МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

"**ЗАТВЕРДЖУЮ**"
Проректор з науково-педагогічної роботи

_____ Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
"_____" _____ 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Клас Ранкіна-Сельберга для L-рядів Діріхле»

Рівень вищої освіти	**третій (освітньо-науковий)**
Галузь знань	**11 Математика та статистика**
Спеціальність	**111 Математика**
Освітньо-наукова програма	**Математика**

ОНУ
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Клас Ранкіна-Сельберга для L-рядів Діріхле». – Одеса: ОНУ, 2022.

Розробники:
Варбанець Павло Дмитрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № 3 від. "11" листопада 2022 р.

Завідувач кафедри _____ Павло ВАРБАНЕЦЬ

Погоджено із гарантом ОНП «Математика» В'ячеслав ЄВТУХОВ

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 3 від. "15" листопада 2022 р.

Голова НМК _____ Євген СТРАХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="13">Загальна кількість:

кредитів – 3

годин – 90

залікових модулів – 1

змістових модулів – 3</td><td rowspan="13">Галузь знань
11 Математика та статистика

Спеціальність
111 Математика

Спеціалізації:
_____
(назва)

Рівень вищої освіти:
третій
(освітньо-науковий)</td><td colspan="2">За вибором</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>12 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>10 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>68 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма підсумкового контролю:
залік</td></tr>
</table>

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни: дати знання про клас функцій Ранкіна-Сельберга. Навести приклади з класу RS. Навчити застосовувати функції класу RS для побудови асимптотичних формул. Дослідити властивості Z-функції Гекке, як представника класу RS. Навчити застосовувати функції класу RS для виведення асимптотичних формул для арифметичних функцій, в тому числі, $\tau_3(n)$, $r(n)$ в арифметичній прогресії, $\mu^2(n)$ в коротких інтервалах.

Завданнями дисципліни є ознайомлення з результатами аналітичної теорії чисел щодо дослідження дзета-подібних функцій класу Ранкіна-Сельберга. Z-функції Гекке як типовий приклад функцій класу RS. Розглянути оцінки функцій класу RS в критичній смузі, арифметичні застосування функцій класу RS. Показати значимість формул підсумовування Пуассона і теореми Вінера-Ікехара в статистичній теорії чисел. Навчити застосуванню тауберових теорем. Проаналізувати гіпотезу Артіна про розподіл первісних коренів, її умовне доведення. Проведення числових експериментів на перевірку гіпотези Артіна.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

- ЗК 01. Здатність до критичного аналізу та оцінки сучасних наукових досягнень.
- ЗК 06. Здатність породжувати нові ідеї (креативність).
- ФК 01. Фундаментальні знання та глибоке розуміння загальних та спеціальних математичних дисциплін.
- ФК 02. Здатність будувати математичні моделі для опису та подальшого аналізу явищ та процесів.
- ФК 03. Здатність до переносу результатів математичних досліджень на нематематичні контексти.
- ФК 05. Здатність до постановки та вивчення нових проблем з різноманітних областей математичного знання.
- ФК 08. Здатність до узагальнення відомих методів дослідження для подальшого розвитку математичних теорій.
- ФК 09. Здатність до створення і використання нових методів розвитку сучасних математичних досягнень.

Очікувані результати навчання. В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен

знати: властивості функцій класу Ранкіна-Сельберга, умови використання теорем Вінера-Ікехара, асимптотичні властивості тауберових теорем, сучасні результати про розподіл первісних коренів за простим модулем.

вміти: вміти користуватися властивостями функцій класу Ранкіна-Сельберга, будувати асимптотичні формули за допомогою тауберових теорем, користуватись формулою Пуассона при дослідженні рядів Діріхле.

Очікувані програмні результати навчання:

- ПРН 05. Вміти здійснювати аналіз поставленої задачі, працювати з літературою, обирати шляхи до вирішення проблеми, застосовувати сучасні методи дослідження, робити висновки, оцінювати отримані результати, поширювати методики дослідження на більш загальні об’єкти, а також генерувати нові ідеї та підходи для вирішення складних актуальних задач.
- ПРН 11. Вміти використовувати знання обраних основних та спеціальних математичних дисциплін для вирішення наукових проблем за напрямком дисертаційного дослідження.
- ПРН 12. Вміти надавати всебічну інтерпретацію тверджень, проводити їх узагальнення; відрізняти основні ідеї від деталей та технічних викладок; удосконалювати доведення.
- ПРН 13. Вміти розв’язувати конкретні математичні задачі, сформульовані у термінах певної предметної області; оцінювати ступінь адекватності математичної моделі явищу, яке вона описує.

