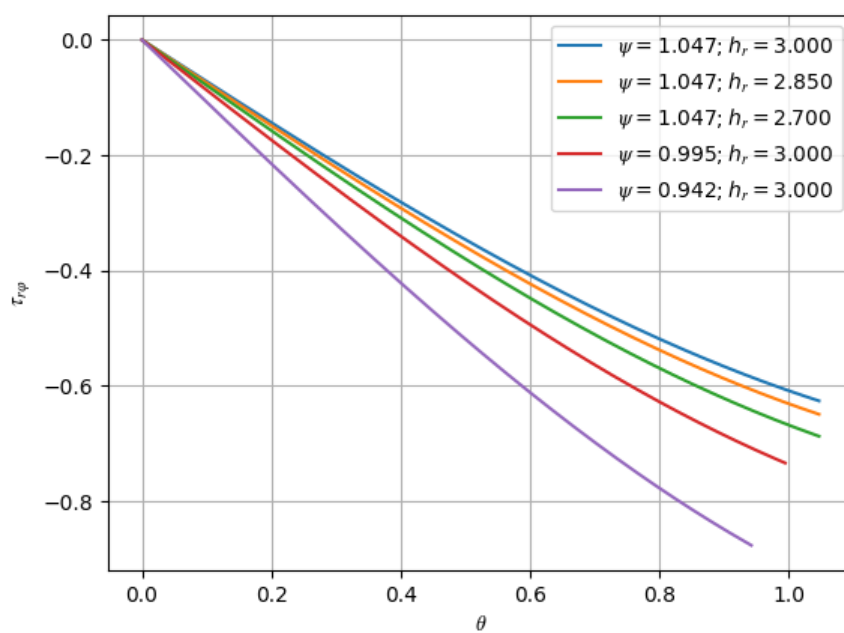


Рис. 3.11. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \theta)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 1$

Обравши частоту, яка знаходиться на інтервалі від другої до третьої власних частот, наприклад, $\omega = 3.4$ можемо побачити на Рис. 3.12 та Рис. 3.13 порівняно з Рис. 3.8 та Рис. 3.9 чергову зміну фази. Видно що зміна фази приводить до збільшення частоти коливань хвилі яка зображаться графіком $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ на боковій поверхні конусу $\theta = \psi$. Також можна спостерігати що зі збільшенням частоти коливань ω збільшуються й абсолютні значення напруження $\tau_{r\varphi}$.

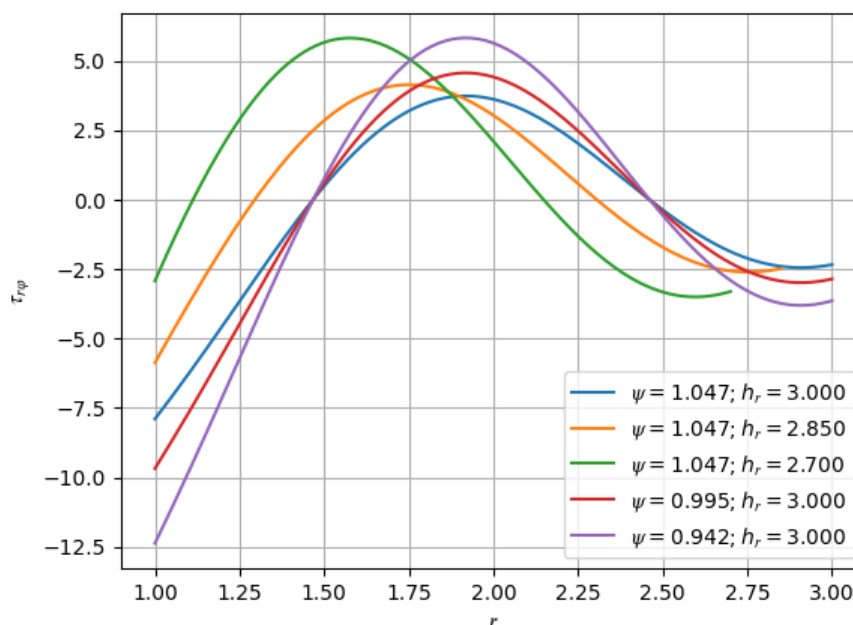


Рис. 3.12. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 3.4$

Тепер проаналізуємо вплив наявності сферичної тріщини на напруження конусу. На Рис. 3.14 зображено графік напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ на боковій поверхні конусу $\theta = \psi$ при частоті коливань $\omega = 2$ у випадках наявності в конусі сферичної тріщини та її відсутності. Тріщина характеризується наступними параметрами $h_\gamma = 0.9$ та $h_R = 0.1$. Можна побачити, що абсолютні значення напруження $\tau_{r\varphi}$ при наявній тріщині набагато більше ніж за її відсутності.

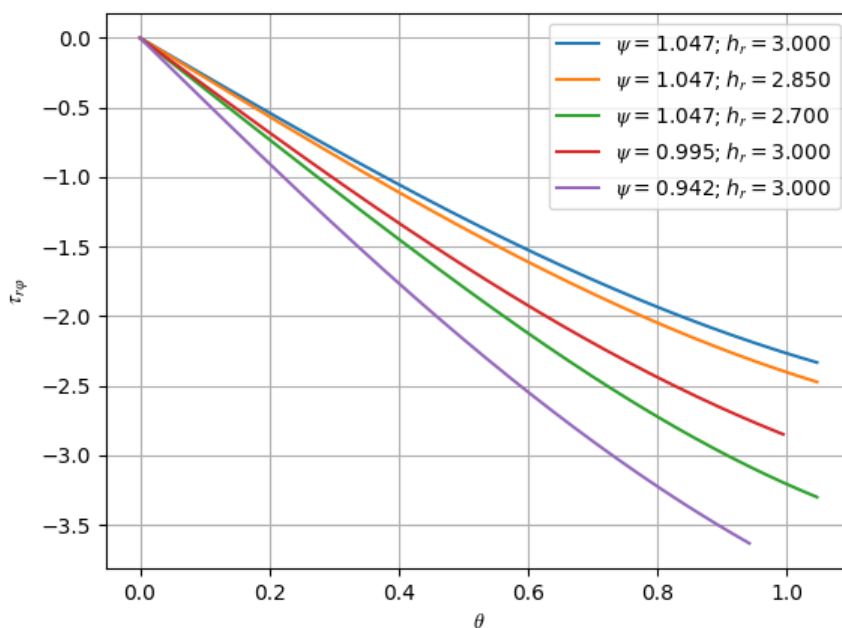


Рис. 3.13. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \theta)$ для різних геометричних характеристик конусу при частоті коливань $\omega = 3.4$

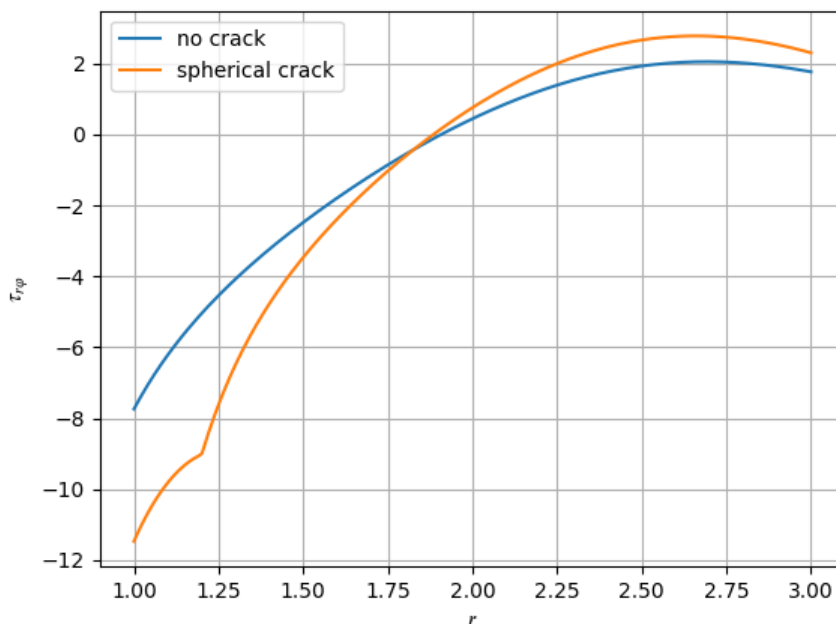


Рис. 3.14. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для конусу з та без сферичної тріщини при частоті коливань $\omega = 2$

При проведенні аналізу впливу характеристик тріщини на хвильове поле тіла аналіз КІН на берегах тріщини є набагато важливішим ніж порівняльний аналіз

напружень. Це пояснюється тим, що КІН являється важливою інженерною характеристикою, та здатний більш зрозуміліше охарактеризувати вплив тріщини на напружений стан конусу. Також КІН дозволяє виявити вплив зміни характеристики дефекту навіть у випадку коли вплив дефекту на напруження майже відсутній.

Для перевірки правильності знайденого розв'язку було численно перевірено виконання крайових умов для розв'язків отриманих в Підрозділі 2.2 та Підрозділі 3.2, тобто для конусу без тріщини та з наявною сферичною тріщиною. Точність виконання крайових умов була принаймні 10^{-6} для конусу без тріщини та 10^{-3} для конусу з тріщиною.

3.3.3. Аналіз КІН на берегах тріщини

В цьому пункті було виведено та проаналізовано КІН K_{III} на берегах тріщини $\theta = \gamma + 0$, $r = R$. Його було знайдено за формулою

$$K_{III} = \lim_{\theta \rightarrow \gamma + 0} \tau(R, \theta) \sqrt{2\pi R(\theta - \gamma)} \quad (3.32)$$

Після проведення асимптотичної процедури (3.14) як у розділі 3.2 до (3.32) лівої отримано

$$K_{III} = G \lim_{\theta \rightarrow \gamma + 0} \sqrt{2\pi R(\theta - \gamma)} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{\gamma} X(\tau) \sin \tau \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k^0(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau)}{2R} \right] d\tau$$

Використавши формулу (3.17), заміну (3.19) й розбив інтеграл на два, з урахуванням (3.21), (3.22), (3.25) та (3.26), а також прийняв до уваги, що при заміні (3.19) наш ліміт змінить наступним чином

$$\theta \rightarrow \gamma + 0 \Rightarrow 2\arctghx \rightarrow 2\arctgh + 0 \Rightarrow x \rightarrow 1 + 0$$

й, що похідна після заміни (3.19) змінить наступним, чином

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial(2\arctghx)} = \frac{1 + (hx)^2}{2h} \frac{\partial}{\partial x},$$

й врахувавши наступний ліміт

$$\lim_{x \rightarrow 1 + 0} \frac{1 + (hx)^2}{2h} = \frac{1 + h^2}{2h} = \frac{1}{\sin \gamma}$$

отримаємо КІН у вигляді $K_{III} = K_{III}^{(1)} + C_1 K_{III}^{(2)}$, де

$$K_{III}^{(n)} = \frac{2G\sqrt{\pi R\alpha}}{\sin \gamma} \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{(\operatorname{arctgh} x - \operatorname{arctgh})} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m^{(n)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_{2m}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}}, n=1,2 \quad (3.33)$$

Після диференціювання по x наступної формули [7]

$$\int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_{2m}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2m\right) x^{2m+1}} F\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} + m; \frac{3}{2} + 2m; \frac{1}{x^2}\right), x > 1$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{W_0(x, y) P_{2m}(\sqrt{1-y^2}) y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x^{2m+1}} \frac{d}{dx} F\left(\frac{3}{2} + m, \frac{3}{2} + m; \frac{5}{2} + 2m; \frac{1}{x^2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2m\right)} \left(\frac{(-2m-1)}{x^{2m+2}} F\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} + m; \frac{3}{2} + 2m; \frac{1}{x^2}\right) \right) \quad (3.34)$$

Підставляємо (3.34) в КІН (3.33) та врахувавши поведінку гіпергеометричних функцій $\underline{O}\left(\sqrt{x^2-1}^{-1}\right)$ при $x \rightarrow 1+0$, яка впливає з формули [18, 9.131] й беручи

до уваги, що $\sqrt{\pi(\operatorname{arctgh} x - \operatorname{arctgh})} \approx \sqrt{\frac{\pi}{h}(x^2-1)}$, $x \rightarrow 1+0$, остаточно матимемо КІН

у вигляді

$$K_{III} = K_{III}^{(1)} + C_1 K_{III}^{(2)},$$

де

$$K_{III}^{(n)} = \frac{2G\sqrt{\pi R\alpha}}{\sin \gamma \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m^{(n)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2} + 2m\right)}, n=1,2$$

Будемо розглядати КІН при різному розташуванні сферичної тріщини всередині конусу. Треба зазначити що при приближенні тріщини до границі конусу вона змінює свої властивості та в такому випадку потребує розв'язання задачі в

іншій постановці, тому при розрахунках КІН, тріщина розглядається не ближче ніж на 10% від границі.

На Рис. 3.15 та Рис. 3.16 зображено КІН при зміні параметру h_R , що відповідає за лінійний розмір тріщини при $h_\gamma = 0.5$. Частота коливань має значення $\omega = 2$ та $\omega = 3.2$ на Рис. 3.15 та Рис. 3.16 відповідно. Можна побачити, що найбільшим за абсолютними значеннями КІН буде у випадку коли сферична тріщина розташована біля нижньої сферичної поверхні конусу. Також поведінка коефіцієнту інтенсивності напружень на берегах сферичної тріщини при зміні радіусу тріщини відповідає хвилі яка розповсюджується від нижньої сферичної поверхні.

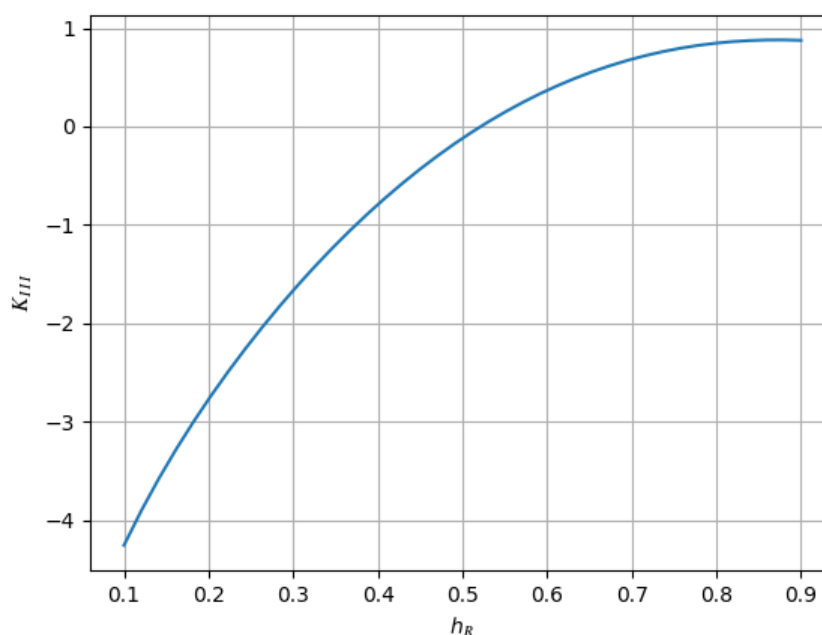


Рис. 3.15. Кін K_{III} при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_R \leq 0.9$ й $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

На Рис. 3.17 та Рис. 3.18 зображено КІН при зміні параметру h_γ , що відповідає за кут отвору тріщини при $h_R = 0.5$. Частота коливань має значення $\omega = 2$ та $\omega = 3.2$ на Рис. 3.17 та Рис. 3.18 відповідно. Можна побачити що при збільшені куту отвору тріщини абсолютне значення КІН збільшується. Також

можна побачити, при порівнянні Рис. 3.17 та Рис. 3.18, що при зміні фази змінюється і знак КІН, але при цьому його поведінка росту абсолютних значень зберігається.

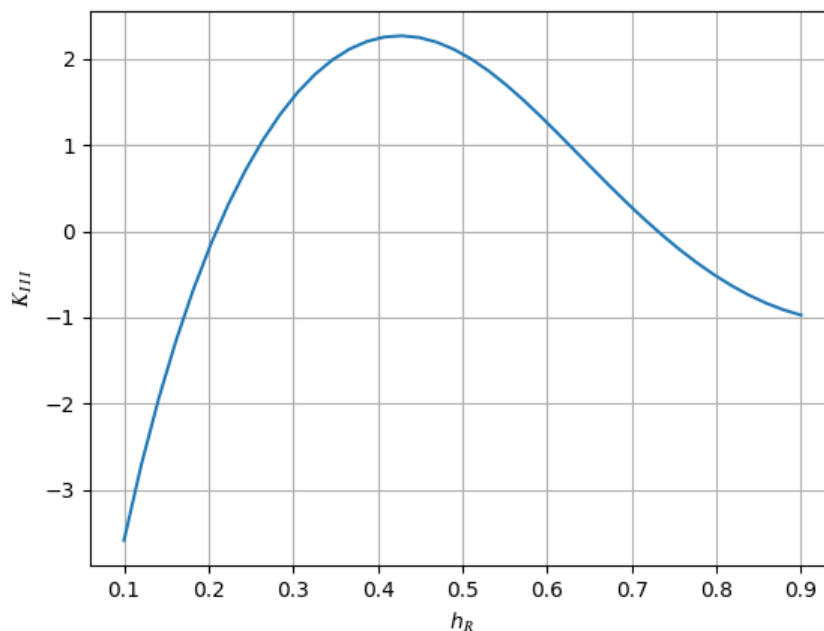


Рис. 3.16. Кін K_{III} при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_R \leq 0.9$ й $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

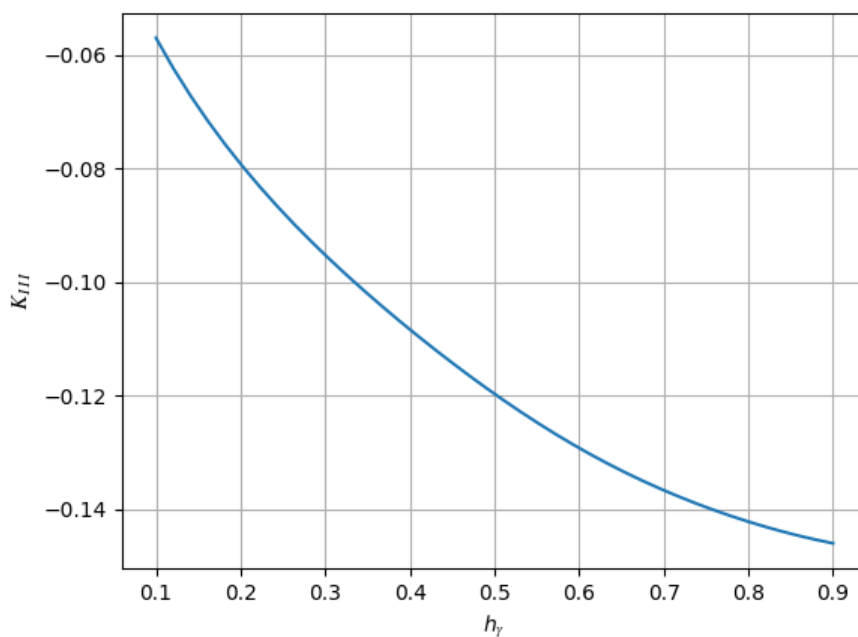


Рис. 3.17. Кін K_{III} при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.9$ й $h_R = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

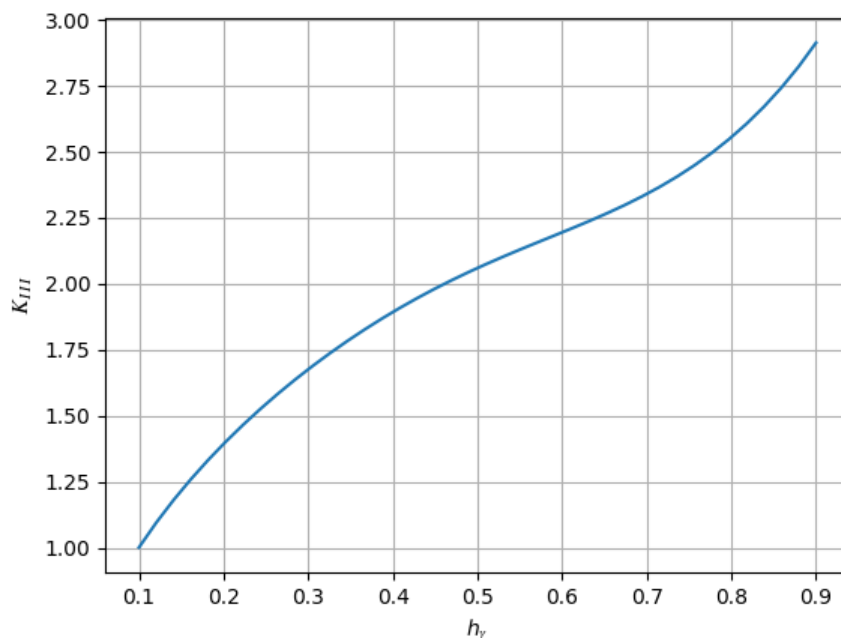


Рис. 3.18. Кін K_{III} при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.9$ й $h_R = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

Також проаналізувавши абсолютні значення КІН на Рис. 3.15 та Рис. 3.17 можемо судити, що відстань від нижньої сферичної поверхні, до якої прикладене

навантаження, набагато більше впливає на значення КІН ніж кут отвору сферичної тріщини. Відповідно, можна зробити висновок що максимальний вплив на конус буде мати широка сферична тріщина розташована біля нижньої сферичної поверхні.

