МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
Кафедра методів математичної фізики

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з науково-педагогічної роботи

Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
"25" листопада 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ВБ 2.1 «Основи побудови адаптивних скінченно-елементних апроксимацій»

Рівень вищої освіти	**третій (освітньо-науковий)**
Галузь знань	**11 Математика та статистика**
Спеціальність	**113 Прикладна математика**
Освітньо-наукова програма	**Обчислювальна математика, методи математичної фізики, варіаційне числення і теорія оптимального керування та механіка**

ОНУ
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Основи побудови адаптивних скінченно-елементних апроксимацій». – Одеса: ОНУ, 2022.

Розробник:
Вербіцький Виктор Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № 5 від. "14" листопада 2022 р.

Завідувач кафедри _____ Ольга КІЧМАРЕНКО

Погоджено із гарантом ОНП "Обчислювальна математика, методи математичної фізики, варіаційне числення і теорія оптимального керування та механіка" Н.Д. ВАЙСФЕЛЬД

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК)факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 3 від. "15" листопада 2022 р.

Голова НМК _____ Євген СТРАХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри оптимального керування і економічної кібернетики

Протокол № ___ від. "____"_____20__ р.

Завідувач кафедри _____

1. **Опис навчальної дисципліни**

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		Очна (денна, вечірня) форма навчання
Загальна кількість: кредитів – 3 годин – 90 змістових модулів – 2	Галузь знань **11 Математика та статистика** Спеціальність **113 Прикладна математика** Спеціалізації: _____ (назва) Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)	***За вибором***
		Рік підготовки:
		1-й
		Семестр
		1-й
		Лекції
		12 год.
		Практичні, семінарські
		10 год.
		Лабораторні
		Самостійна робота
		68 год.
		Форма підсумкового контролю: **залік**

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: ознайомити студентів з основними аспектами побудови адаптивних схем методу скінченних елементів розв'язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними.

Завдання:

1. Ознайомити студентів з побудовою варіаційних задач для еліптичних крайових задач;
2. Ознайомити студентів з основами апроксимації просторів Соболева просторами сплайнів;
3. Ознайомити студентів з методами побудови скінченно-елементних апроксимацій крайових задач;
4. Ознайомити студентів з основами обчислення апостеріорних оцінювачів похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі
5. Ознайомити студентів з методами побудови адаптивних схем методу скінченних елементів.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

ІК. Здатність розв'язувати комплексні проблеми в галузі професійної та дослідницько-інноваційної діяльності у сфері математики та статистики із залученням отриманих знань із суміжних навчальних дисциплін, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань та професійних практик.

ФК 01. Здатність до глибокого розуміння теоретичних положень, історії їх розвитку, сучасного стану та майбутнього концепту за напрямком власного наукового дослідження в прикладній математиці.

ФК 02. Здатність до визначення перспективних наукових напрямів на основі аналітичного пошуку з використанням сучасних методів комп'ютерних та інформаційних технологій.

ФК 04. Здатність до абстракції, включаючи здатність логічно розвивати окремі формальні теорії та встановлювати зв'язок між ними.

ФК 05. Здатність до глибинного розуміння загальних та спеціальних математичних дисциплін.

ФК 06. Здатність будувати математичні моделі для опису та подальшого аналізу явищ та процесів.

ФК 07. Здатність формулювати математичні постановки складних оптимізаційних проблем і проблем прийняття рішень.

ФК 09. Здатність користуватися, управляти і розробляти нові інформаційні технології.

Очікувані результати навчання. У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

1. Основні теоретичні аспекти побудови варіаційних формулювань крайових еліптичних задач;
2. Методи визначення швидкості збіжності скінченно-елементних розв'язків;
3. Методи побудови апостеріорних оцінювачів похибки скінченно-елементних розв'язків

вміти:

1. записати варіаційне формулювання крайової задачі;
2. будувати СЛАУ скінченно-елементної апроксимації;
3. побудувати апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі;
4. реалізувати адаптивну схему методу скінченних елементів.