3. Програма дисципліни

Змістовий модуль 1. Класична теорія дзета-функцій Римана і L-функцій Діріхле.

1. ***Тотожність Ойлера для мультиплікативних функцій. Дзета-функція Римана, її властивості.***

   Доведення функціонального рівняння для $\zeta(s)$ методом Римана і методом підсумовування Пуассона. Можливості використання цих методів для інших функцій класу RS. Критична смуга для нулів функцій класу RS.

2. ***Оцінки $\zeta(s)$ і $L(s,\chi)$ в критичній смузі.***

   Принцип Фрагмена-Ліндельофа, його використання. Оцінки $\zeta(s)$ в критичній смузі. Доведення асимптотичного закону розподілу простих чисел. Теорема Діріхле про розподіл простих чисел в арифметичній прогресії і її зв'язок з оцінками $L(s,\chi)$ в критичній смузі.

3. ***Нулі дзета-функції Римана. Гіпотеза Римана про нулі $\zeta(s)$, області, вільні від нулів $\zeta(s)$.***

   Оцінки про розподіл нулів $\zeta(s)$ в критичній смузі. Асимптотична поведінка суматорної функції для $\mu(n)$ при умові справедливості гіпотези Римана. Теорема Монгомері-Вогена про поведінку суми значень $\mu(n)$.

Змістовий модуль 2. Клас функцій Ранкіна-Селберга.

1. ***Означення класу Ранкіна-Сельберга. Приклади. Гіпотеза Сельберга.***

   Основні властивості функцій класу RS. Функціональне рівняння функцій класу RS. Асимптотична оцінка функцій класу RS в критичній смузі. Гіпотеза Сельберга. Приклади класу RS ($\zeta(s)$, $Z_m(s)$, дзета-функція, асоційована з модулярною формою).

2. ***Формула підсумовування Пуассона та її арифметичні застосування.***

   Формула підсумовування в n-вимірному Евклідовому просторі. Виведення функціонального рівняння для $Z(s)$за допомогою формули Пуассона. Застосування формули Пуассона для асимптотичних формул арифметичних функцій зі спеціальними рядами Діріхле.

3. ***Теорема Вінера-Ікехара.***

   Позитивнозначні мультиплікативні функції. Побудова асимптотичних формул за допомогою теореми Вінера-Ікехара. Приклади використання теореми. Характеристика спеціальних класів мультиплікативних функцій.

Змістовий модуль 3. Застосування до арифметиці.

1. ***Тауберевi теореми та їх застосування в асимптотичних формулах.***

   Тауберові теореми і асимптотичний закон розподілу простих чисел. Проблема круга і проблема дільників. Дослідження залишкових членів методом тауберових теорем.

2. ***Асимптотична формула для*** $\tau_3(n)$**.**

   Функція дільників $\tau_k(n)$. Побудова асимптотичної формули для суматорної функції $\tau_3(n)$. Теорема Аткінсона, її узагальнення на випадок $\overline{d_3(n)}$.

3. ***Гіпотеза Артіна про первісні корені за модулем*** p***. L-функції Артіна.***

   Первисні корені за простим модулем. Узагальнення на циклічні групи. Гіпотеза Артіна. Умовне доведення гіпотези К. Хулі. Числові експерименти. L-функція Артіна, її узагальнення.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	усього	у тому числі				
		Лек	Прак	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
Змістовий модуль 1. Класична теорія дзета-функцій Римана і L-функцій Діріхле.						
Тотожність Ойлера для мультиплікативних функцій. Дзета-функція Римана, її властивості.	10	2	1			8
Оцінки $\zeta(s)$ і $L(s,\chi)$ в критичній смузі.	10	1	1			9
Нулі дзета-функції Римана. Гіпотеза Римана про нулі $\zeta(s)$, області, вільні від нулів $\zeta(s)$.	10	1	1			9
Разом за змістовим модулем 1	30	4	3			26
Змістовий модуль 2. Клас функцій Ранкіна-Селберга.						
Означення класу Ранкіна-Сельберга. Приклади. Гіпотеза Сельберга.	10	2	1			8
Формула підсумовування Пуассона та її арифметичні застосування.	10	1	1			6
Теорема Вінера-Ікехара.	10	1	1			5
Разом за змістовим модулем 2	30	4	3			19
Змістовий модуль 3. Застосування до арифметиці.						
Тауберові теореми та їх застосування в асимптотичних формулах.	10	2	1			9
Асимптотична формула для $\tau_3(n)$.	10	1	1			7
Гіпотеза Артіна про первісні корені за модулем p. L-функції Артіна.	10	1	2			7
Разом за змістовим модулем 3	30	4	4			23
Усього годин	90	12	10			68

