МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

"**ЗАТВЕРДЖУЮ**"
Проректор з науково-педагогічної роботи

_____ Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
"_____" _____ 20___ р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Асимптотичні оцінки гібридних тригонометричних сум»

Рівень вищої освіти	**третій (освітньо-науковий)**
Галузь знань	**11 Математика та статистика**
Спеціальність	**111 Математика**
Освітньо-наукова програма	**Математика**

ОНУ
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Асимптотичні оцінки гібридних тригонометричних сум». – Одеса: ОНУ, 2022.

Розробники:
Варбанець Павло Дмитрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № 3 від. "11" листопада 2022 р.

Завідувач кафедри _____ Павло ВАРБАНЕЦЬ

Погоджено із гарантом ОНП «Математика» В'ячеслав ЄВТУХОВ

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 3 від. "15" листопада 2022 р.

Голова НМК _____ Євген СТРАХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="13">Загальна кількість:

кредитів – 3

годин – 90

залікових модулів – 1

змістових модулів – 3</td><td rowspan="13">Галузь знань
11 Математика та статистика

Спеціальність
111 Математика

Спеціалізації:
_____
(назва)

Рівень вищої освіти:
третій
(освітньо-науковий)</td><td colspan="2">За вибором</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>12 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>10 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>68 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма підсумкового контролю:
залік</td></tr>
</table>

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни: навчити студентів методам побудови асимптотичних формул для середнього значення арифметичних функцій натурального аргументу і узагальненю цих методів на випадок уявного квадратичного розширення поля раціональних чисел; дати знання по теорії асимптотичних формул в аналітичній теорії чисел і застосуванню методу тригонометричних сум в асимптотичних задачах; розглянути мультиплікативні функції, зважені тригонометричними сумами, в тому числі, і сумами Клостермана; розглянути нові методи генерування послідовностей псевдовипадкових чисел і приклади їх застосування цих послідовностей в проблемах захисту інформації криптографічними засобами.

Завданнями дисципліни є ознайомлення з результатами асимптотичної теорії чисел щодо побудови асимптотичних формул для суматорних функцій, які є добутком мультиплікативної функції та класичних тригонометричних сум, зокрема, вивчення досліджень І.М. Виноградова, Є. Клостермана, Г.Ф. Вороного, Г. Харді, М. Ютіли; ознайомлення з задачами, які розв'язувались на кафедрі в роботах О. А. Гунявого, О. В. Савастру, С. П. Варбанця, А. В. Лєлєченко. Навчити дослідженню алгоритмів генерування псевдовипадкових чисел на якісність методами аналітичними теорії чисел. Ознайомити зі спеціальними тригонометричними сумами типу гібридних і їх застосувань в асимптотичних задачах теорії чисел. Ознайомити з методом функціональних рівнянь і їх застосувань в статистичних задачах математики, побудовою скорочених функціональних рівнянь за методом А. Ф. Лаврика.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

- ЗК 01. Здатність до критичного аналізу та оцінки сучасних наукових досягнень.
- ЗК 06. Здатність породжувати нові ідеї (креативність).
- ФК 01. Фундаментальні знання та глибоке розуміння загальних та спеціальних математичних дисциплін.
- ФК 02. Здатність будувати математичні моделі для опису та подальшого аналізу явищ та процесів.
- ФК 03. Здатність до переносу результатів математичних досліджень на нематематичні контексти.
- ФК 05. Здатність до постановки та вивчення нових проблем з різноманітних областей математичного знання.

- ФК 08. Здатність до узагальнення відомих методів дослідження для подальшого розвитку математичних теорій.
- ФК 09. Здатність до створення і використання нових методів розвитку сучасних математичних досягнень.

Очікувані результати навчання. В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен

знати: алгоритми побудови асимптотичних формул для мультиплікативних функцій, зважених тригонометричними сумами, в тому числі, методи М. Ютіли, І. Катаі, А. Івича.

вміти: використовувати методи А. Вейля, Х. Іванця, М. Хакслі, Ю. Мотохаші; самостійно опрацьовувати літературу, застосовувати отримані знання для дослідження розподілу значень мультиплікативних функцій на арифметичних прогресіях натуральних або цілих гаусових чисел у вузьких секторах.