Бути здатними до безперервного саморозвитку та самовдосконалення.

Застосовувати в роботі інноваційний підхід.

Сприяти розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності.

Це відповідає наступним програмним результатам навчання:

ПРН 05. Вміти описувати, аналізувати та синтезувати інформацію, враховуючи попередній досвід; піддавати сумніву отримані раніше результати; правильно поставити задачу дослідження та відібрати підходи до її розв'язку; виявляти ключові ідеї у напрацьованому розв'язку та представлення їх у чіткому і завершеному вигляді.
ПРН 06. Вміти здійснювати аналіз поставленої задачі, працювати з літературою, обирати шляхи до вирішення проблеми, застосовувати сучасні методи дослідження, робити висновки, оцінювати отримані результати.
ПРН 07. Вміти ставити проблему, проводити аналіз її сучасного стану розробки, користуватися апаратом розв'язання та оприлюднення результатів із застосуванням сучасних інформаційно - комп'ютерних технологій.
ПРН 10. Вміти проводити доведення математичних тверджень, що не є аналогічними до раніше відомих.
ПРН 12. Вміти складати модель творчої роботи, програму і план власного дослідження; формулювати висновки та узагальнення; обґрунтовувати практичну значущість результатів дослідження.
ПРН 14. Вміти розв'язувати конкретні математичні задачі, сформульовані у термінах даної предметної області; оцінювати ступінь адекватності математичної моделі явищу, яке вона описує.
ПРН 15. Вміти здійснювати базові перетворення математичних моделей для зручності розв'язання відповідних задач; надавати інтерпретацію отриманих результатів.

3. **Програма навчальної дисципліни**

Змістовний модуль 1

Тема 1. Варіаційне формулювання еліптичних крайових задач. Простори Соболєва. Область із границею Ліпшиця.. Сліди функцій простору $H^1(\Omega)$. Нерівність Фрідріхса. Слабкий розв'язок еліптичної крайової задачі. Стійкі й нестійкі граничні умови. Теорема Лакса-Мільграма.

Тема 2. Апроксимація просторів Соболєва й МСЕ. Регулярна тріангуляція області із границею Ліпшиця. Простори сплайнів. Теореми про апроксимації просторів Соболєва просторами сплайнів. Дискретна варіаційна задача. Лема Сеа. Теорема про збіжність скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі. Обчислення СЛАУ скінченно-елементної апроксимації крайової задачі.

Змістовний модуль 2

Тема 3. Апостеріорні оцінювачі похибки скінченно-елементних апроксимацій еліптичних крайових задач. Бульбашкова функція трикутника. Бульбашкова функції для сторони трикутника. Квазі-інтерполяційний оператор. Задача визначення похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі. Нев'язка скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової. Оцінки похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі з використанням нев'язки. L_2-зображення нев'язки. Апостеріорний оцінювач, побудований з використанням нев'язки. Апостеріорні оцінки зверху та знизу похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі. Обчислення апостеріорного оцінювача.

Тема 4. Способи побудови апостеріорних оцінювачів. Апостеріорні оцінювачі з використанням відновленого градієнта. Суперзбіжність скінченно-елементних розв'язків. Апостеріорні оцінювачі з використанням локальних задач. Визначення апостеріорного оцінювача. Апостеріорна оцінка знизу погрішності власної функції. Апостеріорна оцінка зверху погрішності власної функції.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Очна (денна, вечірня) форма					
	усього	у тому числі				
		л	п	лаб.	інд.	с. р.
1	2	3	4	5	6	7
Змістовний модуль 1						
Тема 1. Варіаційне формулювання еліптичних крайових задач	20	3	2			15
Тема 2. Апроксимація просторів Соболєва й МСЕ.	20	3	3			14
Разом за модулем 1	40	6	5			29
Змістовний модуль 2.						
Тема 3. Апостеріорні оцінювачі похибки скінченно-елементних апроксимацій еліптичних крайових задач.	26	3	3			20
Тема 4. Способи побудови апостеріорних оцінювачів.	24	3	2			19
Разом за змістовим модулем 2	50	6	5			39
Усього годин	90	12	10			68

