МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

"**ЗАТВЕРДЖУЮ**"
Проректор з науково-педагогічної роботи

_____ Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
"_____" _____ 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Середні значення рядів Діріхле та перетворення Лапласа і Меліна»

Рівень вищої освіти	**третій (освітньо-науковий)**
Галузь знань	**11 Математика та статистика**
Спеціальність	**111 Математика**
Освітньо-наукова програма	**Математика**

ОНУ
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Середні значення рядів Дирихле та перетворення Лапласа і Меліна». – Одеса: ОНУ, 2022.

Розробники:
Варбанець Павло Дмитрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № 3 від. "11" листопада 2022 р.

Завідувач кафедри _____ Павло ВАРБАНЕЦЬ

Погоджено із гарантом ОНП «Математика» В'ячеслав ЄВТУХОВ

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 3 від. "15" листопада 2022 р.

Голова НМК _____ Євген СТРАХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="13">Загальна кількість:

кредитів – 3

годин – 90

залікових модулів – 1

змістових модулів – 3</td><td rowspan="13">Галузь знань
11 Математика та статистика

Спеціальність
111 Математика

Спеціалізації:
_____
(назва)

Рівень вищої освіти:
третій
(освітньо-науковий)</td><td colspan="2">За вибором</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>12 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>10 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>68 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма підсумкового контролю:
залік</td></tr>
</table>

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни: дати знання про теорію рядів Діріхле, їх застосування в асимптотичних задачах теорії чисел, теорему Перона про обчислення суматорної функції коефіцієнтів рядів Діріхле і її узагальнення, в тому числі в арифметичних прогресіях; ряди Діріхле для спеціальних арифметичних функцій ($r(n)$, $\tau(n)$, $\mu^2(n)$); теорема Рамачандра для асимптотичних задач суматорних функцій на коротких інтервалах; властивості перетворення Лапласа та модифікованого перетворення Меліна, як важливих частин дослідження сум значень мультиплікативних а адитивних функцій.

Завданнями дисципліни є ознайомлення з результатами аналітичної теорії чисел щодо побудови асимптотичних формул для суматорних функцій, асоційованих з мультиплікативними та адитивними функціями на спеціальних послідовностях натуральних чисел або кільця цілих гаусових чисел; ознайомлення з методом українського математика Г.Ф. Вороного в побудові асимптотичної формули в проблемі дільників та сучасними узагальненнями методу Вороного. Проблема круга і проблема дільників на арифметичних прогресіях і в коротких інтервалах. Використання теореми Рамачандра в задачі про розподіл значень функції $\nu(n)$ на коротких інтервалах (по роботі І. Катаі). Узагальнення задачі на випадок кільця цілих гаусових чисел. Ознайомити з результатами застосування теорем Мотохаші, Івича в аналітичній теорії чисел.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

- ЗК 01. Здатність до критичного аналізу та оцінки сучасних наукових досягнень.
- ЗК 06. Здатність породжувати нові ідеї (креативність).
- ФК 01. Фундаментальні знання та глибоке розуміння загальних та спеціальних математичних дисциплін.
- ФК 02. Здатність будувати математичні моделі для опису та подальшого аналізу явищ та процесів.
- ФК 03. Здатність до переносу результатів математичних досліджень на нематематичні контексти.
- ФК 05. Здатність до постановки та вивчення нових проблем з різноманітних областей математичного знання.
- ФК 08. Здатність до узагальнення відомих методів дослідження для подальшого розвитку математичних теорій.
- ФК 09. Здатність до створення і використання нових методів розвитку

сучасних математичних досягнень.

Очікувані результати навчання. В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен

знати: алгоритми побудови асимптотичних формул для мультиплікативних функцій, використання методів тригонометричних сум і перетворень Лапласа, Меліна і Діріхле в аналітичній теорії чисел.

вміти: самостійно опрацьовувати літературу, застосовувати отримані знання для дослідження розподілу значень мультиплікативних функцій на послідовностях цілих чисел, в тому числі, на арифметичних прогресіях з ростучою різницею прогресії.