3.4. Висновки до третього розділу

Отримано розв'язок динамічної задачі кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого сферичною тріщиною у випадку сталих коливань. Проведено аналіз розповсюдження перших власних частот конусу у випадку відсутності дефекту при різних механічних та геометричних характеристиках конусу. Порівняно значення власних частот у випадках наявності та відсутності сферичної тріщини в середині конусу. Проведено аналіз напружень на боковій та верхній поверхні конусу при різному куті отвору та відносній довжині конусу у випадку відсутності тріщини. Порівняно хвильове значення напружень у разі наявності та відсутності в тілі тріщини. Проаналізовано КІН на берегах тріщини для різних геометричних характеристик сферичної тріщини.

РОЗДІЛ 4.

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДЛЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ ПОСЛАБЛЕНОГО КОНІЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

У розділі досліджено динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого конічною тріщиною. Конус піддано крученню через абсолютно жорстку накладку прикладену до нижньої сферичної поверхні.

Розв'язок задачі знайдено у вигляді суперпозиції неперервного та розривного розв'язків, які були знайдені в Розділі 2. Розв'язок задачі зведено до розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння (СІДР), яке було розв'язано методом ортогональних поліномів з виділенням сингулярної частини.

Проведено числовий аналіз розподілу напружень на боковій поверхні конусу та аналіз значень власних частот у залежності від різних механічних або геометричних характеристик конусу та тріщини. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень в залежності від розміру та положення тріщини.

Результати розділу опубліковано в [36], а також в тезах конференції [5].

4.1. Постановка задачі

Розглянуто двічі-зрізаний пружний конус (Рис. 4.1), який займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями $a_0 \leq r \leq a_1, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$. Задача осесиметрична, тому змінна φ ігнорується, бо не впливає на розв'язок. Розв'язок достатньо провести для половини конусу $a_0 \leq r \leq a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$, а на іншу половину продовжити по симетрії. Задача сформульована у випадку сталих коливань (2.9).

Конус піддано крученню по нижній сферичній поверхні $r = a_0, 0 \leq \theta \leq \psi$ через абсолютно жорстку накладку (2.11). Рівняння руху накладки відомо (2.14). Верхню сферичну поверхню конусу $r = a_1, 0 \leq \theta \leq \psi$ защемлено (2.12). Бокова поверхня конуса $a_0 \leq r \leq a_1, \theta = \psi$ вільна від напружень (2.13).

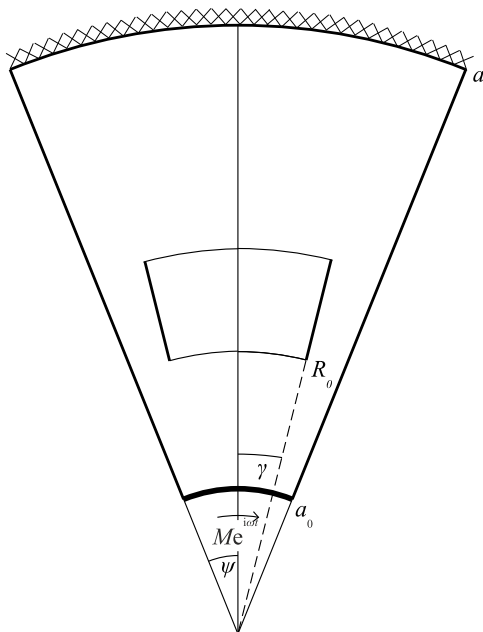


Рис. 4.1. Геометрія двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу послабленого конічною тріщиною

Конус послаблено конічною тріщиною, яка займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями $R_0 \leq r \leq R_1, \theta = \gamma$. Краї тріщини $R_0 \leq r \leq R_1, \theta = \gamma \pm 0$ вільні від напруги, тобто

$$\bar{\tau}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma \pm 0} = Gr^{-1} \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} - w(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\gamma \pm 0} = 0 \quad (4.1)$$

Для розв'язання задачі потрібно відшукати ненульове переміщення (2.19) і ненульові напруження (2.22) та (2.23). Доданки $w^1(r, \theta)$ та $w^2(r, \theta)$ переміщення (2.19) наведено у (2.40) та (2.62) відповідно, а саме

$$w^1(r, \theta) = \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} {}_1\Psi_k(r) \quad (4.2)$$

$$w^2(r, \theta) = \int_{R_0}^{R_1} \xi_2(\eta) \sin \gamma \left(K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\tau=\gamma} d\eta - \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sin \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\tau=\gamma} d\eta \quad (4.3)$$

Стрибок похідних переміщення (2.18) було виражено через стрибок переміщення (2.17) за допомогою умови (4.1)

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}(r, \theta) \Big|_{r=\gamma-0} - \bar{\tau}(r, \theta) \Big|_{r=\gamma+0} = \\ & = Gr^{-1} \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} - w(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\gamma-0} - Gr^{-1} \left(\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial \theta} - w(r, \theta) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\gamma+0} =, \\ & = Gr^{-1} \left(\left\langle \frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} \right\rangle_{\theta=\gamma} - \cot \gamma \left\langle w(r, \theta) \right\rangle_{\theta=\gamma} \right) = Gr^{-1} (\xi_2(r) - \cot \gamma \xi_1(r)) = 0 \end{aligned}$$

тобто

$$\xi_2(r) = \cot \gamma \xi_1(r) \quad (4.4)$$

Після підстановки (4.4) у (4.3) отримано

$$w^2(r, \theta) = \sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \left(\cot \tau K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \tau} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right)_{\tau=\gamma} d\eta. \quad (4.5)$$

Застосувавши формули [14, 3.8.17, 3.8.19] отримано рівняння

$$P_v^{m+1}(\cos \theta) = \frac{\partial P_v^m(\cos \theta)}{\partial \theta} - m \cot \theta P_v^m(\cos \theta),$$

яке при $m = 1$ приймає вигляд

$$P_k^2(\cos \theta) = \frac{\partial P_k^1(\cos \theta)}{\partial \gamma} - \cot \gamma P_k^1(\cos \theta). \quad (4.6)$$

Розривний розв'язок (4.5), з урахуванням формули (4.6) було записано у вигляді

$$w^2(r, \theta) = -\sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^1(\cos \theta) P_k^2(\cos \gamma) d\eta. \quad (4.7)$$

4.2. Побудова та розв'язання сингулярного інтегро-диференційного рівняння

Невідомий стрибок знайдено у вигляді

$$\xi_1(\eta) = \alpha \xi_1(\eta). \quad (4.8)$$

Таким чином формула для пошуку куту отвору α має вигляд (3.8). Це дозволило знайти невідому функцію $\xi_1(\eta)$ незалежно від куту повороту.

СІР побудовано при задовільненні умови (4.1) для $\theta = \gamma + 0$, тобто

$$\frac{1}{G} \bar{\tau}^{-2}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} = -\frac{1}{G} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0}. \quad (4.9)$$

Напруження $\bar{\tau}^{-2}(r, \theta)$, з урахуванням (4.6) та (2.21) має вигляд

$$\bar{\tau}^{-2}(r, \theta) = -\sin \gamma \frac{G}{r} \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^2(\cos \theta) P_k^2(\cos \gamma) d\eta. \quad (4.10)$$

Після підстановки (4.10) до (4.9) та проведення тривіальних перетворень отримано СІР

$$\int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) (P_k^2(\cos \gamma))^2 d\eta = \frac{r}{G \sin \gamma} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0}, \quad (4.11)$$

де $\Gamma_{q,k}(r, \eta)$ наведено у (2.63) та

$$\bar{\tau}^{-1}(r, \theta) = \frac{\bar{\tau}^{-1}(r, \theta)}{\alpha}.$$

В СІР (4.11) було виділено сингулярну частину. Для цього, проведемо асимптотичну процедуру (3.14) описану у Розділі 3. У Додатку Г розписано виведення асимптотичних уявлень та проведення самої асимптотичної процедури після якої напруження (4.10) отримало вигляд

$$\bar{\tau}^{-2}(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{G}{r^{3/2}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\xi_1(\eta)}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1 + \sin((2k+1)\theta)) \bar{\Gamma}_k(r, \eta) \right) d\eta + \bar{\tau}_0^{-2}(r, \theta), \quad (4.12)$$

що дозволило записати СІР (4.11) у формі

$$\begin{aligned} & \int_{R_0}^{R_1} \frac{\xi_1(\eta)}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1 + \sin((2k+1)\gamma)) \bar{\Gamma}_k(r, \eta) + A_q(x, y, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} \right) d\eta = \\ & = \frac{2r^{3/2}}{G} \pi^{-1} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

де $\bar{\tau}_0^{-2}(r, \theta)$ – відома регулярна частина та

$$A_q(r, \eta, \theta) = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sin \theta \pi^2 i \left(P_k^2(\cos \theta) \right)^2 \bar{\Gamma}_{q,k}(r, \eta) - \sum_{k=1}^N k \left(1 + \sin((2k+1)\theta) \right) \bar{\Gamma}_k(r, \eta) \quad (4.14)$$

$$\bar{\Gamma}_{q,k}(r, \eta) = \begin{cases} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq), & r > \eta \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q), & r < \eta \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\bar{\Gamma}_k(r, \eta) = \begin{cases} \left(\frac{\eta}{r} \right)^k, & r > \eta \\ \left(\frac{r}{\eta} \right)^k, & r < \eta \end{cases} \quad (4.16)$$

Для перетворення інтервалу інтегрування $(R_0, R_1) \rightarrow (-1, 1)$, було введено заміну за наступною схемою

$$\begin{aligned} x &= \frac{2r - R_0 - R_1}{R_1 - R_0}, & y &= \frac{2\eta - R_0 - R_1}{R_1 - R_0}, & r > \eta &\rightarrow x > y \\ & & & & r < \eta &\rightarrow x < y \\ r &= \frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2}, & \eta &= \frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$dr = (R_1 - R_0) dx, \quad d\eta = (R_1 - R_0) dy$$

$$x = 1 \rightarrow r = R_1, \quad x = -1 \rightarrow r = R_0$$

Після проведення заміни (4.17) в (4.13) отримано СІР у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \chi_1(y) \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \left(1 + \sin((2k+1)\gamma) \right) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right) dy + \\ & + \int_{-1}^1 \chi_1(y) A_q(x, y, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} dy = F(x, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

де

$$\chi_1(y) = \frac{\xi_1 \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} \right)}{\sqrt{\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2}}} \quad (4.19)$$

$$F(x, \theta) = \frac{2 \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} \right)^{3/2}}{G(R_1 - R_0)} \pi^{-1} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2}, \theta \right),$$

та (4.14), (4.16), (4.16) після заміни (4.17) позначаються наступним чином

$$A_q(x, y, \theta) = \sum_{k=0}^N \left(\sigma_k \sin \theta \pi^2 i (P_k^2(\cos \theta))^2 \bar{\Gamma}_{q,k}(x, y) - k(1 + \sin((2k+1)\theta)) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right)$$

$$\bar{\Gamma}_{q,k}(x, y) = \begin{cases} J_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} q \right) H_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} q \right), & x > y \\ J_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} q \right) H_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} q \right), & x < y \end{cases}$$

$$\bar{\Gamma}_k(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)} \right)^k, & x > y \\ \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)} \right)^k, & x < y \end{cases}.$$

Напруження (4.12) після заміни (4.17) прийняло вигляд

$$\bar{\tau}^2(r, \theta) = \bar{\tau}_0^2(x, y) - \frac{\sqrt{2}G(R_1 - R_0)}{\pi(R_1 + R_0 + x(R_1 - R_0))^{3/2}} \int_{-1}^1 \chi_1(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1 + \sin(2k+1)\theta) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right) dy \quad (4.20)$$

У Додатку Д наведено виділення сингулярної частини з інтегралу $\int_{-1}^1 \chi_1(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1 + \sin(2k+1)\theta) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right) dy$ в (4.20) та в (4.18). Остаточню СІДР з виділеною логарифмічною особливістю має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \chi_1(y) dy + \int_{-1}^1 S(x, y, \gamma) \chi_1(y) dy = F(x, \gamma), \quad (4.21)$$

де

$$F(x, \gamma) = \frac{F(x, \gamma)}{(d+x)^2}$$

$$d = \frac{R_0 + R_1}{R_1 - R_0}$$

та $S(x, y, \gamma)$ наведено у Додатку Д. Напруження має вигляд

$$\bar{\tau}^{-2}(r, \theta) = -\frac{\sqrt{2G}\sqrt{R_1 + R_0 + (R_1 - R_0)x}}{(R_1 - R_0)\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \chi_1(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy + \bar{\tau}_0^{-2}(x, y), \quad (4.22)$$

де $\bar{\tau}_0^{-2}(x, y)$ – відома регулярна частина.

Розв'язання СІДР проведено з використанням методу ортогональних поліномів [8]. Невідому функцію стрибку переміщення $\chi_1(y)$ розвинуто за ортогональними поліномами Чебишова $U_n(y)$

$$\chi_1(y) = \sqrt{1-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n U_n(y). \quad (4.23)$$

Після підстановки (4.23) до (4.21) матимемо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 S(x, y, \gamma) \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = F(x, \gamma) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Спектральне співвідношення [8, В.24]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -\pi(n+1)U_n(x)$$

дозволяє звести рівняння (4.24) до

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \pi(n+1)U_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 S(x, y, \gamma) \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = F(x, \gamma). \quad (4.25)$$

Далі, обидві частини рівності (4.25) помножено на $\sqrt{1-x^2}U_m(x)$ при $m = \overline{0, \infty}$ та інтегровано по x на інтервалі $(-1, 1)$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \pi(n+1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) dx + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S(x, y, \gamma) \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-x^2} U_n(y) U_m(x) dx dy = \\
& = \int_{-1}^1 F(x, \gamma) \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Після тривіальних перетворень та, з урахуванням ортогональності функцій Чебишова

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) dx = \delta_{nm} \frac{\pi}{2},$$

отримаємо СЛАУ

$$(I + A)X = F,$$

де

$$\|A\|_{mn} = \frac{1}{\Delta_m} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} U_n(y) U_m(x) S(x, y, \gamma) dy dx$$

$$\|X\|_n = \chi_n$$

$$\|F\|_m = \frac{1}{\Delta_m} \int_{-1}^1 F(x, \gamma) \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx$$

$$\Delta_m = -\frac{\pi^2}{2}(m+1).$$

СЛАУ було розв'язано методом редуції [8]. За допомогою формул (4.23) та (4.19) було знайдено невідому функцію $\xi_1(\eta)$. Після чого за формулою (2.14) розраховано невідомий кут повороту α .

З урахуванням введених позначень (3.29) та (3.30), розривний розв'язок (4.7) записано у вигляді

$$w^2(r, \theta) = -\sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) K_q^{1,2,0,0}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\tau=\gamma} d\eta. \tag{4.27}$$

За допомогою (4.2) та (4.27) знайдено напруження для початкової задачі за формулами (2.20), (2.21), (2.22) та (2.23)

$$\tau(r, \theta) = \tau^1(r, \theta) + \tau^2(r, \theta),$$

де

$$\begin{aligned} \tau^1(r, \theta) &= G\alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \left(\frac{\partial_1 \Psi_k(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi_k(r) \right) \\ \tau^2(r, \theta) &= -G \sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) K_q^{1,2,1,0}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\tau=\gamma} d\eta \end{aligned} \quad (4.28)$$

та

$$\bar{\tau}(r, \theta) = \bar{\tau}^1(r, \theta) + \bar{\tau}^2(r, \theta), \quad (4.29)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^1(r, \theta) &= Gr^{-1} \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^2(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} {}_1\Psi_k(r) \\ \bar{\tau}^2(r, \theta) &= -Gr^{-1} \sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) K_q^{2,2,0,0}(\theta, \tau; r, \eta) \Big|_{\tau=\gamma} d\eta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3. Числовий аналіз результатів розрахунку

Для проведення якісного числового аналізу розрахунки у цьому розділі проведено у безрозмірних координатах так само, як вони наведені у Підрозділі 3.3.

Безрозмірний лінійний радіус змінюється за формулою $\tilde{r} = \frac{r}{r_0}$ таким чином \tilde{r}

змінюється в інтервалі $a_0 < \tilde{r} < a_1$, де $a_0 = \frac{a_0}{r_0}$, $a_1 = \frac{a_1}{r_0}$, $r_0 = 5$ см й $a_0 = r_0$. Лінійний

розмір подано формулою $h_r = \frac{a_1}{a_0}$ та він дорівнює $h_r = 3$, якщо не вказано інакше.

Кут отвору конусу має значення $\psi = \frac{\pi}{3}$.

Механічні характеристики відповідно до Підрозділу 3.3 подаються за формулами $G = \frac{G}{G_0}$, $\rho = \frac{\rho}{\rho_0}$ й відповідно $\tilde{c} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{c}{c_0}$, де $c_0 = \frac{G_0}{\rho_0}$, $G_0 = 50 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$. Якщо не вказано інакше, то $G = G_0$ та $\rho = \rho_0$.

Крутильний момент має вигляд – $M = \frac{M}{G_0}$, момент інерції накладки розраховується за формулою $J = \frac{V_{a_0} \rho_{a_0}}{2 \rho_0} (a_0 \sin \psi)^2$, де густина накладки має значення $\rho_{a_0} = 7 \text{ г/см}^3$ та об'єм накладки має значення $V_{a_0} = 0.1$. Якщо не вказано інакше $F(\theta) = \theta$.

Розміри тріщини будуть змінюватися відносно розмірів конусу, тобто $\gamma = h_\gamma \psi$, $R_0 = a_0 + h_{R_0} (a_1 - a_0)$ та $R_1 = a_0 + h_{R_1} (a_1 - a_0)$, де $R_0 = \frac{R_0}{r_0}$ та $R_1 = \frac{R_1}{r_0}$. Параметри h_γ , h_{R_0} та h_{R_1} вказуються для кожного окремого випадку. Лінійна довжина тріщини позначатиметься $l_R = R_1 - R_0$ та $h_{l_R} = h_{R_1} - h_{R_0}$.

4.3.1. Аналіз власних частот

Власні частоти розраховано за методикою описаною у [19], яка більш детально описана в Пункті 3.3.1.

Для початку числового аналізу, проаналізовано вплив сферичної тріщини на значення резонансних частот конусу. На Рис. 4.2. можна побачити графіки розповсюдження власних частот для конусу без тріщини та для конусу з кінцевою тріщиною, яка задана параметрами $h_\gamma = 0.1$, $h_{R_0} = 0.25$ та $h_{R_1} = 0.75$. Як можна побачити при заданих характеристиках тріщини впливу на перші власні частоти конусу майже немає. Подальший аналіз власних частот та КІН у Пункті 4.3.3. привів до того, що кінчні тріщини з іншими допустимими параметрами не мають суттєвого впливу на власні частоти конусу.

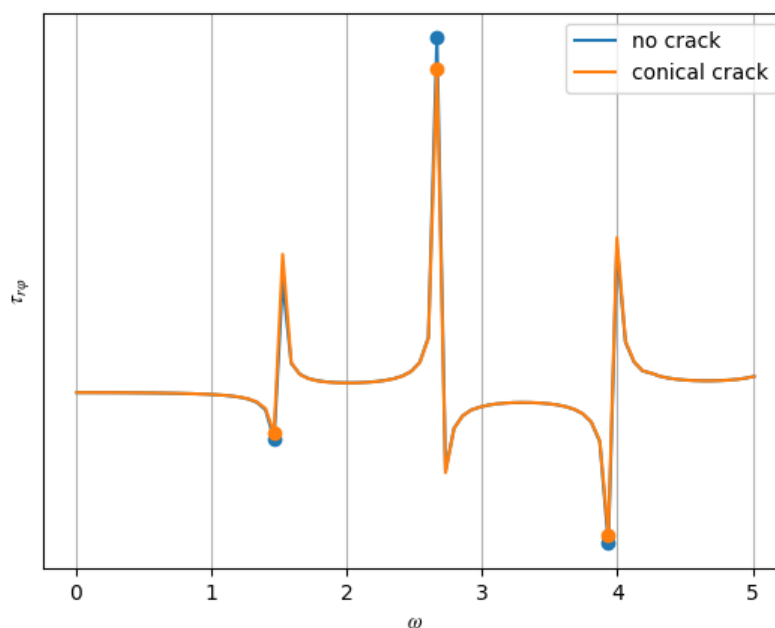


Рис. 4.2. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \psi)$ при зміні частоти ω для конусу з та без конічної тріщини з параметрами $h_\gamma = 0.1$, $h_{R_0} = 0.25$ та $h_{R_1} = 0.75$

4.3.2. Аналіз напружень

На Рис. 4.3. можна побачити графік напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ на боковій поверхні конусу $\theta = \psi$ при частоті коливань $\omega = 2$ у випадках наявності в конусі конічної тріщини та її відсутності. Тріщина характеризується параметрами $h_\gamma = 0.1$, $h_{R_0} = 0.25$ та $h_{R_1} = 0.75$. Видно, що вплив наявності тріщини є несуттєвим. Подальший аналіз, при різних геометричних характеристиках конічної тріщини, не показав істотного збільшення впливу тріщини на хвильове поле конусу. Можна зробити висновки що конічна тріщина, порівняно зі сферичною тріщиною, має майже відсутній вплив на хвильове поле конусу так само як і на розповсюдження власних частот конусу.