5. Теми семінарських занять: не передбачено.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Розподіл нулів $\zeta(s)$ в критичній смузі і застосування до побудови асимптотичних формул	2
2.	Оцінка дзета-подібних функцій в критичній смузі	2
3.	Дзета-функції Лерха і Гурвиця. Зв'язок між ними	2
4.	Використання формули Пуассона для побудови функціональних рівнянь дзета-подібних функцій, зокрема, Z-функції Гекке з зсувом.	4
	Разом	10

7. Теми лабораторних занять: не передбачено

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Дзета-функція Гурвиця. Побудова її функціонального рівняння.	11
2	Дзета-функція Лерха і її аналог над кільцем цілих гаусових чисел.	11
3	Функціональні рівняння для функцій класу Ранкіна-Сельберга.	12
4	Гіпотеза Артіна. Обчислення констант Артіна.	11
5	Скорочене функціональне рівняння Z-функції Гекке з гроссен-характером.	11
6	Застосування теореми Вінера-Ікехара для твірних рядів, які є добутком Z-функцій класу Ранкіна-Сельберга.	12
	Разом	68

Для самостійної роботи здобувачі можуть використовувати джерела та ресурси, наведені у пп. 15-17.

9. Методи навчання

Використовуються традиційні методи навчання (з використанням літератури, написання конспектів, висловлення гіпотез та їх перевірка, праця з періодичними виданнями, доповідь та презентація) та інтерактивні методи навчання (робота з електронними

посібниками, конспектування на комп'ютері, використання допоміжного програмного забезпечення, наприклад, Mathematica, Malpe або Matlab).

10. Методи оцінювання (контролю)

Усний контроль: основне запитання, додаткові, допоміжні; запитання у вигляді проблеми; індивідуальне завдання. **Поточний контроль** на практичних заняттях. **Підсумковий контроль** змістових модулів. **Підсумкове заняття** у вигляді конференції з усною доповіддю та підготовкою візуальної презентації.

11. Форма підсумкового контролю успішності навчання

Форма підсумкового контролю: **залік.**

Залікові бали аспіранта складаються з суми балів поточного контролю отриманих під час занять балів.

12. Форма поточного контролю успішності навчання

Для оформлення результату підсумкового контролю в стандарті ECTS оцінка з дисципліни "Клас Ранкіна-Сельберга для L-рядів Діріхле" спочатку визначається з урахуванням поточної навчальної діяльності аспіранта із відповідних тем за традиційною 5-бальною системою (відмінно, добре, задовільно, незадовільно) з подальшим перерахунком у багатобальну шкалу.

Оцінка "відмінно" виставляється у випадку, коли аспірант знає зміст заняття та лекційний матеріал у повному обсязі, ілюструючи відповіді різноманітними прикладами; дає вичерпні, точні та ясні відповіді без будь-яких навідних питань; викладає матеріал без помилок і неточностей; вільно вирішує задачі та виконує практичні завдання різного ступеню складності, самостійно генерує інноваційні ідеї.

Оцінка "добре" виставляється за умови, коли аспірант знає зміст заняття та добре його розуміє, відповіді на питання викладає правильно, послідовно та систематично, але вони не є вичерпними, хоча на додаткові питання аспірант відповідає без помилок; вирішує всі задачі і виконує практичні завдання, відчуваючи складнощі лише у найважчих випадках.

Оцінка "задовільно" ставиться аспірантові на основі його знань всього змісту заняття та при задовільному рівні його розуміння. Аспірант спроможний вирішувати видозмінені (спрощені) завдання за допомогою навідних питань; вирішує задачі та виконує практичні навички, відчуваючи складнощі у простих випадках; не спроможний

самостійно систематично викласти відповідь, але на прямо поставлені запитання відповідає правильно.

Оцінка "незадовільно" виставляється у випадках, коли знання і вміння аспіранта не відповідають вимогам "задовільної" оцінки і означає незалік.

Оцінювання самостійної роботи.

Оцінювання самостійної роботи аспірантів, яка передбачена в темі поряд з аудиторною роботою, здійснюється під час поточного контролю теми на відповідному практичному занятті.