Очікувані програмні результати навчання:

- ПРН 05. Вміти здійснювати аналіз поставленої задачі, працювати з літературою, обирати шляхи до вирішення проблеми, застосовувати сучасні методи дослідження, робити висновки, оцінювати отримані результати, поширювати методики дослідження на більш загальні об’єкти, а також генерувати нові ідеї та підходи для вирішення складних актуальних задач.
- ПРН 11. Вміти використовувати знання обраних основних та спеціальних математичних дисциплін для вирішення наукових проблем за напрямком дисертаційного дослідження.
- ПРН 12. Вміти надавати всебічну інтерпретацію тверджень, проводити їх узагальнення; відрізняти основні ідеї від деталей та технічних викладок; удосконалювати доведення.
- ПРН 13. Вміти розв’язувати конкретні математичні задачі, сформульовані у термінах певної предметної області; оцінювати ступінь адекватності математичної моделі явищу, яке вона описує.

3. Програма дисципліни

Змістовий модуль 1. Тригонометричні суми з дійснозначною функцією в показнику.

1. ***Теорема про середнє І. М. Виноградова. Теорема М. Хакслі.***
   Будуються оцінки загальних тригонометричних сум з многочленом з дійсними коефіцієнтами в показнику. Розглядається метод експонентних пар, який використовується М. Хакслі для покращення теореми Виноградова оцінки тригонометричних сум.

2. ***Гібридні тригонометричні суми.***
   Для двох арифметичних функцій $f(n)$ і $g(n)$ досліджуються гібридні тригонометричні суми, у яких в показнику стоїть дійсно значна функція $f(n)$а роль $g(n)$ грає мультиплікативна функція. У випадку узагальненої суми Клостермана будуються нові оцінки гібридних тригонометричних сум.

3. ***Псевдовипадкові числа, методи оцінки рівнорозподіленості відповідних послідовностей.***
   На основі нерівності Турана-Ердьоша-Коксми розробляються алгоритми генерування псевдовипадкових чисел (ПВЧ). Доводиться рівнорозподіленість послідовності ПВЧ, породжених інверсним генератором з зсувом. Вивчаються узагальнення інверсного генератору Ейченауера-Лехна та інші узагальнені генератори послідовностей ПВЧ. Розглядається застосування ПВЧ в криптографії.

Змістовий модуль 2. Гібридні тригонометричні суми в оцінках залишкових членів асимптотичних формул.

1. ***Ряди Діріхле і дзета-функція Гекке в проблемах оцінок залишкових членів асимптотичної теорії чисел.***
   Розглядаються аналог дзета-функції Римана над кільцем цілих гаусових чисел. Будується функціональне рівняння для Z-функції Гекке з зсувом. Розглядається застосування $Z_m(s)$ з зсувом для дослідження мультиплікативних функцій на арифметичних прогресіях.

2. ***Твірні ряди з гібридними тригонометричними сумами.***

   Вивчаються твірні ряди для мультиплікативних функцій, зважених узагальненими сумами Клостермана. Будуються асимптотичні формули для середнього значення функції дільників над кільцем цілих гаусових чисел.

3. ***Мультиплікативні функції*** $\tau(n)$ ***і*** $r(n)$***, зважені тригонометричною одиницею.***

   Узагальнюються доробки М. Ютіли про функцію дільників $\tau(n)$, яка зважена тригонометричною одиницею $e^{\frac{2\pi hn}{q}}$. Будується нова асимптотична формула для функції $r(n)$, яка зважена тригонометричною одиницею. Розглядається застосування отриманих результатів.

Змістовий модуль 3. Застосування скорочених функціональних рівнянь в теорії чисел.

1. ***Скорочене функціональне рівняння для*** $\zeta(s)$ ***і*** $Z_m(s)$***.***

   Будуються скорочені функціональні рівняння для дзета-функції Римана $\zeta(s)$ і Z-функції Гекке $Z_m(s)$. Розглядається використання цих результатів для отримання оцінок $\zeta(s)$ і $Z_m(s)$ в критичній смузі.