Очікувані програмні результати навчання:

- ПРН 05. Вміти здійснювати аналіз поставленої задачі, працювати з літературою, обирати шляхи до вирішення проблеми, застосовувати сучасні методи дослідження, робити висновки, оцінювати отримані результати, поширювати методики дослідження на більш загальні об’єкти, а також генерувати нові ідеї та підходи для вирішення складних актуальних задач.
- ПРН 11. Вміти використовувати знання обраних основних та спеціальних математичних дисциплін для вирішення наукових проблем за напрямком дисертаційного дослідження.
- ПРН 12. Вміти надавати всебічну інтерпретацію тверджень, проводити їх узагальнення; відрізняти основні ідеї від деталей та технічних викладок; удосконалювати доведення.
- ПРН 13. Вміти розв’язувати конкретні математичні задачі, сформульовані у термінах певної предметної області; оцінювати ступінь адекватності математичної моделі явищу, яке вона описує.

3. Програма дисципліни

Змістовий модуль 1. Ряди Діріхле.

1. ***Збіжність рядів Діріхле, абсолютна збіжність.***

   Означення твірного ряду Діріхле для даної послідовності дійсних чисел. Абсолютна і умовна збіжність. Теорема Ойлера для рядів Діріхле з мультиплікативною функцією. Зв'язок між абсцисами умовної і абсолютної точками збіжності. Теорема Ландау.

2. ***Дзета-функція Римана, її властивості. Гіпотеза Римана, її роль в побудові асимптотичних формул.***

   Аналітична продовженність ряду Діріхле для дзета-функції Римана на критичну смугу. Функціональне рівняння для $\zeta(s)$, його застосування для оцінок $\zeta(s)$ в критичній смузі. Гіпотеза Римана. Умовні результати при побудові асимптотичних формул для арифметичних функцій, ряди Діріхле яких залежать від $\zeta(s)$.

3. ***Універсальність дзета-функції Римана (по працям А. Лауринчикаса)***

   Зв'язок дзета-функції Римана з аналітичними функціями в критичній смузі. Теорема Вороніна про універсальність дзета-функції Римана. Результати А. Лауринчикаса по узагальненню теореми Вороніна. Універсальність деяких дзета-подібних функцій.

Змістовий модуль 2. Застосування методу тригонометричних сум для оцінки залишкових членів асимптотичних формул, пов'язаних з розподілом значень мультиплікативних функцій.

1. ***Повні та неповні тригонометричні суми. Суми Гауса і Клостермана.***

   Оцінки неповних тригонометричних сум через повні (формула Хуа – ЛоКена). Повні і неповні суми Гауса. Використання сум Гауса в задачі про квадратичні лишки за простим модулем. Сума Клостермана і її властивості. Використання сум Клостермана з задачі про функцію дільників в арифметичній прогресії.

2. ***Суми Клостермана над кільцем цілих гаусових чисел. Нормені суми Клостермана.***

   Кільце цілих гаусових чисел. Норма і слід гаусового числа.суми Клостермана над $Z[i]$. n-вимірні суми Клостермана (по працям С. Варбанця). Нормені суми Клостермана і їх використання в проблемі кола на арифметичній прогресії.

3. ***Розподіл функцій дільників та кола в арифметичних прогресіях.***

   Функція дільників на арифметичній прогресії. Теорема К. Хулі. Покращення теореми К. Хулі (по працям І. Шпарлінського і співавторів). Проблема кола в арифметичній прогресії. Оцінка залишкового члену за допомогою сум Клостермана. Узагальнення проблем дільників і проблеми кола на випадок трьохвимірної площини.

Змістовий модуль 3. Перетворення Лапласа та Меліна, їх властивості.

1. ***Перетворення Лапласа, його застосування в статистичній теорії чисел.***

   Перетворення Лапласа. Проблема збіжності. Властивості перетворення Лапласа. Обертання перетворення Лапласа. Диференціювання і інтегрування перетворення Лапласа. Перетворення Лапласа в комплексній площині. Інтеграли типу $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Формула комплексного обертання.