Через відносно невеликий кількісний вплив конічної тріщини на напруження конусу, тільки аналіз КІН може показати якісний вплив геометричних характеристик тріщини на хвильове поле конусу.

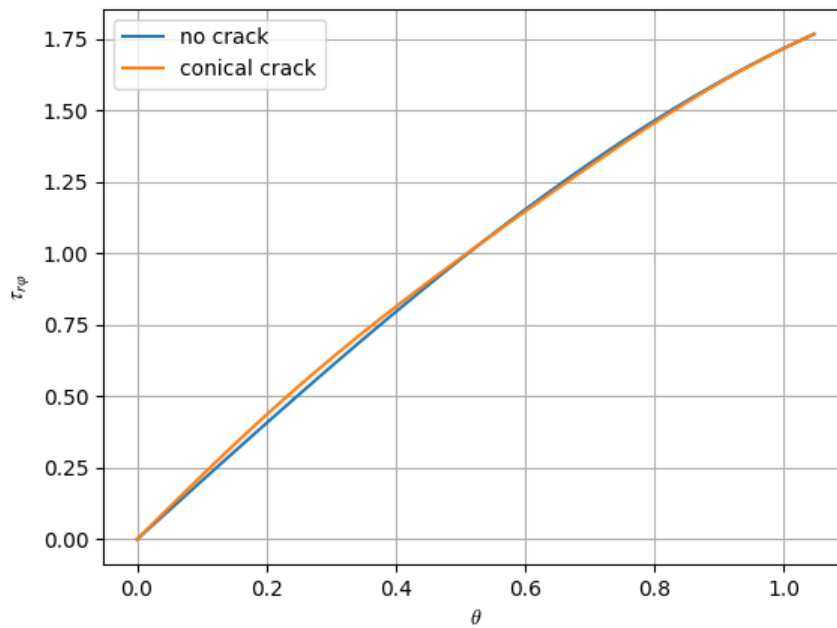


Рис. 4.3. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для конусу з та без конічної тріщини при частоті коливань $\omega = 2$

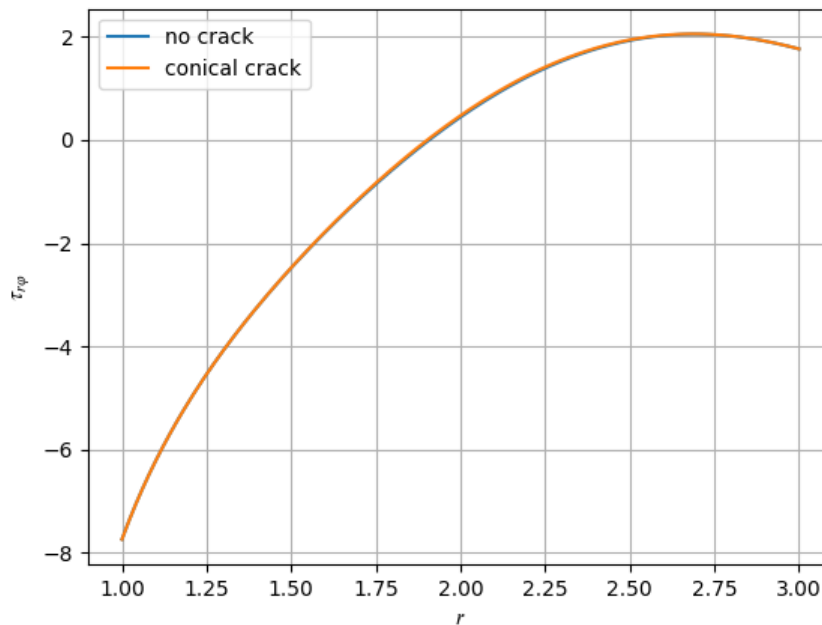


Рис. 4.4. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_1, \theta)$ для конусу з та без конічної тріщини при частоті коливань $\omega = 2$

Також було чисельно перевірене виконання крайових умов для розв'язку отриманого Підрозділі 4.2, які виконувались з точністю принаймні 10^{-3} .

4.3.3. Аналіз КІН на берегах тріщини

В цьому підрозділі було знайдено та проаналізовано КІН K_{III}^+ та K_{III}^- , на берегах тріщини $\theta = \gamma$, $r = R_0 + 0$, за формулами

$$K_{III}^- = \lim_{r \rightarrow R_0 - 0} \sqrt{2\pi(R_0 - r)} \bar{\tau}(r, \gamma) \quad (4.31)$$

$$K_{III}^+ = \lim_{r \rightarrow R_1 + 0} \sqrt{2\pi(r - R_1)} \bar{\tau}(r, \gamma). \quad (4.32)$$

Після проведення підстановки (2.23), (4.22) та заміни (4.17) в (4.31) й (4.32), маємо

$$K_{III}^- = 2G\sqrt{\pi R_0} \lim_{r \rightarrow -1 - 0} \sqrt{(-1 - x)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \chi_1(y) \ln \frac{1}{|x - y|} dy \right)$$

$$K_{III}^+ = 2G\sqrt{\pi R_1} \lim_{r \rightarrow 1 + 0} \sqrt{(x - 1)} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \chi_1(y) \ln \frac{1}{|x - y|} dy \right).$$

З урахуванням формул (4.23), (4.8), (4.19), співвідношення [8]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - y|} \sqrt{1 - y^2} U_n(y) dy &= \frac{(n + 1)^2 2^{n+2}}{(x - 1)^{n+2}} \left[F\left(\frac{3}{2} + n, n + 2; \frac{3}{2}; \frac{x + 1}{x - 1}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{n + 1}{2} \sqrt{\frac{1 - x}{-1 - x}} F\left(\frac{3}{2} + n, n + 1; \frac{1}{2}; \frac{x + 1}{x - 1}\right) \right] \end{aligned}$$

та поведінки гіпергеометричних функцій [18, 9.131] отримано КІН у вигляді

$$K_{III}^- = 2G\alpha\sqrt{\pi R_0} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n (n + 1) (-1)^n$$

$$K_{III}^+ = 2G\alpha\sqrt{\pi R_1} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n (n + 1).$$

КІН проаналізовано при різному розташуванні сферичної тріщини всередині конусу. На Рис. 4.5. та Рис. 4.6. зображено КІН K_{III}^- та K_{III}^+ відповідно, при зміні параметру h_γ , що відповідає за кут отвору тріщини, при $h_{R_0} = 0.45$, $h_{R_0} = 0.55$ та $\omega = 2$. На Рис. 4.7. та Рис. 4.8. зображено КІН K_{III}^- та K_{III}^+ відповідно при вказаних раніше параметрів окрім частоти яка дорівнює $\omega = 3.2$. Можна побачити, що при

зменшені куту отвору тріщини абсолютні значення КІН збільшуються незалежно від фази.

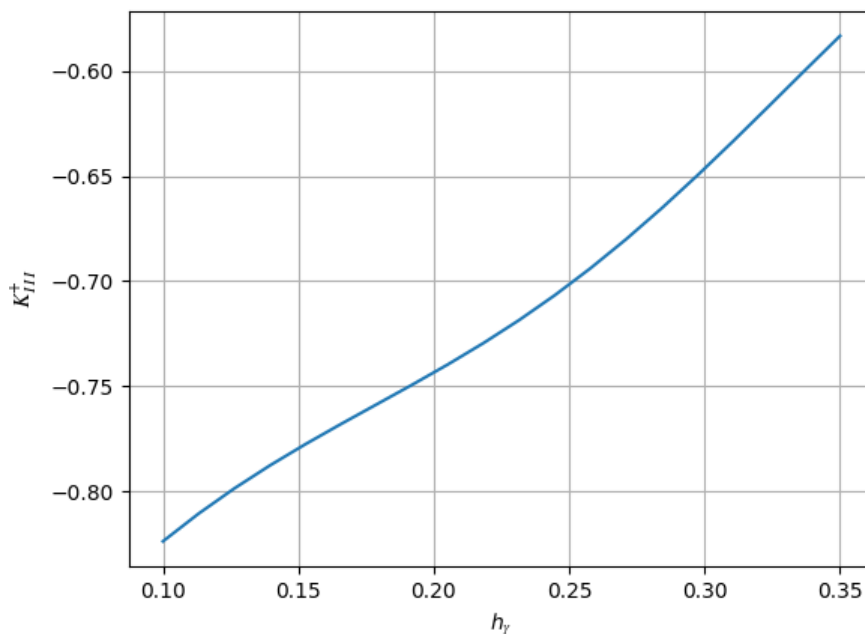


Рис. 4.5. Кін K_{III}^+ при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.35$, $h_{R_0} = 0.45$, $h_{R_0} = 0.55$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

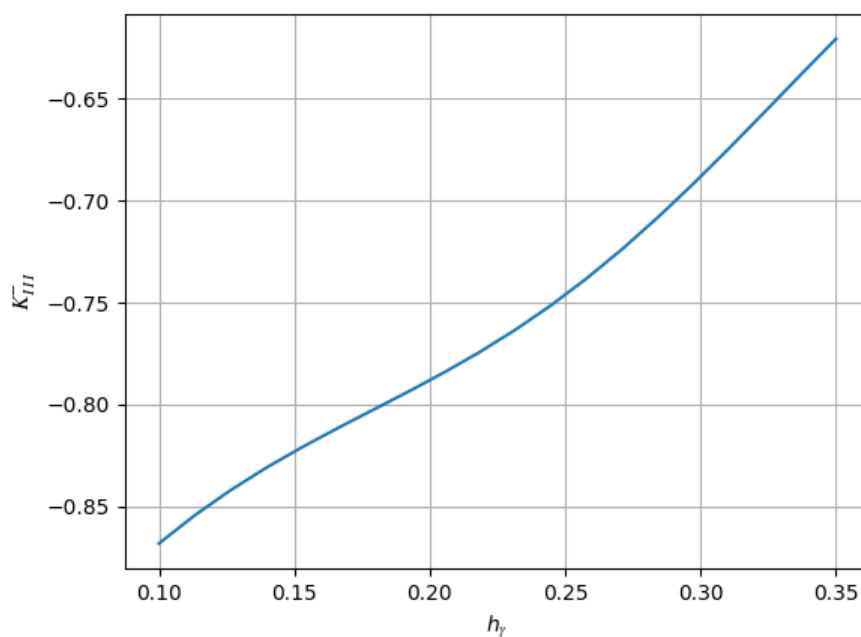


Рис. 4.6. Кін K_{III}^- при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.35$, $h_{R_0} = 0.45$, $h_{R_0} = 0.55$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

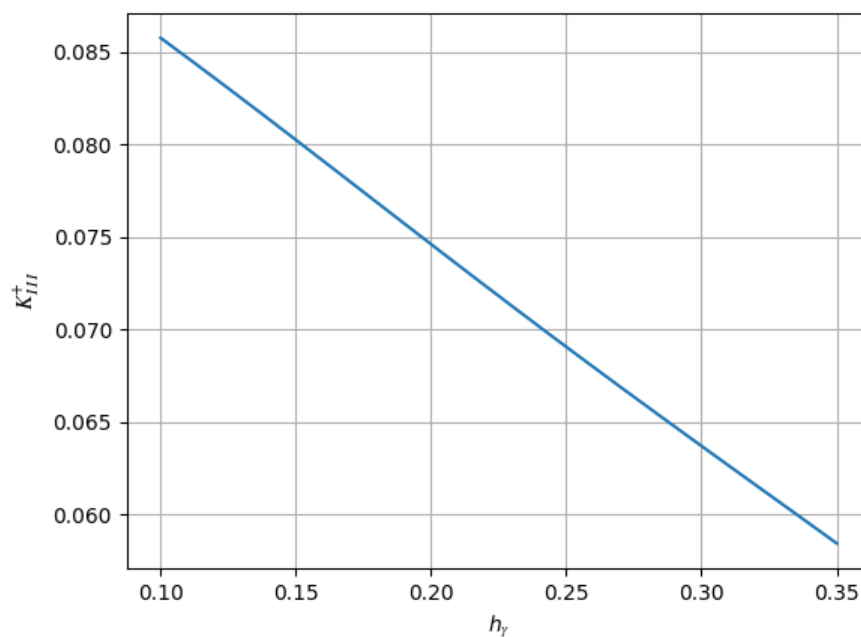


Рис. 4.7. Кін K_{III}^+ при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.35$, $h_{R_0} = 0.45$, $h_{R_0} = 0.55$

та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

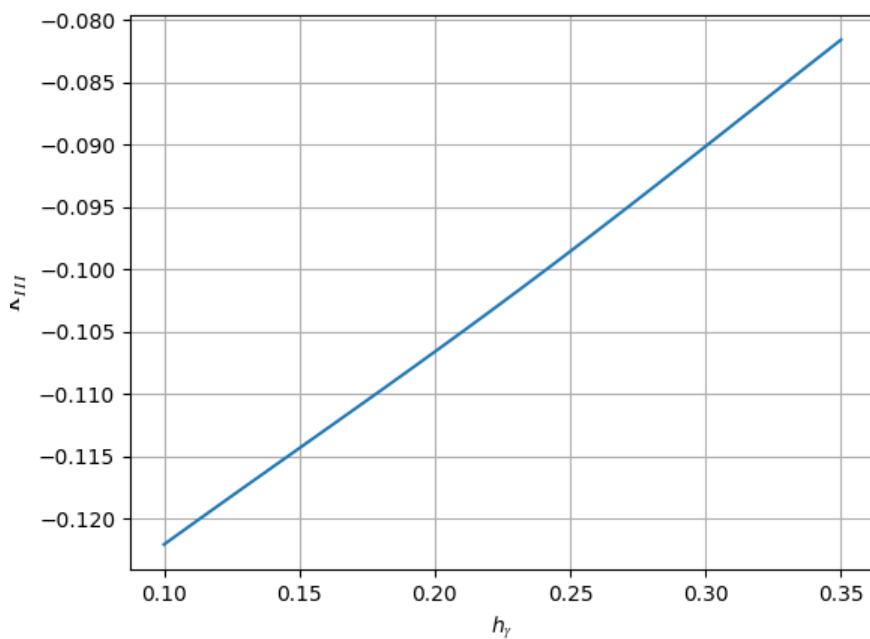


Рис. 4.8. Кін K_{III}^- при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_\gamma \leq 0.35$, $h_{R_0} = 0.45$, $h_{R_0} = 0.55$

та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

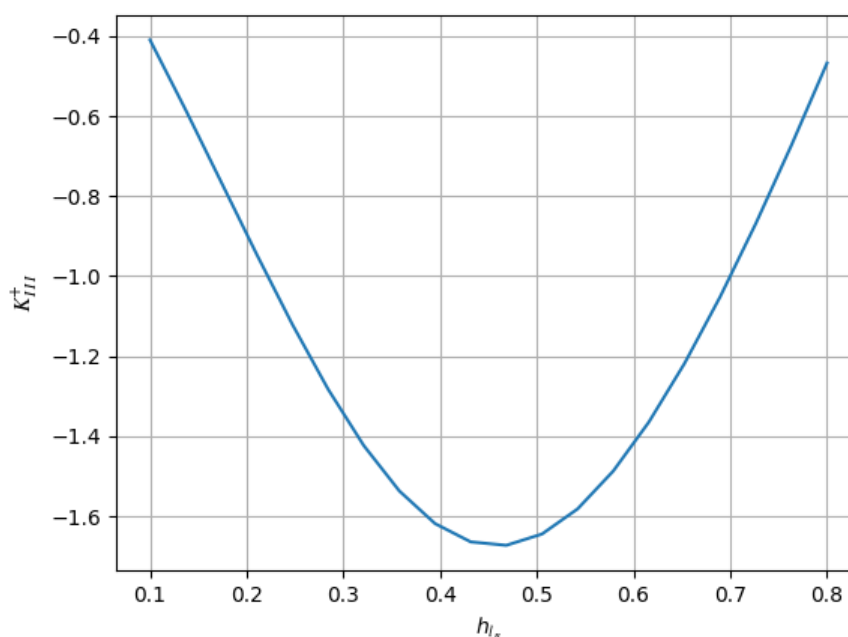


Рис. 4.9. Кін K_{III}^+ при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_{l_R} \leq 0.4$, $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

На Рис. 4.9 та Рис. 4.10 зображено КІН K_{III}^- та K_{III}^+ відповідно, в залежності від довжини тріщини, при її розташуванні рівно в середині конусу та постійному куті отвору ($h_\gamma = 0.5$) та частоті коливань $\omega = 2$. В той же час на Рис. 4.11 та Рис. 4.12 зображено аналогічні графіки але при частоті $\omega = 3.2$. Розглянуті графіки дозволяють зробити висновки, що КІН має хвильову поведінку як і у випадку сферичного конусу та знак коефіцієнту інтенсивності напруги на берегах тріщини залежить від фази на якій знаходиться частота та того на якому з берегів розглядається КІН. КІН біля краю R_0 має більші абсолютні значення ніж на краю R_1 .

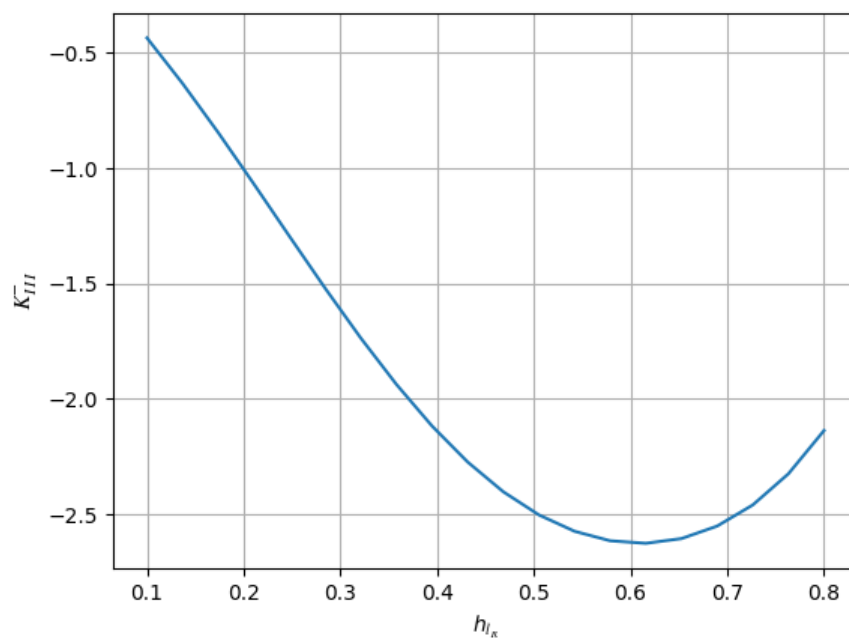


Рис. 4.10. Кін K_{III}^- при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_{l_R} \leq 0.8$, $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 2$

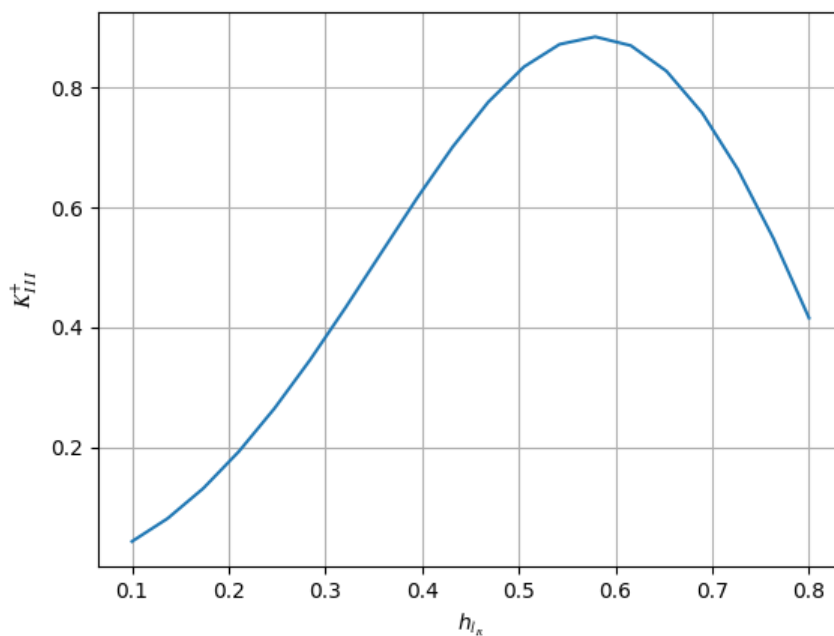


Рис. 4.11. Кін K_{III}^+ при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_{l_R} \leq 0.4$, $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

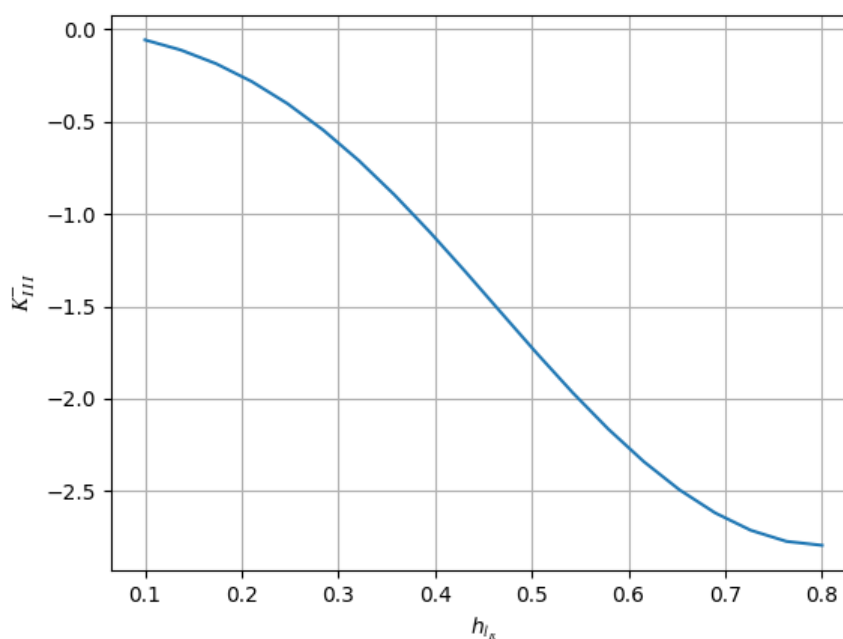


Рис. 4.12. Кін K_{III}^- при тріщині з параметрами $0.1 \leq h_{l_R} \leq 0.4$, $h_\gamma = 0.5$ та частоті сталих коливань $\omega = 3.2$

4.4. Висновки до четвертого розділу

Отримано розв'язок динамічної задачі кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного конусу послабленого конічною тріщиною у випадку сталих коливань. Порівняно значення власних частот та хвильове поле конусу у випадках наявності та відсутності сферичної тріщини в середині конусу. На основі проробленого аналізу можна зробити висновок що тріщина конічної форми має набагато менший вплив на розповсюдження власних частот та хвильове поле конусу ніж тріщина сферичної форми. Проаналізовано КІН на берегах тріщини для різних геометричних характеристик конічної тріщини.