2. ***Характери Діріхле і арифметичні функції.***

   Доведена класична теорема Діріхле про розподіл простих чисел на відрізках натурального ряду. Розглядаються спеціальні твірні ряди для мультиплікативних функцій з характерами Діріхле.

3. ***Оцінки сум значень функцій*** $\tau(n)e^{\frac{2\pi hn}{q}}$***,*** $\mu(n)e^{\frac{2\pi hn}{q}}$***.***

   Вивчається робота М. Ютіли про розподіл значень функції $\tau(n)$. Узагальнюється його метод на випадок зваженої функції $\mu(n)$. Розглядаються дослідження О. Гунявого і С. Варбанця про розподіл вказаних функцій на відрізках натурального ряду.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	усього	у тому числі				
		Лек	Прак	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
Змістовий модуль 1. Тригонометричні суми з дійснозначною функцією в показнику.						
Теорема про середнє І. М. Виноградова. Теорема М. Хакслі.	10	2	1			8
Гібридні тригонометричні суми.	10	1	1			9
Псевдовипадкові числа, методи оцінки рівнорозподіленості відповідних послідовностей.	10	1	1			9
Разом за змістовим модулем 1	30	4	3			26
Змістовий модуль 2. Гібридні тригонометричні суми в оцінках залишкових членів асимптотичних формул.						
Ряди Діріхле і дзета-функція Гекке в проблемах оцінок залишкових членів асимптотичної теорії чисел.	10	2	1			8
Твірні ряди з гібридними тригонометричними сумами.	10	1	1			6
Мультиплікативні функції $\tau(n)$ і $r(n)$, зважені тригонометричною одиницею.	10	1	1			5
Разом за змістовим модулем 2	30	4	3			19
Змістовий модуль 3. Застосування скорочених функціональних рівнянь в теорії чисел.						
Скорочене функціональне рівняння для $\zeta(s)$ і $Z_m(s)$.	10	2	1			9
Характери Діріхле і арифметичні функції.	10	1	1			7
Оцінки сум значень функцій $\tau(n)e^{\frac{2\pi hn}{q}}$, $\mu(n)e^{\frac{2\pi hn}{q}}$.	10	1	2			7

Разом за змістовим модулем 3	30	4	4			23
Усього годин	90	12	10			68

5. Теми семінарських занять: не передбачено.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Експонентні пари Філіпса. Алгоритми їх побудови. Теорема Хакслі в задачі дільників.	2
2.	Суми Гауса над скінченим полем. Розподіл квадратичних лишків на відрізках натурального ряду.	2
3.	Скорочене функціональне рівняння для Z-функції Гекке з зсувом над кільцем цілих гаусових чисел. Побудова асимптотичної формули для $\tau(\alpha)$ в арифметичній прогресії.	2
4.	Дерево експонентних пар, застосування експонентної пари Хакслі.	4
	Разом	10

7. Теми лабораторних занять: не передбачено.

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Багатомірні експонентні пари. Побудова дерева експонентних пар.	15
2	Теореми Хакслі і Бомб'єрі-Мазуччі в класичних задачах теорії чисел	15
3	Скорочене функціональне рівняння для функції $L(s,\chi)$ з первісним характером χ	15
4	Розподіл безквадратних натуральних чисел в коротких інтервалах (по працям М. Фугело і Х. Тріфонова).	11
5	Теореми М. Ютіли і О. Гунявого в асимптотичній формулі середнього значення зваженої функції дільників.	12
	Разом	68

Для самостійної роботи здобувачі можуть використовувати джерела та ресурси, наведені у пп. 15-17.

9. Методи навчання

Використовуються традиційні методи навчання (з використанням літератури, написання конспектів, висловлення гіпотез та їх перевірка, праця з періодичними виданнями, доповідь та презентація) та інтерактивні методи навчання (робота з електронними посібниками, конспектування на комп'ютері, використання допоміжного програмного забезпечення, наприклад, Mathematica, Malpe або Matlab).