2. ***Перетворення Меліна, пари Меліна. Приклади використання в асимптотичних задачах.***

   Перетворення Меліна для комплексно значених функцій. Пари Меліна. Модифіковане перетворення Меліна і приклади його застосування. Модифіковане перетворення Меліна в задачах розподілу значень мультиплікативних функцій.

3. ***Модифіковане перетворення Меліна по працям Ю. Мотохаші та А. Івича.***

   Моменти дзета-функції Римана. Їх використання в асимптотичних задачах статистичної теорії чисел. Теореми Мотошаші і Івича в проблемі оцінки k-мірних моментів для $\zeta(s)$ і їх використання в n-мірній проблемі дільників.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	усього	у тому числі				
		Лек	Прак	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
Змістовий модуль 1. Ряди Діріхле.						
Збіжність рядів Діріхле, абсолютна збіжність.	10	2	1			8
Дзета-функція Римана, її властивості. Гіпотеза Римана, її роль в побудові асимптотичних формул.	10	1	1			9
Універсальність дзета-функції Римана (по працям А. Лауринчикаса)	10	1	1			9
Разом за змістовим модулем 1	30	4	3			26
Змістовий модуль 2. Застосування методу тригонометричних сум для оцінки залишкових членів асимптотичних формул, пов'язаних з розподілом значень мультиплікативних функцій.						
Повні та неповні тригонометричні суми. Суми Гауса і Клостермана.	10	2	1			8
Суми Клостермана над кільцем цілих гаусових чисел. Нормені суми Клостермана.	10	1	1			6
Розподіл функцій дільників та кола в арифметичних прогресіях.	10	1	1			5
Разом за змістовим модулем 2	30	4	3			19
Змістовий модуль 3. Перетворення Лапласа та Меліна, їх властивості.						
Перетворення Лапласа, його застосування в статистичній теорії чисел.	10	2	1			9
Перетворення Меліна, пари Меліна. Приклади використання в асимптотичних задачах.	10	1	1			7
Модифіковане перетворення Меліна по працям Ю. Мотохаші та А. Івича.	10	1	2			7
Разом за змістовим модулем 3	30	4	4			23

Усього годин	90	12	10			68

5. Теми семінарських занять: непередбачено.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Означення рядів Діріхле. Визначення точок умовної та абсолютної збіжності. Використання формули Перона.	2
2.	Побудова асимптотичних формул в задачі кола і в задачі про розподіл вільних від квадратів натуральних чисел.	2
3.	Оцінка повної суми Клостермана (використання методу Х. Іванця). Сума Клостермана над Z[i].	2
4.	Перетворення Меліна. Побудова пар Меліна.	4
	Разом	10

7. Теми лабораторних занять: не передбачено

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Побудова твірних рядів для функцій дільників кола функції Мьобіуса. Визначення особливих точок побудованих рядів. Обчислення головних членів в асимптотичних задачах для функцій $\tau(n)$, $r(n)$, $\tau_{2,3}(n)$.	8
2	Оцінка залишкових членів методом тригонометричних сум для твірних рядів, які є добутком функцій $\tau(n)$ і $r(n)$.	9
3	Теореми Виноградова і Пойа про розподіл квадратичних лишків за модулем простого числа. Теорема Берджеса.	9
4	Суми Гауса скінченого поля. Неповні суми Гауса. Розподіл розв'язків конгруенції $x^2 + y^2 \equiv 1 \left(mod\, p^n\right)$.	8
5	Суми Клостермана. Теорема А. Вейля та її застосування в аналітичній теорії чисел.	9
6	Модифіковане перетворення Меліна в асимптотичній задачі узагальненої проблеми дільників.	5
7	Z-функція Гекке з зсувом. Перетворення Лапласа для пари Z-функцій Гекке	9

8	Універсальність дзета-подібних функцій (по працям А. Лауринчикаса та Р. Качинкайте)	11
	Разом	68

Для самостійної роботи здобувачі можуть використовувати джерела та ресурси, наведені у пп. 15-17.

