

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА  
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики



“ЗАТВЕРДЖЮ”  
Проректор з науково-педагогічної роботи  
Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО  
“25” листопада 2022 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  
**ВБ 3.2 «Розв'язання спектральних задач методом**  
**скінчених елементів»**

Рівень вищої освіти	<b>третій (освітньо-науковий)</b>
Галузь знань	<b>11 Математика та статистика</b>
Спеціальність	<b>113 Прикладна математика</b>
Освітньо-наукова програма	<b>Обчислювальна математика, методи математичної фізики, варіаційне числення і теорія оптимального керування та механіка</b>

ОНУ  
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Розв'язання спектральних задач методом скінчених елементів». – Одеса: ОНУ, 2022.

Розробник:

Вербіцький Виктор Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № 5 від. “14” листопада 2022 р.

Завідувач кафедри

Ольга КІЧМАРЕНКО

Погоджено із гарантом ОНП “Обчислювальна математика, методи математичної фізики, варіаційне числення і теорія оптимального керування та механіка” Н.Д. ВАЙСФЕЛЬД

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 3 від. “15” листопада 2022 р.

Голова НМК

Євген СТРАХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № \_\_\_\_ від. “\_\_\_\_” 20 \_\_\_\_ р.

Завідувач кафедри

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № \_\_\_\_ від. “\_\_\_\_” 20 \_\_\_\_ р.

Завідувач кафедри

## 1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		<b>Очна (денна, вечірня) форма навчання</b>
Загальна кількість: кредитів – 3 годин – 90 змістових модулів – 2	<p>Галузь знань <b>11 Математика та статистика</b></p> <p>Спеціальність <b>113 Прикладна математика</b></p> <p>Спеціалізації: _____ (назва)</p> <p>Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)</p>	<p>Характеристика навчальної дисципліни</p> <p><b>Очна (денна, вечірня) форма навчання</b></p> <p>за вибором</p> <p><b>Rік підготовки:</b> 1-й <b>Семестр</b> 1-й <b>Лекції</b> 12 год. <b>Практичні, семінарські</b> 10 год. <b>Лабораторні</b> 0 год. <b>Самостійна робота</b> 68 год. <b>Форма підсумкового контролю:</b> залік</p>



## **2. Мета та завдання навчальної дисципліни**

Мета ознайомити студентів з основними аспектами побудови адаптивних схем методу скінченних елементів розв'язування спектральних задач для рівнянь з частинними похідними.

Завдання:

1. Ознайомити студентів з побудовою варіаційних спектральних задач для еліптичних крайових задач;
2. Ознайомити студентів з методами побудови скінченно-елементних апроксимацій спектральних задач;
3. Ознайомити студентів з основами обчислення апостеріорних оцінювачів похибки скінченно-елементного розв'язку спектральної задачі
4. Ознайомити студентів з методами побудови адаптивних схем методу скінченних елементів для спектральних задач

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних компетентностей:

**Інтегральна компетентність.** Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та дослідницько-інноваційної діяльності у сфері математики та статистики із застосуванням отриманих знань із суміжних навчальних дисциплін, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та професійних практик.

- ФК 01. Здатність до глибокого розуміння теоретичних положень, історії їх розвитку, сучасного стану та майбутнього концепту за напрямком власного наукового дослідження в прикладній математиці.
- ФК 02. Здатність до визначення перспективних наукових напрямів на основі аналітичного пошуку з використанням сучасних методів комп'ютерних та інформаційних технологій.
- ФК 04. Здатність до абстракції, включаючи здатність логічно розвивати окремі формальні теорії та встановлювати зв'язок між ними.
- ФК 05. Здатність до глибинного розуміння загальних та спеціальних математичних дисциплін.
- ФК 06. Здатність будувати математичні моделі для опису та подальшого аналізу явищ та процесів.
- ФК 07. Здатність формулювати математичні постановки складних оптимізаційних проблем і проблем прийняття рішень.
- ФК 09. Здатність користуватися, управляти і розробляти нові інформаційні технології.

**Очікувані результати навчання.** У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:**

1. Основні теоретичні аспекти побудови варіаційних формулювань спектральних задач;
2. Методи визначення швидкості збіжності скінченно-елементних розв'язків для задач на власні значення;
3. Методи побудови апостеріорних оцінювачів похибки скінченно-елементних розв'язків спектральних задач.

**вміти:**

1. записати варіаційне формулювання задачі на власні значення;
2. будувати скінченно-елементну апроксимацію задачі на власні значення;
3. побудувати апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку спектральної задачі;
4. реалізувати адаптивну схему методу скінченних елементів для задачі на власні значення.