РОЗДІЛ 5.

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО СФЕРИЧНО ШАРУВАТОГО ПРУЖНОГО КОНУСУ

У розділі досліджено динамічну задачу кручення двічі-зрізаного сферично шаруватого пружного конусу. Момент кручення прикладено до нижньої сферичної поверхні через абсолютно жорстку накладку. Пошук неперервного розв'язку проведено з використанням інтегрального перетворення Г.Я. Попова [59]. Розв'язок знайдено для довільної кількості шарів.

Проведено числовий аналіз розподілу напружень на боковій поверхні конусу у залежності від різних механічних або геометричних характеристик шарів конусу. Проведено аналіз власних частот.

Результати розділу опубліковано в праці [2] та в тезах конференцій [4, 7].

5.1. Постановка задачі

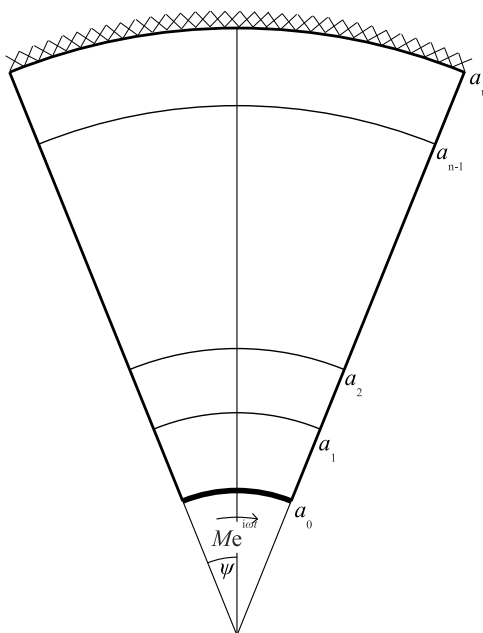


Рис. 5.1. Геометрія сферично шаруватого конусу

Розглянуто пружний двічі-зрізаний сферично шаруватий конус (Рис. 5.1) ($G^{(j)}$ – модуль пружності j -го шару, $\rho^{(j)}$ – густина j -го шару), який займає область, що описується у сферичній системі координат співвідношеннями

$a_0 \leq r \leq a_n, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ із $n \geq 1$ шарами, на які конус поділено сферичними поверхнями $r = a_j, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty, j = \overline{1, n-1}$.

До конусу по нижній сферичній поверхні $r = a_0, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ прикладено крутильний момент через абсолютно жорстку накладку

$$w^{(1)}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=a_0} = \alpha(t) l F(\theta), \quad (5.1)$$

де $w^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) = u_{\varphi}^{(j)}(r, \theta, \varphi, t)$ – єдине не нульове переміщення для відповідного шару, $j = \overline{1, n}$ – індекс шару, $l = a_n - a_0$, $F(\theta)$ – довільна відома неперервна функція та $\alpha(t)$ – невідомий кут повороту, який знаходиться з рівняння руху накладки [51]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\psi}^{\psi} a_0^3 \sin^2 \theta \tau^{(1)}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=a_0} d\theta d\varphi + M(t) - \alpha''(t) J = 0, \quad (5.2)$$

де $\tau^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) = \tau_{r\varphi}^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) = G^{(j)} \left(\frac{\partial w^{(j)}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial r} - r^{-1} w^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) \right)$, $M(t)$ –

крутильний момент прикладений до накладки, J – момент інерції руху накладки.

Верхня сферична поверхня $r = a_n, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ закріплена

$$w^{(n)}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=a_n} = 0. \quad (5.3)$$

Бокова поверхня конуса $a_0 \leq r \leq a_1, \theta = \psi, -\pi \leq \varphi < \pi, 0 \leq t < \infty$ вільна від напруження

$$\bar{\tau}^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{\theta=\psi} = G^{(j)} r^{-1} \left(\frac{\partial w^{(j)}(r, \theta, \varphi, t)}{\partial \theta} - w^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) \cot \theta \right) \Big|_{\theta=\psi} = 0, j = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

де $\bar{\tau}^{(j)}(r, \theta, \varphi, t) = \tau_{\theta\varphi}^{(j)}(r, \theta, \varphi, t)$.

Умови на стиках шарів мають вигляд умов ідеального контакту, тобто

$$\begin{cases} w^{(j)}(a_j, \theta, \varphi, t) = w^{(j+1)}(a_j, \theta, \varphi, t) \\ \tau^{(j)}(a_j, \theta, \varphi, t) = \tau^{(j+1)}(a_j, \theta, \varphi, t) \end{cases}, j = \overline{1, n-1}. \quad (5.5)$$

Для розв'язання проблеми знайдено невідоме переміщення, що задовольняє умовам на поверхнях конуса (5.1)-(5.4), умовам на стиках шарів (5.5) та рівнянню кручення при нульових початкових умовах.

Як і у випадку цільного конусу, задачу розв'язано у випадку усталених коливань (2.9) та множник $e^{i\omega t}$ опускається у всіх формулах. Задача осесиметрична, тому змінна φ ігнорується бо не впливає на розв'язок. Розв'язок достатньо провести для половини конусу $a_0 \leq r \leq a_n, 0 \leq \theta \leq \psi$, а на іншу половину продовжити по симетрії. З урахуванням вищезазначеного, задача має вигляд

Рівняння кручення

$$\left(r^2 \left(w^{(j)}(r, \theta) \right)' \right)' + \frac{\left(\sin \theta \left(w^{(j)}(r, \theta) \right)^\bullet \right)^\bullet}{\sin \theta} - \frac{w^{(j)}(r, \theta)}{\sin^2 \theta} = -r^2 \left(q^{(j)} \right)^2 w^{(j)}(r, \theta), \quad (5.6)$$

$$0 \leq \theta \leq \psi, a_{j-1} \leq r \leq a_j$$

де $q^{(j)} = \frac{\omega}{c^{(j)}}$ – хвильове число, $c^{(j)} = \sqrt{G^{(j)} / \rho^{(j)}}$ – швидкість поперечних хвиль та $j = \overline{1, n}$.

Граничні умови

$$w^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=a_0} = \alpha l F(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \psi \quad (5.7)$$

$$w^{(n)}(r, \theta) \Big|_{r=a_n} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \psi \quad (5.8)$$

$$G^{(j)} r^{-1} \left(\left(w^{(j)}(r, \psi) \right)^\bullet - w^{(j)}(r, \psi) \cot \psi \right) = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.9)$$

де кут α знаходиться з рівняння руху накладки

$$2\pi a_0^3 \int_0^\psi \sin^2 \theta \left(\tau^{(1)}(r, \theta) \right) \Big|_{r=a_0} d\theta + M + \omega^2 \alpha J = 0, \quad (5.10)$$

та умови на стиках шарів

$$\begin{cases} w^{(j)}(a_j, \theta) = w^{(j+1)}(a_j, \theta) \\ \tau^{(j)}(a_j, \theta) = \tau^{(j+1)}(a_j, \theta) \end{cases}, \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (5.11)$$

5.2. Побудова одновимірної задачі та її розв'язання

В цьому підрозділі для розв'язання задачі кручення двічі-зрізаного сферично шаруватого пружного конусу було знайдене переміщення $w^{(j)}(r, \theta)$.

Задачу зведено до одновимірної крайової задачі шляхом застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова (2.28) за змінною θ до рівняння кручення (5.6) та крайових умов (5.7) та (5.8) в наступному вигляді

$$w_k^{(j)}(r) = \int_0^{\psi} \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta$$

$$w^{(j)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k^{(j)}(r) P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \quad (5.12)$$

Застосуємо пряме інтегральне перетворення (5.12) до рівняння (5.6). Права частина рівняння (5.6) переноситься в ліву, рівняння помножається її на $\sin \theta P_{\nu_k}^1(\cos \theta)$ та інтегрується за змінною θ на сегменті $0 \leq \theta \leq \psi$

$$\int_0^{\psi} \sin \theta P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \left[\left(r^2 (w^{(j)}(r, \theta))' \right)' + \frac{\left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \right) \dot{}}{\sin \theta} - \right. \quad (5.13)$$

$$\left. - \frac{w^{(j)}(r, \theta)}{\sin^2 \theta} + r^2 (q^{(j)})^2 w^{(j)}(r, \theta) \right] d\theta$$

Другий доданок в (5.13) інтегрується по частинам двічі

$$\int_0^{\psi} P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \dot{} \right) d\theta = \int_0^{\psi} w^{(j)}(r, \theta) \left(\sin \theta (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \dot{} \right) d\theta +$$

$$+ \left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \dot{} P_{\nu_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \dot{} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\psi}$$

У першому доданку в (5.13) інтегрування вноситься під похідну та отримаємо

$$\int_0^{\psi} \sin \theta P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \left(r^2 (w^{(j)}(r, \theta))' \right)' d\theta = \left(r^2 (w_k^{(j)}(r))' \right)'$$

Інтеграл (5.13) приймає вигляд

$$\left(r^2 (w_k^{(j)}(r))' \right)' + \left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \cdot P_{\nu_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \right)_{\theta=\psi} +$$

$$+ \int_0^\psi \left(\frac{\left(\sin \theta (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \right) \cdot}{\sin \theta} - \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} + P_{\nu_k}^1(\cos \theta) r^2 (q^{(j)})^2 \right) \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) d\theta$$

У отриманому виразі зверху додаємо і віднімаємо від підінтегрального доданку $\nu_k (\nu_k + 1) P_{\nu_k}^1(\cos \theta)$, та з урахуванням узагальненого рівняння Лежандра в полярній формі (2.32) отримаємо

$$\left(r^2 (w_k^{(j)}(r))' \right)' + \left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \cdot P_{\nu_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \right)_{\theta=\psi} +$$

$$+ \left(r^2 (q^{(j)})^2 - \nu_k (\nu_k + 1) \right) w_k^{(j)}(r)$$

Таким чином рівняння кручення (5.6) перетвориться на

$$\left(r^2 (w_k^{(j)}(r))' \right)' + \left(r^2 (q^{(j)})^2 - \nu_k (\nu_k + 1) \right) w_k^{(j)}(r) =$$

$$= - \left(\sin \theta (w^{(j)}(r, \theta)) \cdot P_{\nu_k}^1(\cos \theta) - \sin \theta w^{(j)}(r, \theta) (P_{\nu_k}^1(\cos \theta)) \right)_{\theta=\psi} \quad (5.14)$$

Коефіцієнти перетворення Попова ν_k обрано таким чином, щоб задовольняти рівнянню (2.33), таким чином права частина рівності (5.14) дорівнює нулю.

Крайова задача (5.6)-(5.11) у просторі трансформант приймає вигляд

$$\left(r^2 (w_k^{(j)}(r))' \right)' + \left(r^2 (q^{(j)})^2 - \nu_k (\nu_k + 1) \right) w_k^{(j)}(r) = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, j = \overline{1, n} \quad (5.15)$$

$$w_k^{(1)}(r) \Big|_{r=a_0} = \alpha F_k, 0 \leq \theta \leq \psi \quad (5.16)$$

$$w_k^{(n)}(r) \Big|_{r=a_1} = 0, 0 \leq \theta \leq \psi \quad (5.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k^{(j)}(r)|_{r=a_j} = w_k^{(j+1)}(r)|_{r=a_j} \\ G^{(j)} \left(\frac{\partial w_k^{(j)}(r)}{\partial r} - r^{-1} w_k^{(j)}(r) \right) \Big|_{r=a_j} = G^{(j+1)} \left(\frac{\partial w_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} - r^{-1} w_k^{(j+1)}(r) \right) \Big|_{r=a_j} \end{array} \right. , j = \overline{1, n-1},$$

(5.18)

де $F_k = \int_0^{\psi} \sin \theta F(\theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta$.

Для побудови розв'язку одновимірної крайової задачі побудовано фундаментальну систему розв'язків $\{ {}_1\Phi_k^{(j)}(r), {}_2\Phi_k^{(j)}(r) \}$ рівняння (5.15). У рівнянні (5.15) проведено заміну

$$w_k^{(j)}(r) = r^{-\frac{1}{2}} \tilde{w}_k^{(j)}(r),$$

яка зводить його до рівняння Бесселя

$$r \left(r \left(\tilde{w}_k^{(j)}(r) \right)' \right)' + \left(r^2 \left(q^{(j)} \right)^2 - \left(\nu_k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \tilde{w}_k^{(j)}(r) = 0, \quad a_{j-1} \leq r \leq a_j, j = \overline{1, n}.$$

З огляду на зроблену заміну та на загальновідомі розв'язки рівняння Бесселя отримано фундаментальні розв'язки рівняння (5.15) у вигляді

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_k^{(j)}(r) &= r^{-\frac{1}{2}} J_{\nu_k+1/2}(q^{(j)}r) \\ {}_2\Phi_k^{(j)}(r) &= r^{-\frac{1}{2}} Y_{\nu_k+1/2}(q^{(j)}r) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Загальний розв'язок задачі (5.15)-(5.18) побудовано у формі [65]

$$w_k^{(j)}(r) = {}_1\Phi_k^{(j)}(r) {}_1C_k^{(j)} + {}_2\Phi_k^{(j)}(r) {}_2C_k^{(j)}, j = \overline{1, n}, \quad (5.20)$$

де невідомі константи $\{ {}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$ знайдено при задовільненні граничних умов (5.16), (5.17) та умов на стиках шарів (5.18). Ці умови разом формують систему $2n$ рівнянь з $2n$ змінних.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_k^{(1)}(r) \Big|_{r=a_1} = \alpha l F_k \\ w_k^{(j)}(r) \Big|_{r=a_j} = w_k^{(j+1)}(r) \Big|_{r=a_j} \\ \left(\frac{\partial w_k^{(j)}(r)}{\partial r} - r^{-1} w_k^{(j)}(r) \right) \Big|_{r=a_j} = \frac{G^{(j+1)}}{G^{(j)}} \left(\frac{\partial w_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} - r^{-1} w_k^{(j+1)}(r) \right) \Big|_{r=a_j}, j = \overline{1, n-1} \\ w_k^{(n)}(r) \Big|_{r=a_n} = 0 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Детальний розв'язок системи (5.21) наведено у Додатку Е. Остаточні формули для розрахунку констант $\{ {}_1 C_k^{(j)}, {}_2 C_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$ знайдено у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_1 C_k^{(j)} = \alpha l F_{k1} C_k^{(j)} \\ {}_2 C_k^{(j)} = \alpha l F_{k2} C_k^{(j)} \end{array} \right., j = \overline{1, n},$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_1 C_k^{(j)} = \frac{{}_1 A_k^{(j)}}{{}_1 \Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1 A_k^{(1)} + {}_2 \Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2 A_k^{(1)}}, j = \overline{1, n}, \\ {}_2 C_k^{(j)} = \frac{{}_2 A_k^{(j)}}{{}_1 \Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1 A_k^{(1)} + {}_2 \Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2 A_k^{(1)}} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

де коефіцієнти $\{ {}_1 A_k^{(j)}, {}_2 A_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$ розраховуються за ітеративними формулами та формули для пошуку коефіцієнтів $\{ {}_1 A_k^{(j)}, {}_2 A_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$ та $\{ {}_1 B_k^{(j)}, {}_2 B_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$ наведено у Додатку Е.

Для отримання розв'язку в оригінальному просторі до розв'язку (5.20) застосовано обернене перетворення (5.12) та отримано

$$w_k^{(j)}(r, \theta) = \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \Psi_k^{(j)}(r), j = \overline{1, n}, \quad (5.23)$$

де

$$\Psi_k^{(j)}(r) = {}_1 \Phi_k^{(j)}(r) {}_1 C_k^{(j)} + {}_2 \Phi_k^{(j)}(r) {}_2 C_k^{(j)}, j = \overline{1, n}.$$

Напруження $\tau^{(j)}(r, \theta)$ та $\bar{\tau}^{(j)}(r, \theta)$ отримано за формулами

$$\tau^{(j)}(r, \theta) = G^{(j)} \left(\frac{\partial w^{(j)}(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w^{(j)}(r, \theta) \right), j = \overline{1, n}$$

$$\bar{\tau}^{(j)}(r, \theta) = G^{(j)} r^{-1} \left(\frac{\partial w^{(j)}(r, \theta)}{\partial \theta} - w^{(j)}(r, \theta) \cot \theta \right), j = \overline{1, n},$$

тобто

$$\tau^{(j)}(r, \theta) = G^{(j)} \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \left(\frac{\partial \Psi_k^{(j)}(r)}{\partial r} - \Psi_k^{(j)}(r) \right), j = \overline{1, n}$$

та

$$\bar{\tau}^{(j)}(r, \theta) = G^{(j)} r^{-1} \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^2(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \Psi_k^{(j)}(r), j = \overline{1, n}.$$

Формулу для розрахунку куту повороту α знайдено з рівняння (5.10) й вона має вигляд

$$\alpha = M \left(J + G^{(1)} 2\pi a_0^3 \int_0^{\psi} \sin^2 \theta \left(\tau^{(1)}(r, \theta) \right) \Big|_{r=a_0} d\theta \right)^{-1},$$

де $\tau^{(1)}(r, \theta) = \frac{\tau^{(1)}(r, \theta)}{\alpha}$.

В якості висновку до підрозділу 5.2, треба зазначити, що коли кількість шарів дорівнює одному, ми отримуємо розв'язок

$$w^{(1)}(r, \theta) = \alpha l \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\psi} \sin \eta F(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) d\eta \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \Psi_k^{(j)}(r),$$

де

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(1)} = \alpha l^{(1)} F_k \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) - {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) \frac{{}_1\Phi_k^{(1)}(a_1)}{{}_2\Phi_k^{(1)}(a_1)} \right)^{-1} \\ {}_2C_k^{(1)} = \alpha l^{(1)} F_k \left(-{}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) \frac{{}_2\Phi_k^{(1)}(a_1)}{{}_1\Phi_k^{(1)}(a_1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) \right)^{-1} \end{cases}$$

Після підстановки констант до розв'язку та проведення нескладних перетворень отримаємо розв'язок який точно дорівнює розв'язку (2.40), для задачі кручення цільного конусу. Також нескладно перекоонатися, що у випадку коли усі чисельні характеристики, для різних шарів, дорівнюють одна одній, тобто

$$G^{(j+1)} = G^{(j)}, \quad \rho^{(j+1)} = \rho^{(j)}, \quad j = \overline{1, n-1},$$

то фундаментальні розв'язки (5.19) будуть однаковими для всіх шарів й тоді матимемо константи у вигляді

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(j)} = \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) - {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) \frac{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)} \right)^{-1} \\ {}_2C_k^{(j)} = \left(-{}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) \frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) \right)^{-1}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

звідки видно, що константи для одного шару не залежать від констант іншого, та те що розв'язок для кожного шару, також як і у випадку єдиного шару, прийме вигляд (2.40) як у Розділі 2.