10. Методи оцінювання (контролю)

Усний контроль: основне запитання, додаткові, допоміжні; запитання у вигляді проблеми; індивідуальне завдання. **Поточний контроль** на практичних заняттях. **Підсумковий контроль** змістових модулів. **Підсумкове заняття** у вигляді конференції з усною доповіддю та підготовкою візуальної презентації.

11. Форма підсумкового контролю успішності навчання

Форма підсумкового контролю: **залік.**

Залікові бали аспіранта складаються з суми балів поточного контролю отриманих під час занять балів.

12. Форма поточного контролю успішності навчання

Для оформлення результату підсумкового контролю в стандарті ECTS оцінка з дисципліни "Асимптотичні оцінки гібридних тригонометричних сум" спочатку визначається з урахуванням поточної навчальної діяльності аспіранта із відповідних тем за традиційною 5-бальною системою (відмінно, добре, задовільно, незадовільно) з подальшим перерахунком у багатобальну шкалу.

Оцінка "відмінно" виставляється у випадку, коли аспірант знає зміст заняття та лекційний матеріал у повному обсязі, ілюструючи відповіді різноманітними прикладами; дає вичерпні, точні та ясні відповіді без будь-яких навідних питань; викладає матеріал без помилок і неточностей; вільно вирішує задачі та виконує практичні завдання різного ступеню складності, самостійно генерує інноваційні ідеї.

Оцінка "добре" виставляється за умови, коли аспірант знає зміст заняття та добре його розуміє, відповіді на питання викладає правильно, послідовно та систематично, але

вони не є вичерпними, хоча на додаткові питання аспірант відповідає без помилок; вирішує всі задачі і виконує практичні завдання, відчуваючи складнощі лише у найважчих випадках.

Оцінка "задовільно" ставиться аспірантові на основі його знань всього змісту заняття та при задовільному рівні його розуміння. Аспірант спроможний вирішувати видозмінені (спрощені) завдання за допомогою навідних питань; вирішує задачі та виконує практичні навички, відчуваючи складнощі у простих випадках; не спроможний самостійно систематично викласти відповідь, але на прямо поставлені запитання відповідає правильно.

Оцінка "незадовільно" виставляється у випадках, коли знання і вміння аспіранта не відповідають вимогам "задовільної" оцінки і означає незалік.

Оцінювання самостійної роботи.

Оцінювання самостійної роботи аспірантів, яка передбачена в темі поряд з аудиторною роботою, здійснюється під час поточного контролю теми на відповідному практичному занятті.

Критерії оцінювання

Форма контролю і система оцінювання знань з дисципліни “Методи, аналіз та презентація наукових досліджень” здійснюється відповідно до вимог програми.

Вивчення предмету закінчується заліком. Оцінювання знань студентів відбувається наступним чином: сума всіх поточних оцінок ділиться на кількість практичних занять. Отримане середнє значення оцінки переводиться у бали згідно єдиної універсальної шкали перерахунку традиційних оцінок в 5-бальної системи у рейтингові бали (100 балів). Для дисциплін, що закінчується заліком (шкала додається) – залік ставиться при мінімальній кількості балів 60 (оцінка задовільно, 3 бали).

13. Розподіл балів, які отримують студенти

	Поточне тестування та самостійна робота									Сума балів
	ЗМ 1			ЗМ 2			ЗМ 3			
	Т	П	С	Т	П	С	Т	П	С	
Тема 1	7	4	4	2	3	3	3	2	2	30
Тема 2	4	4	4	2	2	5	2	4	5	32
Тема 3	4	4	5	6	2	5	5	4	3	38