Критерії оцінювання

Форма контролю і система оцінювання знань з дисципліни “Методи, аналіз та презентація наукових досліджень” здійснюється відповідно до вимог програми.

Вивчення предмету закінчується заліком. Оцінювання знань студентів відбувається наступним чином: сума всіх поточних оцінок ділиться на кількість практичних занять. Отримане середнє значення оцінки переводиться у бали згідно єдиної універсальної шкали перерахунку традиційних оцінок в 5-бальної системи у рейтингові бали (100 балів). Для дисциплін, що закінчується заліком (шкала додається) – залік ставиться при мінімальній кількості балів 60 (оцінка задовільно, 3 бали).

13. Розподіл балів, які отримують студенти

	Поточне тестування та самостійна робота									Сума балів
	ЗМ 1			ЗМ 2			ЗМ 3			
	Т	П	С	Т	П	С	Т	П	С	
Тема 1	7	4	4	2	3	3	3	2	2	30
Тема 2	4	4	4	2	2	5	2	4	5	32
Тема 3	4	4	5	6	2	5	5	4	3	38
Всього	40			30			30			100

Т – теорія, **П** – практична робота, **С** – самостійна робота

14. Питання для підсумкового контролю

1. Дзета-функція Римана. Її функціональне рівняння. Нулі $\zeta(s)$.
2. Функція $L(s,\chi)$ з характером за модулем p^n.
3. Означення гроссен-характера в теорії Z-функцій Гекке.
4. Означення класу Ранкіна-Сельберга. Приклади.

5. Сучасні результати про гіпотезу Артіна.
6. Формула Пуассона і її використання для виведення функціональних рівнянь.
7. Теорема Вінера-Ікехара в класичних задачах асимптотичної теорії чисел.
8. Застосування тауберевих теорем в теорії чисел.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90–100	A	відмінно	Зараховано
85–89	B	добре	
75–84	C		
70–74	D	задовільно	
60–69	E		
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

15. Навчально-методичне забезпечення

1. Варбанець П.Д., Метод послідовного декодування в науковому пошуку. Навчально-методичний посібник . – Одеса . Астропринт, 2007. 32с.

16. Навчально-методичне забезпечення самостійних робіт:

1. Jörn Steuding, Value-Distribution of L-Functions // Springer, 2007. – P. 340.
2. Jürgen Sander, Jörn Steuding, Rasa Steuding, From Arithmetic to Zeta-Functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz // Springer, 2016. – P.575.
3. Воробйов Я.А., Z-функція Гекке та її застосування // кандидатська дисертація, 2017.

17. Рекомендована література

1. E. Bombieri, The Classical Theory of Zeta and L-Functions, Milan J. Math. 78 (2010), 11-59
2. E. Bombieri, D.A. Hejhal, On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, Duke Math. J. 80 (1995), 821-862
3. K. Chandrasekharan, Arithmetical Functions, Springer, 1970
4. H. Davenport, Multiplicative Number Theory, Springer 2000, 3rd ed.
5. R. Garunkstis, A. Laurincikas, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002
6. H. Iwaniec, Topics in classical automorphic forms, Amer. Math. Soc., Providence 1997
7. H. Iwaniec, E. Kowalski, Analytic Number Theory, Amer. Math. Soc., Providence 2004
8. M.R. Murty, V.K. Murty, Non-vanishing of L-functions and applications, Birkhauser 1997
9. W. Narkiewicz, Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Springer 2004, 3rd ed.
10. W. Schwarz, J. Spilker, Arithmetical Functions, Cambridge University Press 1994
11. A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in: ‘Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory’, Maiori 1989, E. Bombieri et al. (eds.), Universita di Salerno 1992, 367-385.
12. Joel L. Schiff, The Laplace Transforme // Springer, 2014. – P. 240.
13. А. Радова, Z-функція Гекке та її застосування в асимптотичних задачах // дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата ф.-м. н., 2021. – 158 с.

18. Електронні інформаційні ресурси

Варбанець Сергій Павлович, "Метод тригонометричних сум в теорії конгруентних генераторів псевдовипадкових чисел та асимптотичних задачах теорії чисел" // Дисертаційна робота на здобуття наукового ступеня доктора фіз.-мат. наук, http://scc.univ.kiev.ua/upload/iblock/714/ood18ntb7qta029cs8pgir3jqs1wt7zc/dis_Varbanets%20S.P..pdf