Це відповідає наступним програмним результатам навчання:

- ПРН 05. Вміти описувати, аналізувати та синтезувати інформацію, враховуючи попередній досвід; піддавати сумніву отримані раніше результати; правильно поставити задачу дослідження та відібрати підходи до її розв'язку; виявляти ключові ідеї у напрацьованому розв'язку та представлення їх у чіткому і завершенному вигляді.
- ПРН 06. Вміти здійснювати аналіз поставленої задачі, працювати з літературою, обирати шляхи до вирішення проблеми, застосовувати сучасні методи дослідження, робити висновки, оцінювати отримані результати.
- ПРН 07. Вміти ставити проблему, проводити аналіз її сучасного стану розробки, користуватися апаратом розв'язання та оприлюднення результатів із застосуванням сучасних інформаційно – комп'ютерних технологій.
- ПРН 10. Вміти проводити доведення математичних тверджень, що не є аналогічними до раніше відомих.
- ПРН 12. Вміти складати модель творчої роботи, програму і план власного дослідження; формулювати висновки та узагальнення; обґрунтовувати практичну значущість результатів дослідження.
- ПРН 14. Вміти розв'язувати конкретні математичні задачі, сформульовані у термінах даної предметної області; оцінювати ступінь адекватності математичної моделі явищу, яке вона описує.
- ПРН 15. Вміти здійснювати базові перетворення математичних моделей для зручності розв'язання відповідних задач; надавати інтерпретацію отриманих результатів.

Бути здатними до безперервного саморозвитку та самовдосконалення. Застосовувати в роботі інноваційний підхід. Сприяти розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності.

### 3. Зміст навчальної дисципліни

#### Змістовний модуль 1

- Тема 1. Спектральні задачі для диференціальних рівнянь.** Математичні моделі, які приводять до задач на власні значення. Компактні оператори у гіЛЬбертових просторах. Властивості спектра компактного оператора. Енергетичні теореми в проблемі власних чисел. Дискретний спектр оператора Штурма-Ліувілля.
- Тема 2. Слабке формулювання спектральної задачі.** Метод Рітца в задачах на власні значення. Мінімаксний принцип Куранта. Теореми про порівняння власних чисел. Слабке формулювання задачі на власні значення та метод Гальоркіна.

#### Змістовний модуль 2

- Тема 3. Скінченно-елементна апроксимація спектральної задачі.** Числовий аналіз спектральної задачі для оператора Штурма-Ліувілля. Похибки власних чисел і власних функцій. Узагальнена лінійна матрична проблема власних значень.
- Тема 4. Апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементних апроксимацій спектральних крайових задач.** Апостеріорні оцінки зверху та знизу похибки власних значень та функцій скінченно-елементного розв'язку спектральної задачі. Обчислення апостеріорного оцінювача. Способи побудови апостеріорних оцінювачів для спектральної задачі.



#### 4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Очна (денна, вечірня) форма					
	усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
<b>Змістовний модуль 1</b>						
Тема 1. Спектральні задачі для диференціальних рівнянь.	20	3	2			15
Тема 2. Слабке формулювання спектральної задачі.	20	3	3			14
Разом за модулем 1	40	6	5			29
<b>Змістовний модуль 2.</b>						
Тема 3. Скінченно-елементна апроксимація спектральної задачі.	26	3	3			20
Тема 4. Апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементних апроксимацій спектральних крайових задач.	24	3	2			19
Разом за змістовим модулем 2	50	6	5			39
<b>Усього годин</b>	<b>90</b>	<b>12</b>	<b>10</b>			<b>68</b>

#### 5. Теми семінарських занять

Теми семінарських занять не передбачено навчальним планом.

#### 6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
<b>Змістовний модуль 1.</b>		
1	Побудова варіаційної спектральної задачі	2
2	Формування матриці скінченно-елементної апроксимації спектральної задачі	3
<b>Змістовний модуль 2.</b>		
3	Побудова апостеріорних оцінювачів спектральної задачі	3
4	Побудова адаптивної схеми МСЕ для спектральної задачі.	2



## **7. Теми лабораторних занять**

Теми лабораторних занять не передбачено навчальним планом.

## **8. Самостійна робота**

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Спектральні задачі для диференціальних рівнянь.	15
2	Слабке формулювання спектральної задачі.	14
3	Скінченно-елементна апроксимація спектральної задачі.	20
4	Апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементних апроксимацій спектральних крайових задач.	19
	<b>Разом</b>	<b>68</b>

Самостійна робота оформлюється у вигляді доповіді, обговорення, та оцінювання якої здійснюється на поточному та підсумковому контролі.

Самостійна робота здобувачів забезпечується засобами Google Workspace for Education.

Навчально-методичне забезпечення: робоча програма навчальної дисципліни; навчально-методичні матеріали для лекцій, конспекти (тексти, схеми) лекцій; мультимедійні презентації; плани практичних занять:

В.В. Вербіцький, Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2018. – 116 с.