5.3. Числовий аналіз результатів розрахунку

Для проведення якісного числового аналізу розрахунки у цьому розділі проведено у безрозмірних координатах так само, як вони наведені у Підрозділі 3.3.

Безрозмірний лінійний радіус змінюється за формулою $\tilde{r} = \frac{r}{r_0}$ таким чином \tilde{r}

змінюється в інтервалі $a_0 < \tilde{r} < a_n$, де $a_j = \frac{a_j}{r_0}$, $j = \overline{0, n}$ та $r_0 = 5$ см. Якщо не вказано

інакше, то $a_0 = r_0$. Лінійний розмір подано формулою $h_r = \frac{a_n}{a_0}$ та він дорівнює. Кут

отвору конусу має значення $\psi = \frac{\pi}{3}$, якщо не вказано інакше.

Механічні характеристики відповідно до Підрозділу 3.3 подаються за формулами $G^{(j)} = \frac{G^{(j)}}{G_0}, j = \overline{1, n}$, $\rho^{(j)} = \frac{\rho^{(j)}}{\rho_0}, j = \overline{1, n}$ й відповідно

$\tilde{c}^{(j)} = \sqrt{\frac{G^{(j)}}{\rho^{(j)}}} = \frac{c^{(j)}}{c_0}, j = \overline{1, n}$, де $c_0 = \frac{G_0}{\rho_0}$, $G_0 = 50 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 5 \text{ г/см}^3$. Якщо не

вказано інакше, то $G^{(1)} = G_0$ та $\rho^{(1)} = \rho_0$. Значення густини модулю зсуву та густини для усіх шарів окрім першого уточнено в кожному окремому випадку.

Крутильний момент має вигляд – $M = \frac{M}{G_0}$, момент інерції накладки

розраховується за формулою $J = \frac{V_{a_0}}{2} \frac{\rho_{a_0}}{\rho_0} (a_0 \sin \psi)^2$, де густина накладки має

значення $\rho_{a_0} = 7 \text{ г/см}^3$ та об'єм накладки має значення $V_{a_0} = 0.1$. Якщо не вказано інакше $F(\theta) = \theta$.

5.3.1. Аналіз власних частот

Власні частоти розраховано за методикою описаною у [19], яка більш детально описана в Пункті 3.3.1.

При аналізі власних частот та хвильового поля конусу розглядаються шари конусу однакової довжини з механічними характеристиками (густина та модуль зсуву) які дискретно та лінійно змінюються від першого шару до останнього за наступною формулою

$$G^{(j)} = G^{(1)} + (j-1) \frac{G^{(n)} - G^{(1)}}{n-1}, j = \overline{1, n} \quad (5.24)$$

Таким чином достатньо лише задати значення густини та модулю зсуву для останнього шару (для першого вони задані та дорівнюють $G^{(1)} = G_0$ та $\rho^{(1)} = \rho_0$).

Введено відношення $h_{G^{(n)}} = \frac{G^{(n)}}{G^{(1)}}$, яке позначає ступінь жорсткості останнього шару порівняно з першим.

При заданій схемі розглянуто два випадки зміни механічних характеристик шарів: коли нижня сферична поверхня до якої прикладено крутильні навантаження є найжорсткішою в конусі, тобто $0 < h_{G^{(n)}} < 1$ та найм'якшою, тобто $h_{G^{(n)}} > 1$. На Рис. 5.2 та Рис. 5.3 зображено графіки розподілу інтервалів перших власних частот конусу для різних значень $h_{G^{(n)}}$ менше одиниці та більше одиниці відповідно, при кількості шарів $n = 20$. Можна побачити тренд, що при фіксованій жорсткості першого шару збільшення жорсткості інших за схемою (5.24) призводить до збільшення значень власних частот. Також у випадку $0 < h_{G^{(n)}} < 1$ пропорційний вплив зміни модулю зсуву суттєвіший ніж у випадку $h_{G^{(n)}} > 1$.

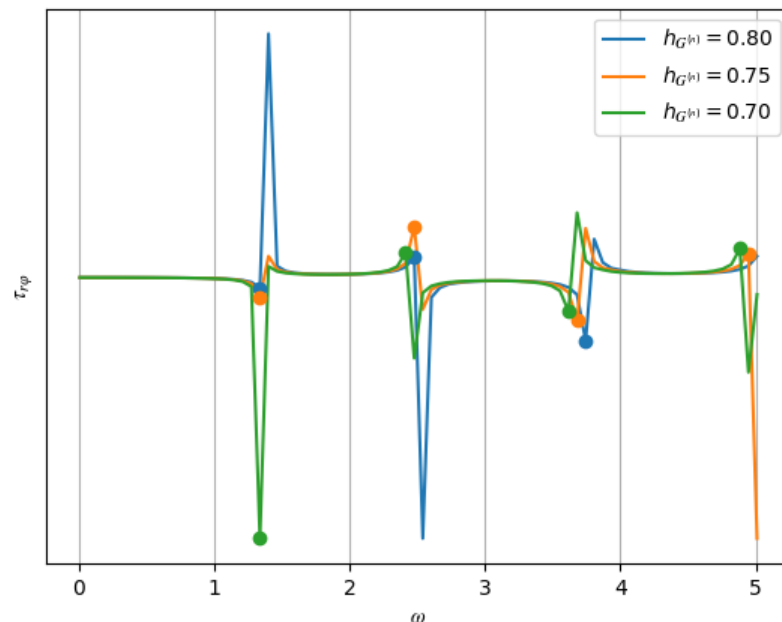


Рис. 5.2. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному модулю пружності у шарів, коли навантажений шар найжорсткіший

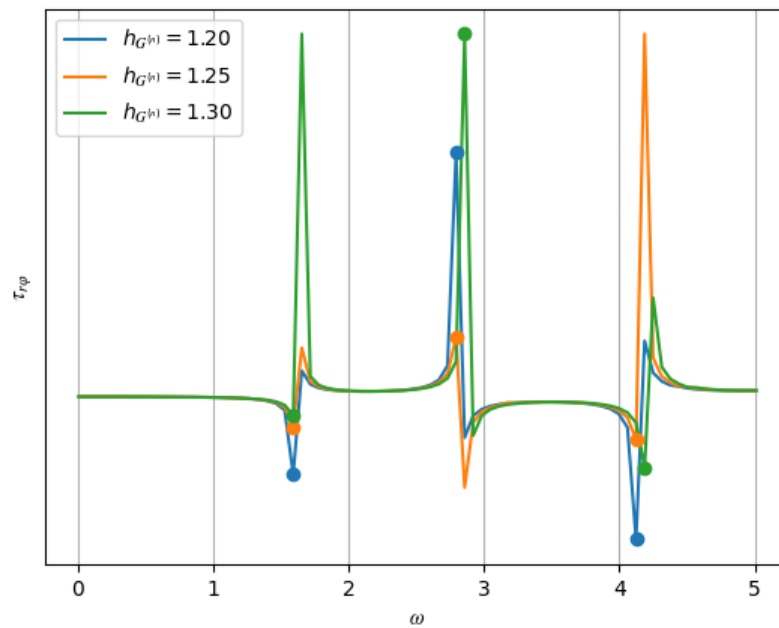


Рис. 5.3. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному модулю пружності у шарів, коли навантажений шар найм'якший

Також було порівняно перші власні частоти цільного конусу з модулем зсуву G та шаруватого конусу в якого в середньому модуль зсуву дорівнює модулю зсуву

для цільного конусу, тобто $G = \frac{\sum_{j=1}^n G^{(j)}}{n}$ та $n = 20$. Було розглянуто зміну модулю

зсуву за схемою (5.24) в шаруватому конусі при найжорсткішому нижньому шарі, тобто $G^{(1)} = 1.2G$, $G^{(n)} = 0.8G$ й $h_{G^{(n)}} = 1.5$, та при найм'якшому нижньому шарі,

тобто $G^{(1)} = 0.8G$, $G^{(n)} = 1.2G$ й $h_{G^{(n)}} = 0.66$. Перші власні частоти для описаних

конусів можна побачити на Рис. 5.4. Як можна побачити, у випадку, коли навантаження прикладається до найжорсткішого шару, перша резонансна частота більше ніж у цільного конусу та у конусу в якому навантаження прикладається до найм'якшого шару. Можна зробити висновок що маючи однакову середню жорсткість, при збільшенні частоти коливань, конус в якого обертання прикладено до нижньої сферичної поверхні яка є частиною найжорсткішого шару, досягне

першої резонансної частоти пізніше ніж цільний конус або конус з найм'якішим нижнім навантаженим шаром.

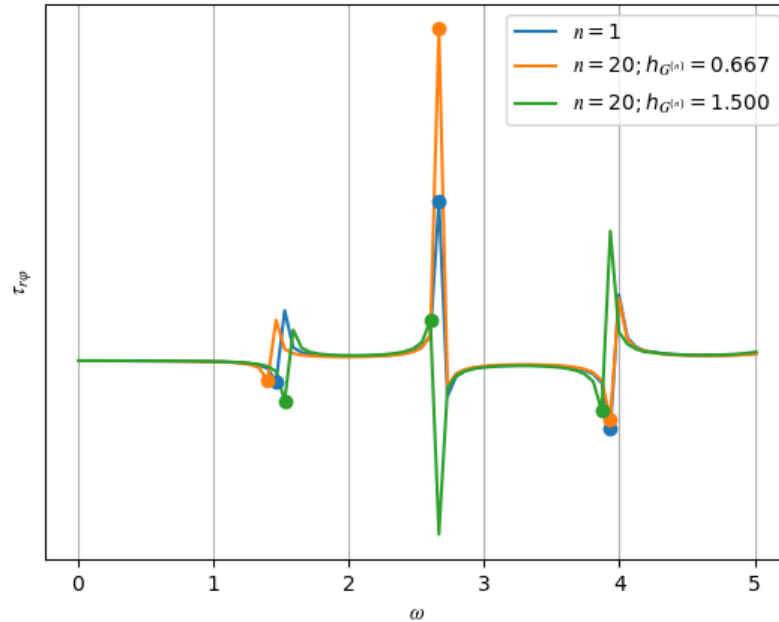


Рис. 5.4. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному модулю пружності у шарів, порівнюючи з цільним конусом

Досліджено, чи зберігається залежність між власними частотами та кутом отвору й лінійним розміром для шаруватого конусу, які встановлено в Пункті 3.3.1, в шаруватому конусі. На Рис. 5.5 та Рис. 5.6 показано зміну інтервалів, що містять власні частоти, при зміні куту отвору конусу для $h_{G^{(n)}} = 0.5$ та $h_{G^{(n)}} = 1.5$ відповідно, та кількості шарів $n = 20$. На Рис. 5.5 та Рис. 5.6 можна легко побачити, що збільшення куту отвору призводить до збільшення перших власних частот, незалежно від модулю зсуву. На Рис. 5.7 та Рис. 5.8 зображено розповсюдження перших власних частот при зміні відносного лінійного розміру конусу при попередньо встановлених характеристиках конусу. Видно, що залежність власних частот від лінійного розміру для шаруватого конусу теж співпадає з аналогічною залежністю для цільного конусу. Тобто при збільшенні лінійного розміру конусу зменшуються значення власних частот незалежно від модулю зсуву.

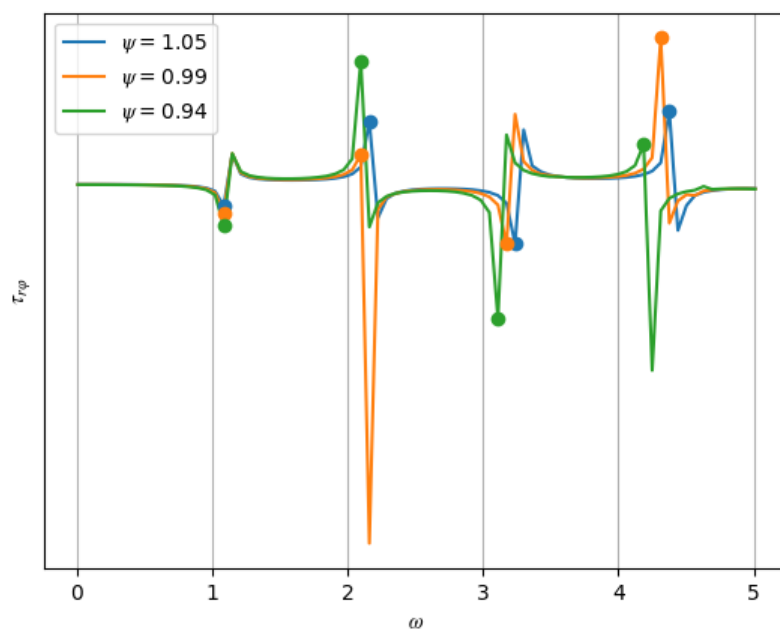


Рис. 5.5. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному куті отвору конусу, коли навантажений шар найжорсткіший, тобто $h_{G^{(n)}} = 0.5$

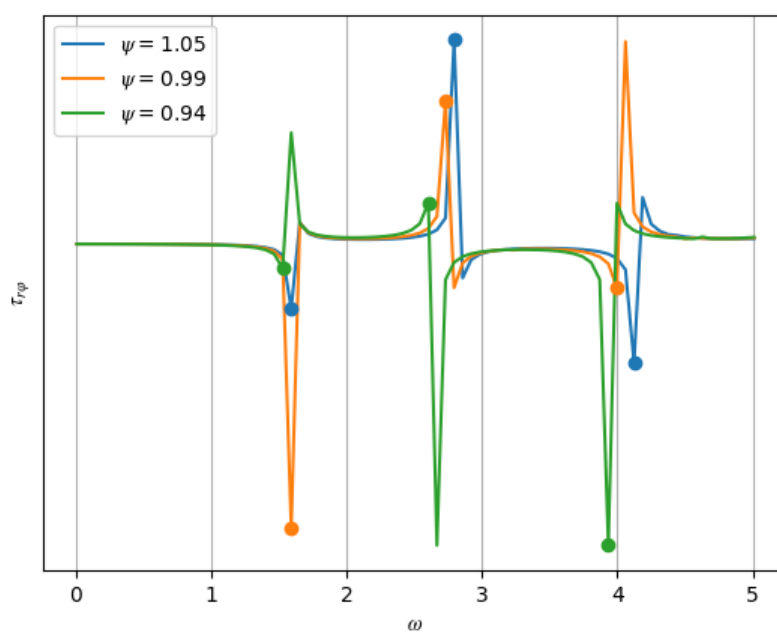


Рис. 5.6. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному куті отвору конусу, коли навантажений шар найм'якший, тобто $h_{G^{(n)}} = 1.5$

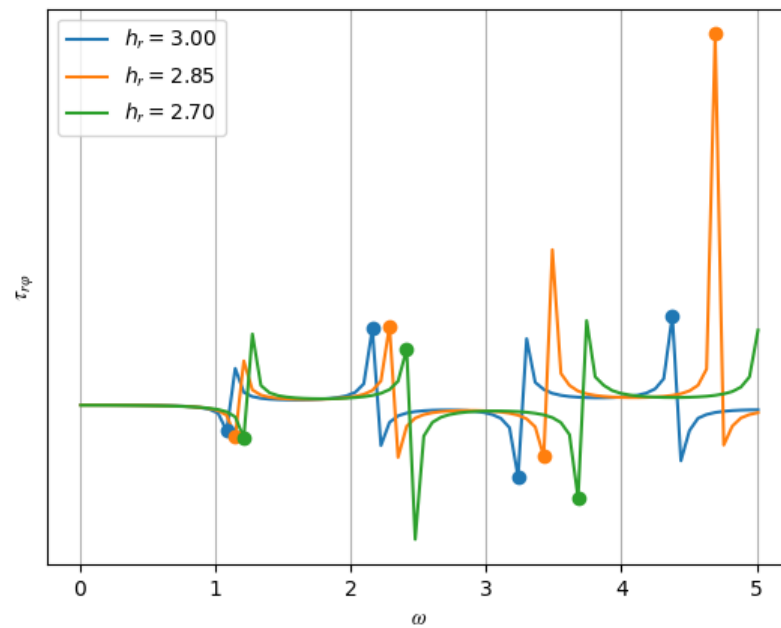


Рис. 5.7. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному відносному лінійному розмірі конусу, коли навантажений шар найм'якший, тобто $h_{G^{(n)}} = 0.5$

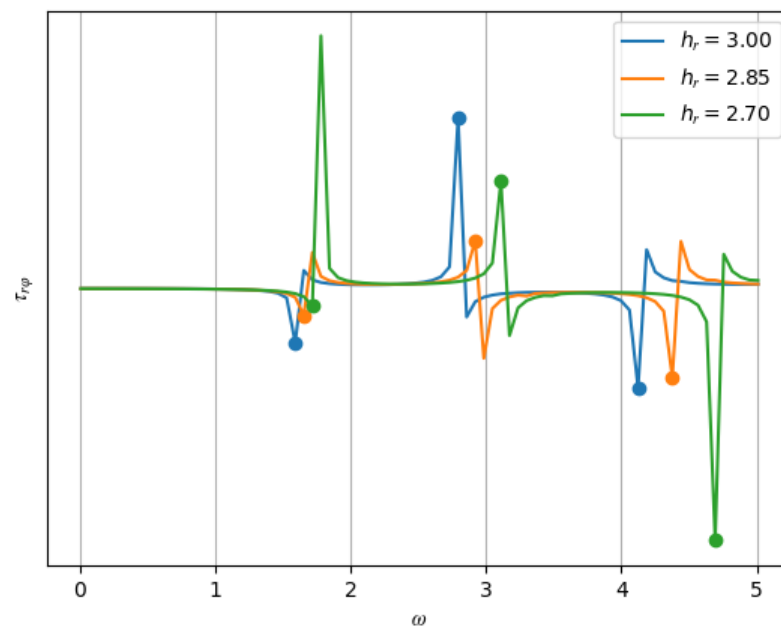


Рис. 5.8. Напруження $\tau_{r\varphi}(a_n, \psi)$ при зміні частоти ω при різному відносному лінійному розмірі конусу, коли навантажений шар найм'якший, тобто $h_{G^{(n)}} = 1.5$

5.3.2. Аналіз напружень

Розв'язок отриманий у Підрозділі 5.2, тобто для шаруватого конусу при кількості шарів $n=1$, було розраховано та порівняно розв'язком знайденим у Підрозділі 2.2, тобто для цільного конусу. Порівняння показало що розв'язки співпадають з заданою точністю в 10^{-6} .

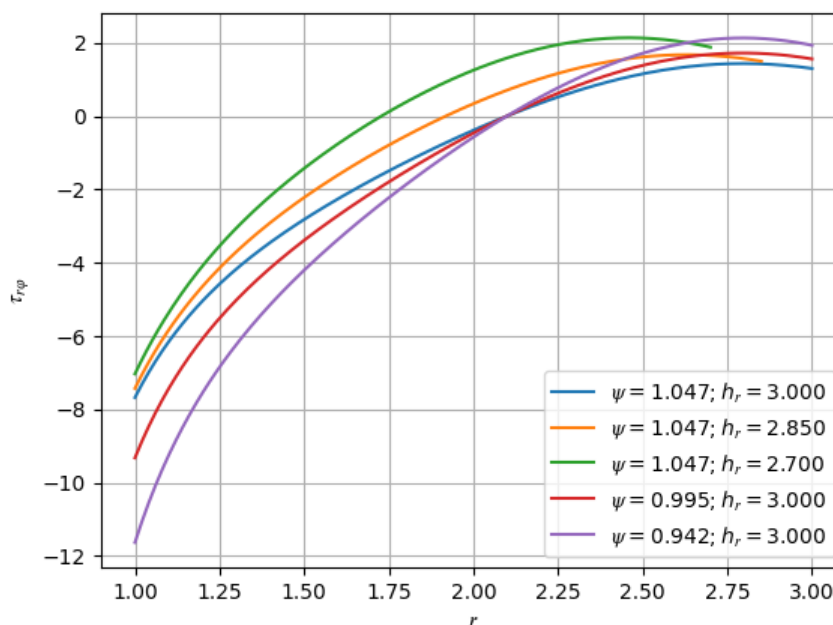


Рис. 5.9. Напруження $\tau_{r\phi}(r, \psi)$ для різних геометричних характеристик шаруватого конусу при $h_{G^{(n)}} = 0.5$ та частоті коливань $\omega = 1.7$

Розглянуто вплив геометричних характеристик шаруватого конусу на хвильове поле та порівняно їх з висновками зробленими у Пункті 3.3. На Рис. 5.9. та Рис. 5.10. зображено напруження $\tau_{r\phi}$ на боковій поверхні конусу $\theta = \psi$ при частоті коливань обраною між першою та другою власними частотами конусу (опираючись на графіки у Пункті 5.3.1), й кількості шарів $n = 20$ та при $h_{G^{(n)}} = 0.5$ й $h_{G^{(n)}} = 1.5$ відповідно. Після порівняння графіків на Рис. 5.9. та Рис. 5.10. з відповідними з Пункту 3.3.2, можна побачити, що наявність шаруватості у випадку дискретної зміни модулів пружності шарів за схемою (5.24) не змінює залежність напруження $\tau_{r\phi}$ від геометричних характеристик конусу. Тобто зменшення куту

отвору призводить до збільшення абсолютних значень напруження $\tau_{r\varphi}$ біля нижньої сферичної поверхні, в той час як зменшення лінійного розміру конусу призводить до зменшення абсолютних значень напруження $\tau_{r\varphi}$.