9. Методи навчання

Використовуються традиційні методи навчання (з використанням літератури, написання конспектів, висловлення гіпотез та їх перевірка, праця з періодичними виданнями, доповідь та презентація) та інтерактивні методи навчання (робота з електронними посібниками, конспектування на комп'ютері, використання допоміжного програмного забезпечення, наприклад, Mathematica, Malpe або Matlab).

10. Методи оцінювання (контролю)

Усний контроль: основне запитання, додаткові, допоміжні; запитання у вигляді проблеми; індивідуальне завдання. **Поточний контроль** на практичних заняттях. **Підсумковий контроль** змістових модулів. **Підсумкове заняття** у вигляді конференції з усною доповіддю та підготовкою візуальної презентації.

11. Форма підсумкового контролю успішності навчання

Форма підсумкового контролю: **залік.**

Залікові бали аспіранта складаються з суми балів поточного контролю отриманих під час занять балів.

12. Форма поточного контролю успішності навчання

Для оформлення результату підсумкового контролю в стандарті ECTS оцінка з дисципліни "Середні значення рядів Діріхле та перетворення Лапласа і Меліна" спочатку визначається з урахуванням поточної навчальної діяльності аспіранта із відповідних тем за традиційною 5-бальною системою (відмінно, добре, задовільно, незадовільно) з подальшим перерахунком у багатобальну шкалу.

Оцінка "відмінно" виставляється у випадку, коли аспірант знає зміст заняття та лекційний матеріал у повному обсязі, ілюструючи відповіді різноманітними прикладами; дає вичерпні, точні та ясні відповіді без будь-яких навідних питань; викладає матеріал без помилок і неточностей; вільно вирішує задачі та виконує практичні завдання різного ступеню складності, самостійно генерує інноваційні ідеї.

Оцінка "добре" виставляється за умови, коли аспірант знає зміст заняття та добре його розуміє, відповіді на питання викладає правильно, послідовно та систематично, але вони не є вичерпними, хоча на додаткові питання аспірант відповідає без помилок; вирішує всі задачі і виконує практичні завдання, відчуваючи складнощі лише у найважчих випадках.

Оцінка "задовільно" ставиться аспірантові на основі його знань всього змісту заняття та при задовільному рівні його розуміння. Аспірант спроможний вирішувати видозмінені (спрощені) завдання за допомогою навідних питань; вирішує задачі та виконує практичні навички, відчуваючи складнощі у простих випадках; не спроможний самостійно систематично викласти відповідь, але на прямо поставлені запитання відповідає правильно.

Оцінка "незадовільно" виставляється у випадках, коли знання і вміння аспіранта не відповідають вимогам "задовільної" оцінки і означає незалік.

Оцінювання самостійної роботи.

Оцінювання самостійної роботи аспірантів, яка передбачена в темі поряд з аудиторною роботою, здійснюється під час поточного контролю теми на відповідному практичному занятті.

Критерії оцінювання

Форма контролю і система оцінювання знань з дисципліни “Методи, аналіз та презентація наукових досліджень” здійснюється відповідно до вимог програми.

Вивчення предмету закінчується заліком. Оцінювання знань студентів відбувається наступним чином: сума всіх поточних оцінок ділиться на кількість практичних занять. Отримане середнє значення оцінки переводиться у бали згідно єдиної універсальної шкали перерахунку традиційних оцінок в 5-бальної системи у рейтингові бали (100 балів). Для дисциплін, що закінчується заліком (шкала додається) – залік ставиться при мінімальній кількості балів 60 (оцінка задовільно, 3 бали).

13. Розподіл балів, які отримують студенти

	Поточне тестування та самостійна робота									**Сума балів**
	ЗМ 1			**ЗМ 2**			**ЗМ 3**			
	Т	**П**	**С**	**Т**	**П**	**С**	**Т**	**П**	**С**	
Тема 1	7	4	4	2	3	3	3	2	2	30
Тема 2	4	4	4	2	2	5	2	4	5	32