Критерії оцінювання виконання самостійної роботи:

- своєчасність виконання;
- добросердість та коректність у представлені текстів, презентацій та посилань (у разі доведеного плаґіату бали за роботу анулюються);
- повнота, грамотність і коректність розкриття основних положень;
- творчий підхід до постановки і реалізації завдання;
- відповідність формальним критеріям (структура, послідовність, логічність, мовна грамотність, якість оформлення тощо).
- вміння застосовувати теоретичні знання для рішення практичних завдань.

## **9. Методи навчання**

Метод проблемного викладення (наукового пошуку)

Пояснювально-ілюстративні методи: лекція, пояснення, самостійне опрацювання літературних джерел, робота з електронними конспектами лекцій та презентаціями, опрацювання наукових публікацій

Наочні методи (презентації, ілюстрації)

Репродуктивні методи: розв'язування задач за алгоритмами конкретних методів, практичні роботи

Дослідницький метод

Методи формування і стимулювання пізнавальної діяльності: навчальні дискусії



## **10. Форми контролю і методи оцінювання**

Методи усного контролю: індивідуальне усне поточне опитування, оцінювання доповідей, підсумковий контроль - усний залік.

Методи письмового контролю: письмові поточні самостійні роботи.

**При оцінюванні в балах рівня засвоєння матеріалу використовуються загальні критерії оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти:**

Оцінка за національною шкалою та відсоток від максимальної кількості балів	Теоретична підготовка	Практична підготовка
	Здобувач освіти	
зараховано (90-100% від максимальної кількості балів)	у повному обсязі володіє навчальним матеріалом, вільно, самостійно та аргументовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей; глибоко та всебічно розкриває зміст теоретичних питань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; робить самостійні висновки, виявляє причинно-наслідкові зв'язки; самостійно знаходить додаткову інформацію та використовує її для реалізації поставлених перед ним завдань. Здобувач здатен виділяти суттєві ознаки вивченого за допомогою операцій синтезу, аналізу, виявляти причинно-наслідкові зв'язки, формувати висновки і узагальнення, вільно оперувати фактами та відомостями.	глибоко та всебічно розкриває сутність практичних/розрахункових завдань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; може аргументовано обрати раціональний спосіб виконання завдання й оцінити результати власної практичної діяльності; виконує творчі завдання та ініціює нові шляхи їх виконання; вільно використовує набуті теоретичні знання при аналізі практичного матеріалу; проявляє творчий підхід до виконання індивідуальних та колективних завдань при самостійній роботі.



зараховано (75-89% від максимальн ої кількості балів)	достатньо повно володіє навчальним матеріалом, обґрунтовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей, використовуючи при цьому нормативну та обов'язкову літературу; при представленні деяких питань не вистачає достатньої глибини та аргументації, застосовує знання для розв'язання стандартних ситуацій; самостійно аналізує, узагальнює і систематизує навчальну інформацію, але допускаються при цьому окремі несуттєві неточності та незначні помилки.	правильно вирішив більшість розрахункових /тестових завдань за зразком; має стійкі навички виконання завдання
зараховано (60-74% від максимальн ої кількості балів)	володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні або відтворює певну частину навчального матеріалу з елементами логічних зв'язків, знає основні поняття навчального матеріалу; має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.	може використовувати знання в стандартних ситуаціях, має елементарні, нестійкі навички виконання завдання. Правильно вирішив половину розрахункових/тестових завдань. Здобувач має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.
не зараховано (35-59% від максимальн ої кількості балів)	володіє навчальним матеріалом поверхово й фрагментарно (без аргументації та обґрунтування); безсистемно виокремлює випадкові ознаки вивченого; не вміє робити найпростіші операції аналізу і синтезу; робити узагальнення, висновки; під час відповіді допускаються суттєві помилки	недостатньо розкриває сутність практичних завдань, допускаючи при цьому суттєві неточності, правильно вирішив окремі розрахункові/тестові завдання за допомогою викладача, відсутні сформовані уміння та навички.
не зараховано (0-34% від максимальн ої кількості балів)	не володіє навчальним матеріалом	виконує лише елементи завдання, потребує постійної допомоги викладача

Примітка: максимальна кількість балів за кожною темою вказана в п.12.

Форма підсумкового контролю – залік, виставляється за кількістю балів, набраних в семестрі (згідно зі шкалою оцінювання з п. 12).