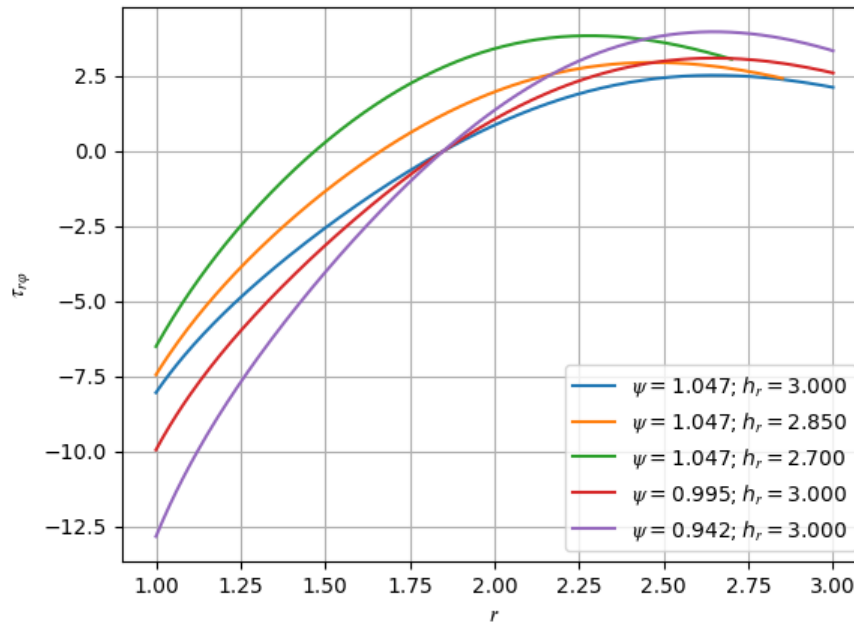


Рис. 5.10. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для різних геометричних характеристик шаруватого конусу при $h_{G^{(n)}} = 1.5$ та частоті коливань $\omega = 2.3$

При заданій схемі (5.24) зміни механічних характеристик, можна спробувати використати отриманий розв'язок для шаруватого конусу при $n \rightarrow \infty$ у випадку коли конус складається з функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) таким чином що модуль пружності залежить лише від лінійної координати. На Рис. 5.11. можна побачити значення напруження $\tau_{r\varphi}$ на боковій поверхні конусу при заданих характеристиках шаруватого конусу $h_{G^{(n)}} = 1.5$ та частоті коливань $\omega = 3.5$. Розрахунки показали, що починаючи з кількості шарів $n = 20$, значення напружень стабілізуються, а подальше збільшення шарів змінює механічні характеристики незначно. Це дає можливість імітувати конус, що складається з функціонально градуйованих матеріалів пакетом шарів з дискретно змінними механічними

характеристиками. Кількість шарів в даному випадку можна збільшувати до досягнення заданої точності.

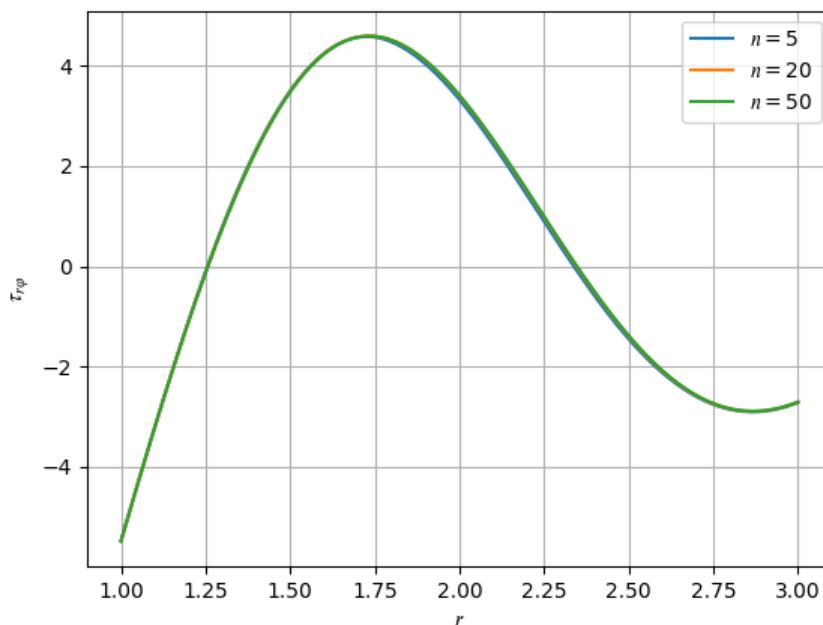


Рис. 5.11. Напруження $\tau_{r\varphi}(r, \psi)$ для різної кількості шарів при $h_{G^{(n)}} = 1.5$ та частоті коливань $\omega = 3.5$

5.4. Висновки до п'ятого розділу

Отримано точний розв'язок задачі кручення двічі-зрізаного пружного сферично шаруватого конусу у випадку сталих коливань. Розв'язок побудовано у вигляді ітеративних рівнянь, що дозволяє використовувати його для довільної кількості шарів. Тобто можна отримати за поданими в роботі формулами точний розв'язок задачі для зафіксованої кількості шарів.

Проведено аналіз розповсюдження перших власних частот шаруватого конусу при різних механічних та геометричних характеристиках конусу. Порівняно отримані результати з аналогічними для конусу без шаруватості. Проведено аналіз напружень на боковій та верхній поверхні шаруватого конусу при різних геометричних характеристиках конусу.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджено хвильові поля двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу під впливом крутильного навантаження за умови наявності дефектів сферичної та конічної форми або наявності шарів. Отримано такі основні результати:

1. Запропоновано методику розв'язання динамічних задач кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями конусу, яка базується на застосуванні розривного розв'язку рівняння кручення конусу. Побудовано розривні розв'язки динамічного рівняння кручення для випадку дефектів (тріщина, тонке жорстке включення) сферичної та конічної форми.

2. Досліджено хвильові поля, коефіцієнти інтенсивності напружень та власні частоти конусу послабленого сферичною або конічною тріщиною на основі аналітичних розв'язків отриманих за запропонованою методикою. Встановлено важливі залежності цих величин від форми та розміру тріщини, виду навантаження та геометричних параметрів тіла.

3. Побудовано аналітичний розв'язок динамічної задачі кручення двічі-зрізаного пружного сферично шаруватого конусу. Отримано якісні характеристики змін динамічних напружень та переміщень від пружних властивостей шарів та їх кількості.

Ці результати дозволили встановити такі механічні особливості хвильового поля та резонансних частот конусу:

- У суцільному двічі-зрізаному сферичними поверхнями конусі зміна куту отвору конусу впливає на величину абсолютних значень дотичних напружень на боковій поверхні конусу й на величини перших резонансних частот конусу не менш суттєво ніж зміна лінійного розміру конусу.

- Виявлено, що тріщина конічної форми набагато менше впливає на хвильове поле та величини перших резонансних частот конусу ніж тріщина сферичної форми. Проаналізовано вплив геометричних характеристик тріщини на коефіцієнт інтенсивності навантажень.

- Встановлено вплив пружних властивостей шарів конусу та його геометричних характеристик на хвильове поле та величини перших резонансних частот конусу. Проаналізована можливість симуляції конусу з функціонально градуйованих матеріалів пакетом шарів з дискретно змінними механічними характеристиками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вайсфельд Н. Д., Мисов К. Д. Динамічна задача кручення для двічі зрізаного конусу. Сучасні проблеми механіки та математики: Збірник наукових праць міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», м. Львів, 22-25 травня 2018. Львів 2018, С.120-121.
2. Вайсфельд Н.Д., Мисов К.Д. Хвильове поле двічі-зрізаного сферично-шаруватого конусу під дією крутильного навантаження. Прикладна механіка. (2023). Прийнято до друку
3. Мисов К., Вайсфельд Н. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного конусу. Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей другої міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського, м. Дніпро, 10-12 Жовтня 2019. Дніпро, 2019, С.112-113.
4. Мисов К.Д. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу // Збірник тез міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики - 2023», Львів, 23-25 травня 2023. Львів, 2023, С. 195-196.
5. Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Д. Концентрація динамічних напружень поблизу конусоподібної тріщини в двічі-зрізаному пружному конусі. Сучасні проблеми механіки: VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021. Київ, 2021, С.51.
6. Мисов, К.Д., Вайсфельд, Н.Д.: Усталені крутильні коливання двічі зрізаного пружного конусу. Науковий журнал «Молодий вчений». 62, 119-121 (2018).
7. Мисов К.Д. Хвильове поле двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу під дією крутильного моменту // Збірник тез X Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених «Інформаційні технології - 2023», Київ, 18 травня 2023. Київ, 2023, С.163.

8. Попов, Г. Я., Реут, В. В., Моисеев, М. Г., Вайсфельд, Н. Д.: Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Астропринт, Одеса (2010).
9. Akhmedov, N.K., Mekhtiyev, M.F.: Analysis of a three-dimensional problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous truncated hollow cone. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 57, 871–877 (1993). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(93\)90153-D](https://doi.org/10.1016/0021-8928(93)90153-D)
10. Asemi, K., Salehi, M., Akhlaghi, M.: Dynamic analysis of a functionally graded thick truncated cone with finite length. *Int J Mech Mater Des*. 6, 367–378 (2010). <https://doi.org/10.1007/s10999-010-9144-0>
11. Asemi, K., Salehi, M., Akhlaghi, M.: Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads. *Acta Mech*. 217, 119–134 (2011). <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0380-z>
12. Asemi, K., Salehi, M., Akhlaghi, M.: Transient thermal stresses in functionally graded thick truncated cones by graded finite element method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 119, 52–61 (2014).
13. Asemi, K., Akhlaghi, M., Salehi, M., Hosseini Zad, S.K.: Analysis of functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic internal pressure. *Arch Appl Mech*. 81, 1063–1074 (2011). <https://doi.org/10.1007/s00419-010-0472-1>
14. Bateman H., Erdelyi A.: Higher transcendental functions. 1. McGraw-Hill Book Co, New York (1953).
15. Bateman H., Erdelyi A.: Higher transcendental functions. 2. McGraw-Hill Book Co, New York (1955).
16. Dwight, H.B.: Tables of integrals and other mathematical data. Macmillan, New York (1991).
17. Elhannani, A., Refassi, K., Elmeiche, A.: Dynamic Study of a Functionally Graded Material Rotating Conical Shaft Based on a New Model of Variation by Slice in the Material Properties. *J Fail. Anal. and Preven*. 19, 1312–1321 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11668-019-00725-8>

18. Gradshteĭn, I.S., Ryzhik, I.M., Jeffrey, A.: Table of integrals, series, and products. Academic Press, Amsterdam; Boston (2007).
19. Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V.: Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies [in Russian]. Naukova Dumka, Kiev (1981).
20. Gristchak, V.Z., Hryshchak, D.D., Dyachenko, N.M.: Efficient Approximate Analytic Solution for the Problem of Stability of a Three-Layer Conic Shell Under Combined Loading. *J Math Sci.* 254, 71–88 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>
21. Guz, A.N., Bagno, A.M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *Int Appl Mech* 55, 585–595 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00980-0>
22. Haojiang, D., Fenglin, G., Daoqin, Z.: Elasticity solutions for a piezoelectric cone under concentrated loads at its apex. *Appl Math Mech.* 20, 12–17 (1999). <https://doi.org/10.1007/BF02459268>
23. Izadi, M.H., Hosseini-Hashemi, S., Korayem, M.H.: Analytical and FEM solutions for free vibration of joined cross-ply laminated thick conical shells using shear deformation theory. *Arch Appl Mech.* 88, 2231–2246 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00419-018-1446-y>
24. Kebli, B., Popov, G.Ya., Vaisfel'd, N.D.: Dynamics of a truncated elastic cone. *Int Appl Mech.* 46, 1284–1291 (2011). <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0421-x>
25. Khomasudridze, N.G.: The thermoelastic equilibrium of conical bodies. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 67, 111–120 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)80001-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)80001-1)
26. Klemm, J.L., Fernandes, R.: The non-axisymmetric end loading of a truncated cone. *International Journal of Solids and Structures.* 13, 531–542 (1977). [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90026-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90026-9)
27. Knops, R.J., Villaggio, P.: Recovery of Stresses in a Beam from those in a Cone. *Journal of Elasticity.* 53, 65–75 (1998). <https://doi.org/10.1023/A:1007599432249>

28. Kryvyi, O.F., Morozov, Y.O. Fundamental Solutions for a Piecewise-Homogeneous Transversely Isotropic Elastic Space. *J Math Sci* 270, 143–156 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06337-w>
29. Kuryliak, D.: Diffraction by semi-infinite cone formed with electric and magnetic surfaces: analytical regularization and Wiener–Hopf techniques. *J Eng Math.* 115, 43–65 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10665-019-09991-9>
30. Kushnir, R.M., Yasinsky, A.V. & Tokovy, Y.V. Reconstruction of the Thermal Load of a Functionally Graded Hollow Sphere by Surface Displacements. *J Math Sci* 270, 176–190 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06339-8>
31. Loboda, V., Sheveleva, A., Komarov, O. et al. Interaction of two collinear interface cracks with different electrical conditions at their faces in a one-dimensional piezoelectric quasicrystal. *Acta Mech* 233, 2719–2735 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03254-y>
32. Matsumoto, H., Tsuchida, E., Miyao, S., Tunada, N.: Torsional Stress Wave Propagation in a Semi-Infinite Conical Bar. *JSMET.* 41, 1345–1353 (1975). <https://doi.org/10.1299/kikai1938.41.1345>
33. Muki, R., Sternberg, E.: Steady-state thermal stresses in an elastic cone. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP).* 11, 471–496 (1960). <https://doi.org/10.1007/BF01595400>
34. Mykhas'kiv V. V., Zhabdynskiy I. Ya., Zhang Ch. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks. *European Journal of Mechanics - A/Solids.* 73, 306–317 (2019).
35. Mysov K. D., Vaysfel'd N. D. Dynamic torsion of a twice truncated cone. *Proceedings of the 1st International Scientific and engineering conference in Baku, c. Baku, Azerbaijan, November 28-30 2018. Azerbaizan, Baku, 2018, P. 86-89.*
36. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a cone-shaped crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity.* 33, 365–370 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.044>

37. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a spherical crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity*. 28, 352–357 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.041>
38. Mysov, K., Vaysfel'd, N.: The Wave Field of a Twice-Truncated Elastic Cone Under Torsion Moment Impact. In: Gdoutos, E.E. (ed.) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*. pp. 242–247. *Structural Integrity*, vol 8. Springer, Cham. (2019)
39. Mysov K., Vaysfeld N. The wave field of the rotating cone. *International Conferece of Young Mathematicians: Abstracts*, c. Kyiv, June 6-8 2019. Kyiv, 2019, P.37.
40. Mysov, K.D.: Torsion problem for an elastic twice-truncated cone. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 24, 65-73 (2019)
41. Nejad, M.Z., Jabbari, M., Ghannad, M.: A Semi-Analytical Solution of Thick Truncated Cones Using Matched Asymptotic Method and Disk Form Multilayers. *Archive of Mechanical Engineering*. 61, 495–513 (2014). <https://doi.org/10.2478/meceng-2014-0029><https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2014.03.002>
42. Nemish, Yu. N.: A three-dimensional problem for a deformable cone with an asymmetrically perturbed surface. *Soviet Applied Mechanics*. 19, 202–207 (1983). <https://doi.org/10.1007/BF00885437>
43. Nemish, Yu.N.: Nonsymmetric deformation of a laminar cone with noncanonical interfaces. *Int Appl Mech*. 32, 473–479 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02088415>
44. Nemish, Yu.N.: Solution of a three-dimensional problem on the symmetric deformation of a laminated cone with noncanonical interfaces. *Int Appl Mech*. 32, 275–280 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF02086734>
45. Ostryk, V.I. Closed Semi-Infinite Crack at the Interface between Materials in a Piecewise-Homogeneous Strip. *Int Appl Mech* 57, 363–372 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01087-1>
46. Ostryk, V.I., Ulitko, A.F. Bending of a Partially Supported Circular Plate. *J Math Sci* 220, 149–161 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3173-7>

47. Popov, G. Ya.: Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. *Advances in Mechanics*. 15, 71–110 (1992).
48. Popov, G. Ya.: The axisymmetric mixed problem in the theory of elasticity for a hollow truncated circular cone. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 64, 413–424 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00064-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00064-2)
49. Popov G. Ya., 1992. The non-axisymmetric problem of the stress concentration in an unbounded elastic medium near a spherical slit, *Applied Mathematics and Mechanics* 56, 770–779. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(92\)90052-A](https://doi.org/10.1016/0021-8928(92)90052-A)
50. Popov, G.Y.: The problem of the stressed state of an elastic cone weakened by cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 64, 325–335 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00055-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00055-1)
51. Popov, G.Ya.: Torsion of an infinite truncated hollow elastic cone. *Dokl. Phys.* 57, 492–496 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1028335812120099>
52. Popov, G.Ya., Kebli, B.: Exact solution of a mixed boundary-value problem of elasticity theory for an infinite cone truncated along an axis. *Dokl. Phys.* 58, 253–257 (2013). <https://doi.org/10.1134/S1028335813060086>
53. Popov, G., Vaysfel'd, N.: The torsion of the conical layered elastic cone. *Acta Mech.* 225, 67–76 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0957-4>
54. Popov, G., Vaysfel'd, N.: The steady-state oscillations of the elastic infinite cone loaded at a vertex by a concentrated force. *Acta Mech.* 221, 261–270 (2011). <https://doi.org/10.1007/s00707-011-0501-3>
55. Popov, V.G., Lytvyn, O.V. Stress State of an Elastic Body with Rigid Inclusion in the Form of a Broken Line Under Harmonic Wave Loads. *J Math Sci* 263, 39–51 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05905-w>
56. Qu, Y., Meng, G.: Dynamic analysis of composite laminated and sandwich hollow bodies of revolution based on three-dimensional elasticity theory. *Composite Structures*. 112, 378–396 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.02.021>
57. Talebitooti, M.: Analytical and finite-element solutions for the buckling of composite sandwich conical shell with clamped ends under external pressure. *Arch Appl Mech.* 87, 59–73 (2017). <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1176-y>

58. Thompson, T.R., Little, R.W.: End effects in a truncated semi-infinite cone. *Q J Mechanics Appl Math.* 23, 185–196 (1970). <https://doi.org/10.1093/qjmam/23.2.185>
59. Vaisfel'd, N.D.: Nonstationary Problem of Torsion for an Elastic Cone with Spherical Crack. *Materials Science.* 38, 698–708 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1024266524535>
60. Vaisfel'd, N.D., Popov, G.Ya.: Torsion of a Truncated Conically Layered Elastic Cone. *J Math Sci.* 203, 134–148 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2096-4>
61. Vaysfeld, N., Zhuravlova, Z. (2023). Exact Solution of the Axisymmetric Problem for Poroelastic Finite Cylinder. In: Altenbach, H., Mkhitaryan, S.M., Hakobyan, V., Sahakyan, A.V. (eds) *Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*, vol 185. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_26
62. Xu, Y.-T., Zhang, L.-L.: 3D Green's functions for a transversely isotropic thermoelastic cone. *Applied Mathematical Modelling.* 36, 5891–5900 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.01.038>
63. Zhuk, Y.O., Ostos, O.K. & Karnaukhova, T.V. Forced Vibrations and Nonstationary Heating of a Rectangular Viscoelastic Plate with Prestresses. *Int Appl Mech* 58, 423–435 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01167-w>
64. Zhuravlova Z. Yu. New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases. *Researches in Mathematics and Mechanics* 24, 122-135 (2019).
65. Nowacki W.: *Teoria Sprężystosci.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1970).