Тема 3	4	4	5	6	2	5	5	4	3	38
Всього	40			30			30			100

Т – теорія, **П** – практична робота, **С** – самостійна робота

14. Питання для підсумкового контролю

1. Означення рядів Діріхле, точки умовної та абсолютної збіжності рядів Діріхле.
2. Основні теореми про властивості рядів Діріхле. Приклади.
3. Твірні ряди для арифметичних функцій $\tau(n)$, $r(n)$, $\mu^2(n)$.
4. Суми Гауса і Клостермана.
5. Оцінки залишкових членів в задачах про середнє значення $\tau(n)$ і $r(n)$.
6. Модифіковане перетворення Меліна, його означення.
7. Дзета-функція Римана. Тотожність Ойлера для функції $\zeta(s)$, нулі $\zeta(s)$.
8. Перетворення Лапласа для пари Z-функцій Гекке.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	**Оцінка ECTS**	**Оцінка за національною шкалою**	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	**для заліку**
90–100	**A**	відмінно	зараховано
85–89	**B**	добре	
75–84	**C**		
70–74	**D**	задовільно	
60–69	**E**		
35–59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	**F**	незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни

15. Навчально-методичне забезпечення

1. Варбанець П.Д., Метод послідовного декодування в науковому пошуку. Навчально-методичний посібник . – Одеса . Астропринт, 2007. 32с.

16. Навчально-методичне забезпечення для самостійних робіт:

1. Jörn Steuding, Value-Distribution of L-Functions // Springer, 2007. – P. 340.
2. Jürgen Sander, Jörn Steuding, Rasa Steuding, From Arithmetic to Zeta-Functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz // Springer, 2016. – P.575.
3. Лелеченко А. В., Арифметичні функції, асоційовані з експонентними дільниками // кандидатська дисертація, 2015. – 173 с.

17. Рекомендована література

1. A. Balčiunas, A. Laurinčikas, The Laplace transform of Dirichlet L-functions // Nonlinear Anal. Model. Control, 17(2), 127–138 (2012).
2. E. Bombieri, On exponential sums in finite fields,II // Invent. math., 47(1),1978, pp. 29-39.
3. E. Hecke, Eine neue Art von Zeta Functionen und ihre Beziehungen zur Verteilungder Primzahlen // I, II, Math. Z., 1 (1918), 357–376; 6 (1920), 11–51.
4. Huxley M., Area, lattice points, and exponential sums // London Math. Soc. Manographs, New Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. - V.13. - 505 pp.
5. A. Ivic M. Jutila, Y. Motohashi, The Mellin transform of powers of the zetafunction // Acta Arith., 95, pp. 305–342 (2000).
6. Iwaniec H., Kowalski E., Analytic Number Theory // Providence: American Mathematical Society. Colloquium Publications, vol. 53, 2004, - 531 pp.
7. N.M. Katz, Gauss sums, Kloosterman sums, and Monodromy groups // Ann. of Math. Stud. 116, Princeton Univ., Press, Princeton, NY, 1988, - 211 pp.
8. Kratzel A., Analytische Funktionen in der Zahlentheorie // Teubner-Texte zur Mathematik, Stuttgart, 2000. - V. 139. - 292 pp.
9. M. Lukkarinen, The Mellin Transform of the Square of Riemann's Zeta-Function and Atkinson's Formula // Ann. Acad. Scie. Fenn., Math. Diss., 140, Suomalainen Tiedeakatemia, Helsinki, 2005.
10. Niederreiter H., Finite fields and their applications, in: Contributions to General Algebra, Vol. 7, Vienna,(1990), Teubner, Stuttgart, 1991.
11. Працьовитий М.В., Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів // Київ: Вид. НПУ імені М.П, Драгоманова, 1998. - 296 с.

12. Joe L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications //Springer-Verlag, 2009, 235 pp.

18. Електронні інформаційні ресурси

Варбанець Сергій Павлович, "Метод тригонометричних сум в теорії конгруентних генераторів псевдовипадкових чисел та асимптотичних задачах теорії чисел" // Дисертаційна робота на здобуття наукового ступеня доктора фіз.-мат. наук, http://scc.univ.kiev.ua/upload/iblock/714/ood18ntb7qta029cs8pgir3jqs1wt7zc/dis_Varbanets%20S.P..pdf