## **11. Питання для поточного та періодичного контролю**

1. Простори Соболєва. Область із границею Ліпшица.
2. Математичні моделі, які приводять до задач на власні значення.
3. Компактні оператори у гільбертових просторах.
4. Властивості спектра компактного оператора.
5. Енергетичні теореми в проблемі власних чисел.
6. Дискретний спектр оператора Штурма-Ліувілля.
7. Метод Рітца в задачах на власні значення.
8. Мінімаксний принцип Куранта.
9. Теореми про порівняння власних чисел.
10. Слабке формулювання задачі на власні значення та метод Гальборкіна.
11. Числовий аналіз спектральної задачі для оператора Штурма-Ліувілля.
12. Похибки власних чисел і власних функцій.
13. Узагальнена лінійна матрична проблема власних значень.
14. Апостеріорні оцінки зверху похибки власних значень та функцій скінченно-елементного розв'язку спектральної задачі.
15. Апостеріорні оцінки знизу похибки власних значень та функцій скінченно-елементного розв'язку спектральної задачі.
16. Обчислення апостеріорного оцінювача.
17. Способи побудови апостеріорних оцінювачів для спектральної задачі.

## **12. Розподіл балів, які отримують здобувачі**

Поточне тестування та самостійна робота				Сума
Змістовний модуль 1		Змістовний модуль 2		
T1	T2	T3	T4	
25	25	25	25	100

## **Розподіл балів за видами навчальної роботи**

Види навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Змістовий модуль 1			
Поточний контроль на лекціях	10	2	20
Виконання практичних робіт	10	3	30
<b>Усього за змістовим модулем 1</b>			<b>0 – 50</b>
Змістовий модуль 2			
Поточний контроль на лекціях	10	2	20
Виконання практичних робіт	10	3	30
<b>Усього за змістовим модулем 2</b>			<b>0 – 50</b>
<b>Підсумкова сума балів</b>			<b>0 – 100</b>



## Шкала оцінювання ECTS та національна

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90–100	A	відмінно	зараховано
85–89	B	добре	
75–84	C		
70–74	D		
60–69	E	задовільно	
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

### 13. Навчально-методичне забезпечення

Навчально-методичне забезпечення: робоча програма навчальної дисципліни; навчально-методичні матеріали для лекцій, конспекти (тексти, схеми) лекцій; мультимедійні презентації; плани практичних занять; методичні вказівки (рекомендації) щодо самостійного вивчення дисципліни:

В.В. Вербіцький, Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2018. – 116 с.

### 14. Рекомендована література

#### **Основна**

1. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. – 2021 John Wiley & Sons, Inc., 2021. 331 pp.
3. AINSWORTH MARK and ODEN J. TINSLEY. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. – JOHN WILEY & SONS, 2000. – 264 pp.
4. Verfurth R. Adaptive Finite Element Methods. – Lecture Notes Winter Term Fakultat fur Mathematik, Ruhr-Universit 2007/08.
5. Verbitsky V., Loktev A. An exact finite element scheme of the boundary value problem for an ordinary differential equation // Бічн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2020. Вип. 28. С. 82–87.
6. Вербицький В. В., Иванищева И.Н. ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ / Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 33–42.



### **Допоміжна**

1. Oden, J.T. and Demkowicz, L.F. Applied Functional Analysis. CRC Press., 1996.
2. Demkowicz L. Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / L. Demkowicz – Chapman and Hall/CRC. – 2006. – 398 p.
3. Молчанов И.Н., Николаенко Л.Д. Основы метода конечных элементов. - Киев, Наукова думка, 1989. - 269 с.
4. MIXED FINITE ELEMENT TECHNOLOGIES. EDITED BY CARSTEN CARSTENSEN, PETER WRIGGERS. – SpringerWienNewYork, 2009. – 221 pp.
5. Larson M.G. A-posteriori and a-priori error analysis for finite element approximations of selfadjoint eigenvalue problems SIAM J. Numer. Anal. 38 (2000), p. 562-580.

### **15. Електронні інформаційні ресурси**

1. <http://nbuv.gov.ua/> – Сайт Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського;
2. <http://www.dnppb.gov.ua/> – Сайт Державної науково-педагогічної бібліотеки України імені В.О. Сухомлинського;
3. <http://onu.edu.ua/> – Сайт бібліотеки ОНУ імені І. І. Мечникова;
4. <http://odnb.odessa.ua/> – Сайт Одеської національної наукової бібліотеки;
5. <http://korolenko.kharkov.com/> – Сайт Харківської державної наукової бібліотеки імені В.Г. Короленка;
6. <https://www.imath.kiev.ua/> – Сайт Інституту математики НАН України;
7. <https://umj.imath.kiev.ua/> – Український математичний журнал;
8. <https://imath.kiev.ua/~nosc/web/?lang=ua> – журнал Нелінійні коливання.
9. <http://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews> – реферативний математичний журнал, що видається AMS
10. <https://zbmath.org/> - реферативний математичний журнал видавництва «Шпрингер» та електронна база даних «ZBMATH — The database Zentralblatt MATH»
11. <http://netlib.org> – Netlib is a collection of mathematical software, papers, and databases.