ДОДАТОК А.
ВИВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ДЛЯ ІНТЕГРУВАННЯ

У цьому додатку визначається чому дорівнює інтеграл

$$-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha.$$

Для виведення інтегралу застосуємо як основу формулу [18, 6.541]

$$\int_0^{\infty} \alpha \frac{J_{\nu}(a\alpha) J_{\nu}(b\alpha)}{\alpha^2 + c^2} d\alpha = \begin{cases} I_{\nu}(bc) K_{\nu}(ac), & 0 < b < a \\ I_{\nu}(ac) K_{\nu}(bc), & 0 < a < b \end{cases}, \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Використаємо наступні формули з [16]

$$I_k(x) = i^{-k} J_k(ix)$$

$$I_k(-ix) = i^k J_k(x)$$

$$I_{k+\frac{1}{2}}(-ix) = i(-1)^k I_{k+\frac{1}{2}}(ix)$$

зробимо підстановки $c = q^{(j)}$, $\nu = k + \frac{1}{2}$ та проведемо ланцюг перетворень

$$\begin{aligned} J_{k+\frac{1}{2}}(a\alpha) J_{k+\frac{1}{2}}(b\alpha) &= (-1)^{k+\frac{1}{2}} i^2 (-1)^{2k} I_{k+\frac{1}{2}}(ia\alpha) I_{k+\frac{1}{2}}(ib\alpha) = \begin{bmatrix} a = ir, b = iR \\ a > b \rightarrow r > R \\ a < b \rightarrow r < R \end{bmatrix} = \\ &= -(-1)^{k+\frac{1}{2}} I_{k+\frac{1}{2}}(-\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(-\alpha R) = -(-1)^{k+\frac{1}{2}} i (-1)^{2k} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha R) = \\ &= (-1)^{k+\frac{1}{2}} I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha R) \end{aligned}$$

Таким чином отримаємо

$$\int_0^{\infty} \alpha \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(a\alpha) J_{k+\frac{1}{2}}(b\alpha)}{\alpha^2 + (q)^2} d\alpha = (-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \alpha \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(r\alpha) J_{k+\frac{1}{2}}(R\alpha)}{\alpha^2 + (q)^2} d\alpha = \begin{cases} I_{k+\frac{1}{2}}(iRq) K_{k+\frac{1}{2}}(irq), & 0 < b < a \\ I_{k+\frac{1}{2}}(irq) K_{k+\frac{1}{2}}(iRq), & 0 < a < b \end{cases}.$$

Тепер розглянемо $I_{k+\frac{1}{2}}(bq) K_{k+\frac{1}{2}}(aq)$ та $I_{k+\frac{1}{2}}(aq) K_{k+\frac{1}{2}}(bq)$. Використаємо наступні формули з [16]

$$I_k(x) = i^{-k} J_k(ix)$$

$$K_k(x) = \frac{\pi}{2} i^n (J_n(ix) + iY_n(ix))$$

$$\begin{aligned}
Y_{k+\frac{1}{2}}(-x) &= i(-1)^{k+1} Y_{k+\frac{1}{2}}(x) \\
J_{k+\frac{1}{2}}(-x) &= i(-1)^k J_{k+\frac{1}{2}}(x) \\
H_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= J_{k+\frac{1}{2}}(x) - iY_{k+\frac{1}{2}}(x) \\
I_k(ix) &= i^{-k} J_k(-x) \\
K_k(ix) &= \frac{\pi}{2} i^n (J_n(-x) + iY_n(-x))
\end{aligned}$$

Вони приведуть до ланцюгу перетворень

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} I_{k+\frac{1}{2}}(iRq)K_{k+\frac{1}{2}}(irq) \\ I_{k+\frac{1}{2}}(irq)K_{k+\frac{1}{2}}(iRq) \end{cases} = \frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(-Rq)(J_n(-rq) + iY_n(-rq)) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(-rq)(J_n(-Rq) + iY_n(-Rq)) \end{cases} = \\
&= -\frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(Rq)(J_n(rq) - iY_n(rq)) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq)(J_n(Rq) - iY_n(Rq)) \end{cases} = -\frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(Rq)H_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}(rq) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq)H_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}(Rq) \end{cases} = \\
&= -\frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(Rq)H_{k+\frac{1}{2}}(rq) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq)H_{k+\frac{1}{2}}(Rq) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Замість $H_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ обираємо $H_{k+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$ так як вона являється таким самим розв'язком, але затухає на нескінченності. Одиниця в індексу у наступних формулах опускається. Помножимо на мінус один ліву та праву частину рівності та остаточно отримаємо

$$-(-1)^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \alpha \frac{I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha r) I_{k+\frac{1}{2}}(\alpha \eta)}{\alpha^2 + q^2} d\alpha = \frac{\pi i}{2} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq), r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), r < \eta \end{cases}.$$

ДОДАТОК Б. ВИВЕДЕННЯ НАПРУЖЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІР

В цьому додатку буде виведено напруження

$$\tau^2(r, \theta) = G \left(\frac{\partial w^2(r, \theta)}{\partial r} - r^{-1} w^2(r, \theta) \right),$$

де

$$w^2(r, \theta) = R^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \left(\frac{1}{\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \right) \Big|_{\eta=R} d\tau.$$

Після підстановки зазначеного переміщення можемо записати напруження у вигляді

$$\tau_{r\varphi}^2(r, \theta) = GR^2 \left[\int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \left(\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial r} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} K_q(\theta, \tau; r, \eta) - \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) + \frac{1}{r\eta} K_q(\theta, \tau; r, \eta) \end{array} \right) \Big|_{\eta=R} d\tau \right].$$

З урахуванням

$$K_q(\theta, \tau; r, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) P_k^1(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau), \quad \sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

та

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq), & r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), & r < \eta \end{cases}.$$

Напишемо чому дорівнює наступний вираз

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial r} \Gamma_{q,k}(r, \eta) - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{q,k}(r, \eta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) + \frac{1}{r\eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) \right).$$

Маємо для кожного доданку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial r} \Gamma_{q,k}(r, \eta) &= \frac{\pi i q^2}{2\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J'_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H'_{k+\frac{1}{2}}(rq) \\ J'_{k+\frac{1}{2}}(rq) H'_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) \end{array} \right\} - \frac{\pi i q}{4r\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J'_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H'_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) \end{array} \right\} \\ &- \frac{\pi i q}{4\eta\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H'_{k+\frac{1}{2}}(rq) \\ J'_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) \end{array} \right\} + \frac{\pi i}{8r\eta\sqrt{r\eta}} \left\{ \begin{array}{l} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq) \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{q,k}(r, \eta) &= \frac{\pi i}{4r\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} - \frac{\pi i q}{2\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H'_{k+1/2}(rq) \\ J'_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} \\
-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) &= \frac{\pi i}{4r\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} - \frac{\pi i q}{2r\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J'_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H'_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} \\
\frac{1}{r\eta} \Gamma_{q,k}(r, \eta) &= \frac{\pi i}{2r\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}
\Gamma_{q,k}(r, \eta) &= - \left(\frac{\pi i q^2}{2\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J'_{k+1/2}(\eta q) H'_{k+1/2}(rq) \\ J'_{k+1/2}(rq) H'_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} - \frac{3\pi i q}{4r\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J'_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H'_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\pi i q}{4\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H'_{k+1/2}(rq) \\ J'_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} + \frac{9\pi i}{8r\eta\sqrt{r\eta}} \begin{Bmatrix} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(rq) \\ J_{k+1/2}(rq) H_{k+1/2}(\eta q) \end{Bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Таким чином шукане напруження має вигляд

$$\tau^2(r, \theta) = -GR^2 \int_0^\gamma X(\tau) \sin \tau \sum_{k=0}^{\infty} P_k^1(\cos \theta) P_k^0(\cos \tau) \sigma_k(\Gamma_{q,k}(r, \eta)) \Big|_{\eta=R} d\tau.$$

Також нескладно переконатися, що

$$\begin{aligned}
\Gamma_{q,k}(R+0, R) &= \Gamma_{q,k}(R-0, R) = \\
&= \frac{\pi i}{2R} \left(Rq J'_{k+1/2}(Rq) - \frac{3}{2} J_{k+1/2}(Rq) \right) \left(Rq H'_{k+1/2}(Rq) - \frac{3}{2} H_{k+1/2}(Rq) \right).
\end{aligned}$$

ДОДАТОК В.

ПОШУК АСИМПТОТИЧНОГО УЯВЛЕННЯ ДЛЯ $\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R)$

В цьому додатку знаходяться асимптотичне уявлення для $\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R)$, де

$$\sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

$$\Gamma_{q,k}(R+0, R) = - \left(\frac{\pi i q^2 R}{2} J'_{k+\frac{1}{2}}(Rq) H'_{k+\frac{1}{2}}(Rq) - \frac{3\pi i q}{4} J'_{k+\frac{1}{2}}(Rq) H_{k+\frac{1}{2}}(Rq) - \right. \\ \left. - \frac{3\pi i q}{4} J_{k+\frac{1}{2}}(Rq) H'_{k+\frac{1}{2}}(Rq) + \frac{9\pi i}{8R} J_{k+\frac{1}{2}}(Rq) H_{k+\frac{1}{2}}(Rq) \right)$$

Введемо асимптотичні уявлення для функцій Бесселя $J_k(x)$ та $H_k(x)$ (перша функція Ханкеля) й їх похідних при великих значення порядку. Використаємо їх асимптотичні уявлення [15, 7.13.2.12-7.13.2.14] при урахуванні точності $\underline{O}(k^{-3})$

$$J_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{k^2-x^2}} e^{\left(\sqrt{k^2-x^2} - k \operatorname{Arsh} \frac{k}{x}\right)} \left(1 + \frac{b_1}{\sqrt{k^2-x^2}} + \frac{3b_2}{k^2-x^2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$H_k(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{-i}{\sqrt[4]{k^2-x^2}} e^{-\left(\sqrt{k^2-x^2} - k \operatorname{Arch} \frac{k}{x}\right)} \left(1 + \frac{b_1}{\sqrt{k^2-x^2}} + \frac{3b_2}{k^2-x^2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$b_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}, \quad b_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} + \frac{385}{3456} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-2}$$

Після розвинення у ряд Тейлора, отримаємо асимптотичні уявлення для коефіцієнтів

$$b_1 = -\frac{1}{12} - \frac{5}{24} \frac{x^2}{k^2} + \underline{O}(k^{-4}), \quad b_2 = \frac{1}{864} - \frac{77}{864} \frac{x^2}{k^2} + \underline{O}(k^{-4}).$$

Таким же чином отримаємо асимптотичні уявлення для наступних функцій

$$\frac{1}{k^2-x^2} = \frac{1}{k^2} + \underline{O}(k^{-4}), \quad \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{1}{k} + \underline{O}(k^{-3}), \quad \frac{1}{\sqrt[4]{k^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{x^2}{k^2} + \underline{O}(k^{-4}) \right)$$

$$\exp\left(\sqrt{k^2-x^2} - k \operatorname{Arsh} \frac{k}{x}\right) = \frac{e^k x^k}{2^k k^k} \left(1 - \frac{3x^2}{4} k^{-1} + \frac{9x^4}{32} k^{-2} + \underline{O}(k^{-4}) \right)$$

$$\exp\left(-\sqrt{k^2-x^2} + k \operatorname{Arch} \frac{k}{x}\right) = \frac{2^k k^k}{e^k x^k} \left(1 + \frac{x^2}{4} k^{-1} + \frac{x^4}{32} k^{-2} + \underline{O}(k^{-4}) \right)$$

Для функцій Бесселя отримаємо, що

$$J_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^k x^k}{2^k k^k} \left(1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{3x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} + \frac{5x^2}{16} + \frac{9x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$H_k(x) = \frac{-i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \frac{2^k k^k}{e^k x^k} \left(1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} + \frac{13x^2}{48} + \frac{x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

Після проведення заміни $k = k+1$, та за необхідністю використавши розвинення Тейлора, отримуємо

$$J_{k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^k x^{k+1}}{2^{k+1} k^{k+1}} \left(1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{3x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{313}{288} + \frac{29x^2}{16} + \frac{9x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$H_{k+1}(x) = \frac{-i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \frac{2^{k+1} k^{k+1}}{e^k x^{k+1}} \left(1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

Після використання формул [16, 801.1, 805.1, 817.3]

$$J'_k(x) = \frac{k}{x} J_k(x) - J_{k+1}(x)$$

$$H'_k(x) = \frac{k}{x} H_k(x) - H_{k+1}(x)$$

маємо

$$J'_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^k x^{k-1}}{2^k k^{k-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{3x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} - \frac{3x^2}{16} + \frac{9x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$H'_k(x) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \frac{2^k k^{k+1}}{e^k x^{k+1}} \left(1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} - \frac{11x^2}{48} + \frac{x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

й також

$$J_k(Rq) H_k(Rq) = \frac{-i}{\pi k} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} k^{-1} + \left(\frac{R^2 q^2}{2} + \frac{R^4 q^4}{8} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$J'_k(Rq) H_k(Rq) = \frac{-i}{\pi Rq} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} k^{-1} + \frac{R^4 q^4}{8} k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$J_k(Rq) H'_k(Rq) = \frac{i}{\pi Rq} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} k^{-1} + \frac{R^4 q^4}{8} k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

$$J'_k(Rq) H'_k(Rq) = \frac{ik}{\pi R^2 q^2} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} k^{-1} + \left(-\frac{R^2 q^2}{2} + \frac{R^4 q^4}{8} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

Таким чином асимптотичне уявлення для $\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R)$ прийме вигляд

$$\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) = \frac{1}{2R} \frac{(1/2+k)^2}{(1+k)k} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{R^2 q^2}{2} + \frac{R^4 q^4}{8} - \frac{9}{4} \right) \left(k + \frac{1}{2}\right)^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

Використаємо наступні розкладання

$$(1+k)^{-1} = k^{-1} (1+k^{-1})^{-1} = k^{-1} (1 - k^{-1} + k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}))$$

$$\left(\frac{1}{2}+k\right)^{-1} = k^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}k^{-1}\right)^{-1} = k^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}k^{-1} + \frac{1}{4}k^{-2} + \underline{O}(k^{-3})\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}+k\right)^{-2} = k^{-2} \left(1 + \frac{1}{2}k^{-1}\right)^{-2} = k^{-2} \left(1 - k^{-1} + \frac{1}{4}k^{-2} + \underline{O}(k^{-3})\right)$$

та отримаємо

$$\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) = \frac{1}{2R} \left(1 - \frac{R^2 q^2}{2} k^{-1} + \left(\frac{R^2 q^2}{2} + \frac{R^4 q^4}{8} - 2 \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

При точності $\underline{O}(k^{-1})$ асимптотичне уявлення має вигляд

$$\sigma_k \Gamma_{q,k}(R+0, R) = \frac{1}{2R} + \underline{O}(k^{-1}).$$

ДОДАТОК Г.
ПЕРЕТВОРЕННЯ ФОРМУЛИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ПОЛІНОМІВ
ЛЕЖАНДРА

У цьому додатку буде проведено перетворення, до необхідної для розв'язання форми, формули ортогональності поліномів Лежандра, яка має наступний вигляд

$$\int_{-1}^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = \delta_{nm} \|P_{2n}\|^2 = \delta_{nm} \frac{1}{4n+1}$$

Розіб'ємо інтеграл на дві частини по інтервалах $(-1,0)$ та $(0,1)$, далі виконаємо у першому заміну $x = \sqrt{1-\xi^2}$, а у другому заміну $x = -\sqrt{1-\xi^2}$ й матимемо перетворення

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx &= \int_{-1}^0 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx + \int_0^1 P_{2m}(x) P_{2n}(x) dx = \\ &= -\int_0^1 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi + \int_{-1}^0 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \\ &= -\int_0^1 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi + \int_1^0 \frac{-\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d(-\xi) = \\ &= -\int_0^1 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi - \int_0^1 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\xi P_{2m}(\sqrt{1-\xi^2}) P_{2n}(\sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \end{aligned}$$

та остаточно позначивши $\xi = x$ маємо

$$\int_0^1 \frac{\xi P_{2n}(\sqrt{1-x^2}) P_{2m}(\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\delta_{nm} \frac{1}{4n+1}.$$

ДОДАТОК Г.

ПОШУК АСИМПТОТИЧНОГО УЯВЛЕННЯ ДЛЯ $\sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta)$ ТА $(P_k^2(\cos \gamma))^2$

В цьому додатку буде знайдено асимптотичні уявлення при $k \rightarrow \infty$ для складових ряду СІР (4.11)

$$\int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) (P_k^2(\cos \gamma))^2 d\eta = \frac{r}{G \sin \gamma} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0},$$

тобто для $\sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta)$ та $(P_k^2(\cos \gamma))^2$, де

$$\sigma_k = \frac{2k+1}{2} \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

$$\Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{\pi i}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} J_{k+\frac{1}{2}}(\eta q) H_{k+\frac{1}{2}}(rq), & r > \eta \\ J_{k+\frac{1}{2}}(rq) H_{k+\frac{1}{2}}(\eta q), & r < \eta \end{cases}$$

Використавши формулу [14, 3.9.1.2] маємо

$$(P_k^2(\cos \theta))^2 = \frac{k^3}{\pi \sin \gamma} \left(1 + \sin((2k+1)\theta) + \underline{O}(k^{-3/2}) \right), \quad \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad k > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Приймаючи до уваги асимптотичні уявлення функції Бесселя $J_k(x)$ та Ханкеля $H_k(x)$ з Додатку В, які мають вигляд

$$J_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^k x^k}{2^k k^k} \left(1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{3x^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} + \frac{5x^2}{16} + \frac{9x^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right),$$

$$H_k(y) = \frac{-i\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k}} \frac{2^k k^k}{e^k y^k} \left(1 + \left(\frac{1}{12} + \frac{y^2}{4} \right) k^{-1} + \left(\frac{1}{288} + \frac{13y^2}{48} + \frac{y^4}{32} \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

Помноживши їх, матимемо

$$J_k(x) H_k(y) = \frac{-i}{\pi k} \frac{x^k}{y^k} \left(1 + \frac{1}{4} (y^2 - 3x^2) k^{-1} + \frac{1}{16} \left(\frac{y^4}{2} + \frac{9x^4}{2} + 4x^2 + 4y^2 - 3x^2 y^2 \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right).$$

Таким чином

$$\sigma_k J_{k+\frac{1}{2}}(x) H_{k+\frac{1}{2}}(y) = \frac{\frac{1}{2} + k}{1+k} \frac{-i}{\pi k^2} \frac{x^k}{y^k} \left(1 + \frac{1}{4} (y^2 - 3x^2) \left(\frac{1}{2} + k \right)^{-1} + \frac{1}{16} \left(\frac{y^4}{2} + \frac{9x^4}{2} + 4x^2 + 4y^2 - 3x^2 y^2 \right) \left(\frac{1}{2} + k \right)^{-2} + \underline{O} \left(\left(\frac{1}{2} + k \right)^{-3} \right) \right)$$

з урахуванням уявлень

$$\begin{aligned}(1+k)^{-1} &= k^{-1}(1+k^{-1})^{-1} = k^{-1}(1-k^{-1}+k^{-2}+\underline{O}(k^{-3})) \\ \left(\frac{1}{2}+k\right)^{-1} &= k^{-1}\left(1+\frac{1}{2}k^{-1}\right)^{-1} = k^{-1}\left(1-\frac{1}{2}k^{-1}+\frac{1}{4}k^{-2}+\underline{O}(k^{-3})\right) \\ \left(\frac{1}{2}+k\right)^{-2} &= k^{-2}\left(1+\frac{1}{2}k^{-1}\right)^{-2} = k^{-2}\left(1-k^{-1}+\frac{1}{4}k^{-2}+\underline{O}(k^{-3})\right)\end{aligned}$$

отримаємо

$$\sigma_k J_{k+\frac{1}{2}}(qx) H_{k+\frac{1}{2}}(qy) = \frac{-i}{\pi k^2} \frac{x^k}{y^k} \left(\begin{aligned} &1 + \left(\frac{q^2}{4} (y^2 + 3x^2) - 1 \right) k^{-1} + \\ &+ \left(1 - \frac{q^2}{8} (y^2 + 7x^2) + \frac{q^4}{32} (y^2 - 3x^2)^2 \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \end{aligned} \right)$$

тоді для $\sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta)$ матимемо

$$\sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{r\eta}} \frac{1}{k^2} \begin{cases} \left(\frac{\eta}{r}\right)^k T_{q,k}(\eta, r), r > \eta \\ \left(\frac{r}{\eta}\right)^k T_{q,k}(r, \eta), r < \eta \end{cases},$$

де

$$T_{q,k}(\eta, r) = \left(1 + \left(\frac{q^2}{4} (r^2 + 3\eta^2) - 1 \right) k^{-1} + \left(1 - \frac{q^2}{8} (r^2 + 7\eta^2) + \frac{q^4}{32} (r^2 - 3\eta^2)^2 \right) k^{-2} + \underline{O}(k^{-3}) \right)$$

з урахуванням асимптотичної процедури

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(r, \eta) g_k(r, \eta) \approx \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, \eta) g_k(r, \eta) + \left(\sum_{k=0}^N f_k(r, \eta) g_k(r, \eta) - \sum_{k=0}^N F_k(r, \eta) g_k(r, \eta) \right),$$

маємо

$$\begin{aligned}f_k(r, \eta) &= \sigma_k \Gamma_{q,k}(r, \eta) (P_k^2(\cos \gamma))^2 \\ g_k(r, \eta) &= 1\end{aligned}$$

$$F_k(r, \eta) = \frac{k}{\pi \sin \gamma} \left(1 + \sin((2k+1)\gamma) + \underline{O}(k^{-3/2}) \right) \frac{1}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} \left(\frac{\eta}{r}\right)^k T_{q,k}(\eta, r), r > \eta \\ \left(\frac{r}{\eta}\right)^k T_{q,k}(r, \eta), r < \eta \end{cases} =$$

$$= \frac{k}{\pi \sin \gamma} \left(1 + \sin((2k+1)\gamma) \right) \frac{1}{2\sqrt{r\eta}} \begin{cases} \left(\frac{\eta}{r}\right)^k, r > \eta \\ \left(\frac{r}{\eta}\right)^k, r < \eta \end{cases} + \underline{O}(k^{-1})$$