Всього	40	30	30	100

Т – теорія, **П** – практична робота, **С** – самостійна робота

14. Питання для підсумкового контролю

1. Сума Клостермана для задачі кола.
2. Експонентні пари та їх застосування в оцінках тригонометричних сум.
3. Експонентні пари Філіпса. Алгоритми їх побудови. Теорема Хакслі в задачі дільників.
4. Багатомірні експонентні пари Шрінівазана.
5. Суми Гауса над скінченим полем. Розподіл квадратичних лишків на відрізках натурального ряду.
6. Псевдовипадкові числа. Алгоритми їх генерування.
7. Застосування псевдовипадкових чисел.
8. Приклади гібридних тригонометричних сум.
9. Твірні ряди над кільцем цілих гаусових чисел.
10. Скорочене функціональне рівняння для $Z_m(s)$.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	**Оцінка ECTS**	**Оцінка за національною шкалою**	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	**для заліку**
90–100	**A**	відмінно	зараховано
85–89	**B**	добре	
75–84	**C**		
70–74	**D**	задовільно	
60–69	**E**		
35–59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	**F**	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним

			вивченням дисципліни

15. Навчально-методичне забезпечення

1. Варбанець П.Д., Метод послідовного декодування в науковому пошуку. Навчально-методичний посібник // Електронний ресурс.

16. Навчально-методичне забезпечення самостійних робіт.

1. Jörn Steuding, Value-Distribution of L-Functions // Springer, 2007. – P. 340.
2. Jürgen Sander, Jörn Steuding, Rasa Steuding, From Arithmetic to Zeta-Functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz // Springer, 2016. – P.575.
3. Сергєєв С.С., Метод тригонометричних сум в асимптотичних задачах теорії чисел // Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата ф.-м. н., 2015. – 110 с.

17. Рекомендована література

1. E. Bombieri, On exponential sums in finite fields,II // Invent. math., 47(1),1978, pp. 29-39.
2. E. Hecke, Eine neue Art von Zeta Functionen und ihre Beziehungen zur Verteilungder Primzahlen // I, II, Math. Z., 1 (1918), 357–376; 6 (**1920**), 11–51.
3. Huxley M., Area, lattice points, and exponential sums // London Math. Soc. Manographs, New Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. - V.13. - 505 pp.
4. Iwaniec H., Kowalski E., Analytic Number Theory // Providence: American Mathematical Society. Colloquium Publications, vol. 53, **2004**, - 531 pp.
5. N.M. Katz, Gauss sums, Kloosterman sums, and Monodromy groups // Ann. of Math. Stud. 116, Princeton Univ., Press, Princeton, NY, **1988**, - 211 pp.
6. Niederreiter H., Finite fields and their applications, in: Contributions to General Algebra, Vol. 7, Vienna,(1990), Teubner, Stuttgart, **1991**.
7. X. Y. Liu and W. P. Zhang, “On the high-power mean of thegeneralized Gauss sums and Kloosterman sums,” Mathe-matics, vol. 7, no. 10, 307 pp., **2019**.
8. T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Teory,Springer-Verlag, New York, NY, USA, **1976**.
9. L. Chen and Z. Y. Chen, “Some new hybrid power meanformulae of trigonometric sums,” Advances in DifferencesEquation, vol. 2020, 220 pp., **2020**.

10. N.M. Korobov, Exponential Sums and their Applications // Mathematics and its Applications, volume 80, **1992**, 210 pp.
11. M. Jutila, Lectures on A Method in the Theory of Exponential Sums // Springer Berlin Heidelberg, **1987**, 134 pp.
12. Chunlei Liu, Twisted higher moments of Kloosterman sums // Proc. of the American Math. Soc., V. 130 (7), 2012, pp. 1887-1892.
13. J. Conrey and H. Iwaniec, The cubic moment of central values of automorphic L-functions // Ann. of Math., 151 (**2020**), pp. 1175-1216.

18. Електронні інформаційні ресурси

1. Ping Xi, Asymptotic behaviors of Kloosterman sums // Електронний ресурс (arXiv:1111.5455v2 [math.NT] 1 Mar 2012).
2. Варбанець С. П., "Метод тригонометричних сум в теорії конгруентних генераторів псевдовипадкових чисел та асимптотичних задачах теорії чисел" // Дисертаційна робота на здобуття наукового ступеня доктора фіз.-мат. наук, http://scc.univ.kiev.ua/upload/iblock/714/ood18ntb7qta029cs8pgir3jqs1wt7zc/dis_Varbanets%20S.P..pdf