СІР прийме вигляд

$$\int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\pi \sin \gamma} \left(1 + \sin((2k+1)\theta) \right) \frac{1}{2\sqrt{r\eta}} \bar{\Gamma}_k(r, \eta) \right) d\eta +$$

$$+ \int_{R_0}^{R_1} \xi_1(\eta) \left(\sum_{k=0}^N f_k(r, \eta, \gamma) g_k(r, \eta, \gamma) - \sum_{k=0}^N F_k(r, \eta, \gamma) g_k(r, \eta, \gamma) \right) = \frac{r}{G \sin \gamma} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0}$$

й після скорочень маємо

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\xi_1(\eta)}{\sqrt{\eta}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \left(1 + \sin((2k+1)\gamma) \right) \bar{\Gamma}_k(r, \eta) + A_q(r, \eta, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} \right) d\eta = \frac{2r^{3/2} \pi}{G} \bar{\tau}^{-1}(r, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0},$$

де

$$A_q(r, \eta, \theta) = \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k \sin \theta \pi^2 i \left(P_k^2(\cos \theta) \right)^2 \bar{\Gamma}_{q,k}(r, \eta) - k \left(1 + \sin((2k+1)\theta) \right) \bar{\Gamma}_k(r, \eta) \right)$$

$$\bar{\Gamma}_{q,k}(r, \eta) = \begin{cases} J_{k+1/2}(\eta q) H_{k+1/2}(r q), r > \eta \\ J_{k+1/2}(r q) H_{k+1/2}(\eta q), r < \eta \end{cases}$$

$$\bar{\Gamma}_k(r, \eta) = \begin{cases} \left(\frac{\eta}{r}\right)^k, r > \eta \\ \left(\frac{r}{\eta}\right)^k, r < \eta \end{cases}.$$

ДОДАТОК Д.
ВИДІЛЕННЯ СИНГУЛЯРНОЇ ЧАСТИНИ ДЛЯ ПОБУДОВИ СІР

У цьому додатку виділяється сильна сингулярна особливість в СІР

$$\int_{-1}^1 \chi_1(y) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k(1 + \sin((2k+1)\gamma)) \bar{\Gamma}_k(x, y)) + A_{q,k}(x, y, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0} \right) dy = F(x, \theta) \Big|_{\theta=\gamma+0}$$

та напруженні

$$\bar{\tau}^{-2}(r, \theta) = -\frac{\sqrt{2}G(R_1 - R_0)}{\pi(R_1 + R_0 + x(R_1 - R_0))^{3/2}} \int_{-1}^1 \chi_1(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1 + \sin((2k+1)\theta)) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right) dy + \bar{\tau}_0^{-2}(x, y),$$

де

$$A_{q,k}(x, y, \theta) = \sum_{k=0}^N \left(\sigma_k \sin \theta \pi^2 i (P_k^2(\cos \theta))^2 \bar{\Gamma}_{q,k}(x, y) - k(1 + \sin((2k+1)\theta)) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right)$$

$$\chi_1(y) = \frac{\xi_1 \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} \right)}{\sqrt{\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2}}}$$

$$F(x, \theta) = \frac{2 \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} \right)^{3/2}}{G(R_1 - R_0)} \pi^{-1} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2}, \theta \right)$$

$$\bar{\Gamma}_{q,k}(x, y) = \begin{cases} J_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} q \right) H_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} q \right), & x > y \\ J_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + x(R_1 - R_0)}{2} q \right) H_{k+1/2} \left(\frac{R_0 + R_1 + y(R_1 - R_0)}{2} q \right), & x < y \end{cases}$$

$$\bar{\Gamma}_k(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{d+y}{d+x} \right)^k, & x > y \\ \left(\frac{d+x}{d+y} \right)^k, & x < y \end{cases}$$

де $d = \frac{R_0 + R_1}{R_1 - R_0}$.

Для виділення особливості розділимо нескінченний ряд на дві частини

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin((2k+1)\gamma) \bar{\Gamma}_k(x, y)$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{\Gamma}_k(x, y).$$

Також будемо використовувати наступні формули [18, 1.147.2, 1.513.4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} = \frac{r}{(1-2r \cos x + r^2)^2} \left[(1-r^2) \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} - 2r(1-r \cos x) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Проведемо наступні спрощення, щоб привести доданки ряду до вигляду зображеному у формулах. Враховуючи

$$\sin((2k+1)\gamma) = \cos \gamma \sin(k \cdot 2\gamma) + \sin \gamma \cos(k \cdot 2\gamma)$$

та

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} = \frac{r}{(1-2r \cos x + r^2)^2} \left[(1-r^2) \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} - 2r(1-r \cos x) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]$$

матимемо для $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin((2k+1)\gamma) \bar{\Gamma}_k(x, y)$ наступну рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin((2k+1)\gamma) \bar{\Gamma}_k(x, y) = 2 \begin{cases} \frac{d+y}{d+x} \frac{\sin 3\gamma - \frac{d+y}{d+x} \sin \gamma \left(1 + \frac{d+y}{d+x}\right)}{\left(1 - 2 \left(\frac{d+y}{d+x}\right) \cos 2\gamma + \left(\frac{d+y}{d+x}\right)^2\right)^2} \\ \frac{d+x}{d+y} \frac{\sin 3\gamma - \frac{d+x}{d+y} \sin \gamma \left(1 + \frac{d+x}{d+y}\right)}{\left(1 - 2 \left(\frac{d+x}{d+y}\right) \cos 2\gamma + \left(\frac{d+x}{d+y}\right)^2\right)^2} \end{cases}.$$

Для другого ряду маємо наступний ланцюг перетворень

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{\Gamma}_k(x, y) = \begin{cases} \frac{d+x}{d+y} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{d+y}{d+x}\right)^{k+1}, & x > y \\ \frac{d+x}{d+y} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{d+x}{d+y}\right)^{k-1}, & x < y \end{cases} = \begin{cases} (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1) \left(\frac{d+y}{d+x}\right)^k, & x > y \\ (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d+x}{d+y}\right)^k, & x < y \end{cases} =.$$

Для другого ряду маємо наступний ланцюг перетворень

$$= \begin{cases} (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{d+y}{d+x} \right)^k \right), x > y \\ (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{d+x}{d+y} \right)^k \right), x < y \end{cases} =.$$

Тут використаємо формулу $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$ та матимемо

$$= \begin{cases} (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{x-y} + \ln(d+x) \right) \right), x > y \\ (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{y-x} + \ln(d+y) \right) \right), x < y \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} + (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \circ \left(\ln \frac{1}{x-y} + \ln(d+x) \right), x > y \\ \left((d+x) \frac{\partial}{\partial x} + (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \circ \left(\ln \frac{1}{y-x} + \ln(d+y) \right), x < y \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{x-y} + (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(d+x) + (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{d+x}{x-y}, x > y \\ (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{y-x} + (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(d+y) + (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{d+y}{y-x}, x < y \end{cases} =$$

$$= (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{|x-y|} + \begin{cases} (d+x)^2 \left(\frac{-1}{(d+x)^2} \right) + (d+x) \left(\frac{1}{d+x} \right) + (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{x-y}, x > y \\ (d+x) \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{y-x}, x < y \end{cases} =$$

$$= (d+x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{1}{|x-y|} + \begin{cases} \frac{d+x}{y-x}, x > y \\ \frac{d+x}{y-x}, x < y \end{cases}.$$

Остаточно матимемо СІР з виділеною особливістю логарифмічного характеру

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \chi_1(y) dy + \int_{-1}^1 S(x, y, \gamma) \chi_1(y) dy = F(x, \gamma),$$

де

$$F(x, \gamma) = \frac{F(x, \gamma)}{(d+x)^2}$$

$$S(x, y, \gamma) = \frac{2}{(d+x)^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{d+y}{d+x} \frac{\sin 3\gamma - \frac{d+y}{d+x} \sin \gamma \left(1 + \frac{d+y}{d+x}\right)}{\left(1 - 2\left(\frac{d+y}{d+x}\right) \cos 2\gamma + \left(\frac{d+y}{d+x}\right)^2\right)^2} + \frac{d+x}{y-x} \\ & \frac{d+x}{d+y} \frac{\sin 3\gamma - \frac{d+x}{d+y} \sin \gamma \left(1 + \frac{d+x}{d+y}\right)}{\left(1 - 2\left(\frac{d+x}{d+y}\right) \cos 2\gamma + \left(\frac{d+x}{d+y}\right)^2\right)^2} + \frac{d+x}{y-x} \end{aligned} \right\} + \\ + \frac{1}{(d+x)^2} \sum_{k=0}^N \left(\sigma_k \sin \gamma \pi^2 i \left(P_k^2(\cos \gamma) \right)^2 \bar{\Gamma}_{q,k}(x, y) - k \left(1 + \sin((2k+1)\gamma) \right) \bar{\Gamma}_k(x, y) \right)$$

та напруження матиме вигляд

$$\bar{\tau}^2(r, \theta) = - \frac{\sqrt{2G} \sqrt{R_1 + R_0 + (R_1 - R_0)x}}{(R_1 - R_0)\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 \chi_1(y) \ln \frac{1}{|x-y|} dy + \bar{\tau}_0^2(x, y).$$

ДОДАТОК Е.

ПОШУК НЕВІДОМИХ КОНСТАНТ $\{ {}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)} \}, j = \overline{1, n}$

В цьому додатку приведено розв'язок системи (5.21). Для початку напишемо систему (5.21), підставивши в неї розв'язок (5.19)

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1C_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2C_k^{(1)} = \alpha l F_k \\ {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) {}_1C_k^{(j)} + {}_2\Phi_k^{(j)}(a_j) {}_2C_k^{(j)} = {}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j) {}_1C_k^{(j+1)} + {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j) {}_2C_k^{(j+1)} \\ G^{(j)} \left(\left(\left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) {}_1C_k^{(j)} + \left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_2\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) {}_2C_k^{(j)} \right) \right) = \\ = G^{(j+1)} \left(\left(\left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) {}_1C_k^{(j+1)} + \left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) {}_2C_k^{(j+1)} \right) \right) \\ {}_1\Phi_k^{(n)}(a_n) {}_1C_k^{(n)} + {}_2\Phi_k^{(n)}(a_n) {}_2C_k^{(n)} = 0 \end{array} \right. ,$$

$$j = \overline{1, n-1}$$

В системі виразимо $\{ {}_1C_k^{(j)}, {}_2C_k^{(j)} \}$ через $\{ {}_1C_k^{(j+1)}, {}_2C_k^{(j+1)} \}$. Для цього використаємо з системи рівняння на стиках шарів, та зробимо в них наступні перетворення. З рівняння рівності переміщень виразимо ${}_1C_k^{(j)}$, підставимо їх до рівнянь рівності напружень, виразимо в них ${}_2C_k^{(j)}$ та матимемо

$${}_2C_k^{(j)} = \frac{\left(\left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\frac{G^{(j)}}{G^{(j+1)}} \left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

$$+ \frac{\left(\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\frac{G^{(j)}}{G^{(j+1)}} \left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

$$j = \overline{1, n-1}$$

та

$${}_1C_k^{(j)} = \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_1C_k^{(j+1)} + \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2C_k^{(j+1)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2C_k^{(j)}, j = \overline{1, n-1}$$

Підставимо ${}_2C_k^{(j)}$ з рівнянь рівності напружень до рівнянь рівності переміщень та отримаємо систему ітеративних рівнянь

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(j)} = \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_1B_k^{(j)} \right) {}_1C_k^{(j+1)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2B_k^{(j)} \right) {}_2C_k^{(j+1)}, j = \overline{1, n-1}, \\ {}_2C_k^{(j)} = {}_1B_k^{(j)} {}_1C_k^{(j+1)} + {}_2B_k^{(j)} {}_2C_k^{(j+1)} \end{cases}$$

де

$${}_1B_k^{(j)} = \frac{G^{(j+1)} \left(\left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

$${}_2B_k^{(j)} = \frac{G^{(j+1)} \left(\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

З граничної умови на верхній поверхні конуса виразимо одну константу через іншу й матимемо

$${}_1C_k^{(n)} = - \frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} {}_2C_k^{(n)}$$

Зробимо підстановку цього рівняння при $j = n-1$ до нашої системи та матимемо

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(n-1)} = \left(- \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_1B_k^{(n-1)} \right) \frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_2B_k^{(n-1)} \right) \right) {}_2C_k^{(n)}, \\ {}_2C_k^{(n-1)} = \left(- {}_1B_k^{(n-1)} \frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} + {}_2B_k^{(n-1)} \right) {}_2C_k^{(n)} \end{cases}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}
{}_1A_k^{(n-1)} &= -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_1B_k^{(n-1)} \right) + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_2B_k^{(n-1)} \right) \\
{}_2A_k^{(n-1)} &= -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} {}_1B_k^{(n-1)} + {}_2B_k^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Для повноти можемо позначити

$$\begin{aligned}
{}_1A_k^{(n)} &= -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} \\
{}_2A_k^{(n)} &= 1
\end{aligned}$$

і тоді

$$\begin{aligned}
{}_1A_k^{(n-1)} &= \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_1B_k^{(n-1)} \right) {}_1A_k^{(n)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} - \frac{{}_2\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})}{{}_1\Phi_k^{(n-1)}(a_{n-1})} {}_2B_k^{(n-1)} \right) {}_2A_k^{(n)} \\
{}_2A_k^{(n-1)} &= {}_1B_k^{(n-1)} {}_1A_k^{(n)} + {}_2B_k^{(n-1)} {}_2A_k^{(n)}
\end{aligned}$$

Таким чином ітеративна система прийме вигляд

$$\begin{cases}
{}_1C_k^{(j)} = {}_1A_k^{(j)} {}_2C_k^{(n)} \\
{}_2C_k^{(j)} = {}_2A_k^{(j)} {}_2C_k^{(n)}, j = \overline{1, n},
\end{cases}$$

де коефіцієнти ${}_1A_k^{(j)}$ та ${}_2A_k^{(j)}$ знаходяться ітеративно за наступними формулами

$$\begin{cases}
{}_1A_k^{(j)} = \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_1B_k^{(j)} \right) {}_1A_k^{(j+1)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2B_k^{(j)} \right) {}_2A_k^{(j+1)}, j = \overline{1, n-1} \\
{}_2A_k^{(j)} = {}_1B_k^{(j)} {}_1A_k^{(j+1)} + {}_2B_k^{(j)} {}_2A_k^{(j+1)} \\
{}_1A_k^{(n)} = -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} \\
{}_2A_k^{(n)} = 1
\end{cases}$$

Остаточнo робимо підстановку констант ${}_1C_k^{(1)}$, ${}_2C_k^{(1)}$ до граничної умови

${}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1C_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2C_k^{(1)} = \alpha l^{(1)} F_k$ на нижній сферичній поверхні конуса, звідки

$${}_2C_k^{(n)} = \alpha l^{(1)} F_k \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1},$$

та з урахуванням ${}_1C_k^{(n)} = -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} {}_2C_k^{(n)}$ маємо

$${}_1C_k^{(n)} = -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)} \alpha l^{(1)} F_k \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1}.$$

Таким чином усі невідомі константи знаходяться з наступних рівнянь

$$\begin{cases} {}_1C_k^{(j)} = \alpha l^{(1)} F_{k1} A_k^{(j)} \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1} \\ {}_2C_k^{(j)} = \alpha l^{(1)} F_{k2} A_k^{(j)} \left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_1A_k^{(1)} + {}_2\Phi_k^{(1)}(a_0) {}_2A_k^{(1)} \right)^{-1}, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} {}_1A_k^{(j)} = \left(\frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_1B_k^{(j)} \right) {}_1A_k^{(j+1)} + \left(\frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} {}_2B_k^{(j)} \right) {}_2A_k^{(j+1)}, j = \overline{1, n-1} \\ {}_2A_k^{(j)} = {}_1B_k^{(j)} {}_1A_k^{(j+1)} + {}_2B_k^{(j)} {}_2A_k^{(j+1)} \end{cases}$$

$${}_1A_k^{(n)} = -\frac{{}_2\Phi_k^{(n)}(a_n)}{{}_1\Phi_k^{(n)}(a_n)}$$

$${}_2A_k^{(n)} = 1$$

$${}_1B_k^{(j)} = \frac{\frac{G^{(j+1)}}{G^{(j)}} \left(\left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j+1)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_1\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

$${}_2B_k^{(j)} = \frac{\frac{G^{(j+1)}}{G^{(j)}} \left(\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j) \right) - \frac{{}_2\Phi_k^{(j+1)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - a_j^{-1} {}_1\Phi_k^{(j)}(a_j) \right) \right)}{\left(\left(\frac{\partial {}_2\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} - \frac{{}_2\Phi_k^{(j)}(a_j)}{{}_1\Phi_k^{(j)}(a_j)} \left(\frac{\partial {}_1\Phi_k^{(j)}(r)}{\partial r} \right)_{r=a_j} \right)}$$

ДОДАТОК Є.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Наукові фахові видання України:

1. Mysov, K.D.: Torsion problem for an elastic twice-truncated cone. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 24, 65-73 (2019) *(наукове фахове періодичне видання України)*

Наукові публікації у виданнях, що індексуються у наукометричних базах:

2. Mysov, K., Vaysfel'd, N.: The Wave Field of a Twice-Truncated Elastic Cone Under Torsion Moment Impact. In: Gdoutos, E.E. (ed.) *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*. pp. 242–247. *Structural Integrity*, vol 8. Springer, Cham. (2019) *(Scopus)*

3. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a spherical crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity*. 28, 352–357 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.041> *(Scopus)*

4. Mysov, K., Vaysfeld, N.: The dynamical stress concentration near a cone-shaped crack in a twice-truncated elastic cone. *Procedia Structural Integrity*. 33, 365–370 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.044> *(Scopus)*

Публікації в інших виданнях:

5. Мисов, К.Д., Вайсфельд, Н.Д.: Усталені крутильні коливання двічі зрізаного пружного конусу. *Науковий журнал «Молодий вчений»*. 62, 119-121 (2018). *(періодичне видання України)*

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Тези в збірниках матеріалів наукових конференцій:

6. Mysov K. D., Vaysfeld N. D. Dynamic torsion of a twice truncated cone. *Proceedings of the 1st International Scientific and engineering conference in Baku*, с. Baku, Azerbaijan, November 28-30 2018. Azerbaijan, Baku, 2018, P. 86-89.

7. Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Динамічна задача кручення для двічі зрізаного конуса. *Сучасні проблеми механіки та математики: Збірник наукових*

праць міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», м. Львів, 22-25 травня 2018. Львів 2018, С.120-121.

8. Mysov K., Vaysfeld N. The wave field of the rotating cone. International Conference of Young Mathematicians: Abstracts, с. Kyiv, June 6-8 2019. Kyiv, 2019, P.37.

9. Мисов К., Вайсфельд Н. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного конусу. Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: Тези доповідей другої міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського, м. Дніпро, 10-12 Жовтня 2019. Дніпро, 2019, С.112-113.

10. Мисов К. Д., Вайсфельд Н. Д. Концентрація динамічних напружень поблизу конусоподібної тріщини в двічі-зрізаному пружному конусі. Сучасні проблеми механіки: VI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021. Київ, 2021, С.51.

11. Мисов К.Д. Хвильове поле двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу під дією крутильного моменту. Збірник тез X Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених «Інформаційні технології - 2023», Київ, 18 травня 2023. Київ, 2023, С.163.

12. Мисов К.Д. Динамічна задача кручення двічі-зрізаного пружного сферично-шаруватого конусу // Збірник тез міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики - 2023», Львів, 23-25 травня 2023. Львів, 2023, С. 195-196.

ДОДАТОК Ж.

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації обговорювались на засіданнях кафедри методів математичної фізики факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова та пройшли апробацію на науково-практичних конференціях:

Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики, Львівський національний університет імені Івана Франка» (Львів, 22-25 травня 2018).

Міжнародній науковій та інженерній конференції «1st International Scientific and engineering conference» (Baku, Azerbaijan, November 28-30 2018).

Міжнародна конференція молодих математиків «International Conference of Young Mathematicians» (Kiev, June 6-8 2019).

Міжнародна конференція «International conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics» (Corfu, Greece, Jun 23-26 2019).

Міжнародно науково-технічна конференція «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 10-12 Жовтня 2019).

Міжнародна наукова конференція «1st Virtual Conference on Fracture» (Italy, June 29 – July 1 2020).

Міжнародна наукова конференція «26th International conference on fracture and Structural Integrity» (Turin, Italy, May 26-31 2021).

Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 30-31 серпня 2021).

Всеукраїнська науково-практична конференція молодих вчених «Інформаційні технології – 2023» (Київ, 18 травня 2023).

Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 23-25 травня 2023).