5. Теми семінарських занять

Семінарські заняття навчальним планом не передбачені.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовний модуль 1.		
1	Побудова регулярних тріангуляцій довільних багатокутників	2
2	Формування матриці скінченно-елементної апроксимації. Врахування граничних умов.	3
Змістовний модуль 2.		
3	Побудова апостеріорних оцінювачів	3
4	Побудова адаптивної схеми МСЕ.	2

7. Теми лабораторних занять

Лабораторні роботи навчальним планом не передбачені.

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Варіаційне формулювання еліптичних крайових задач	15
2	Апроксимація просторів Соболєва й МСЕ.	14
3	Апостеріорні оцінювачі похибки скінченно-елементних апроксимацій еліптичних крайових задач.	20
4	Способи побудови апостеріорних оцінювачів.	19
	Разом	68

Самостійна робота оформлюється у вигляді доповіді, обговорення, та оцінювання якої здійснюється на поточному та підсумковому контролі.

Самостійна робота здобувачів забезпечується засобами Google Workspace for Education.

Навчально-методичне забезпечення: робоча програма навчальної дисципліни; навчально-методичні матеріали для лекцій, конспекти (тексти, схеми) лекцій; мультимедійні презентації; плани практичних занять; плани практичних занять; методичні вказівки (рекомендації) щодо самостійного вивчення дисципліни.

1. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2018. – 116 с.

Критерії оцінювання виконання самостійної роботи**:**

– своєчасність виконання;

– доброчесність та коректність у представлені текстів, презентацій та посилань (у разі доведеного плагіату бали за роботу анулюються);

– повнота, грамотність і коректність розкриття основних положень;

– творчий підхід до постановки і реалізації завдання;

– відповідність формальним критеріям (структура, послідовність, логічність, мовна грамотність, якість оформлення тощо).

– вміння застосовувати теоретичні знання для рішення практичних завдань.

9. Методи навчання

Метод проблемного викладення (наукового пошуку).

Пояснювально-ілюстративні методи: лекція, пояснення, самостійне опрацювання літературних джерел, робота з електронними конспектами лекцій та презентаціями, опрацювання наукових публікацій.

Наочні методи (презентації, ілюстрації).

Репродуктивні методи: розв’язування задач за алгоритмами конкретних методів, практичні роботи.

Дослідницький метод.

Методи формування і стимулювання пізнавальної діяльності: навчальні дискусії.

10. Форми контролю і методи оцінювання

Методи усного контролю: індивідуальне усне поточне опитування, оцінювання доповідей, підсумковий контроль – усний залік

Методи письмового контролю: письмові поточні самостійні роботи

При оцінюванні в балах рівня засвоєння матеріалу використовуються загальні критерії оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти:

Оцінка за національною шкалою та **відсоток від максимальної кількості балів**	Теоретична підготовка	Практична підготовка
	Здобувач освіти	
зараховано (90-100% від максимальної кількості балів)	у повному обсязі володіє навчальним матеріалом, вільно, самостійно та аргументовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей; глибоко та всебічно розкриває зміст теоретичних питань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; робить самостійні висновки, виявляє причинно-наслідкові зв'язки; самостійно знаходить додаткову інформацію та використовує її для реалізації поставлених перед ним завдань. Здобувач здатен виділяти суттєві ознаки вивченого за допомогою операцій синтезу, аналізу, виявляти причинно-наслідкові зв'язки, формувати висновки і узагальнення, вільно оперувати фактами та відомостями.	глибоко та всебічно розкриває сутність практичних/ розрахункових завдань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; може аргументовано обрати раціональний спосіб виконання завдання й оцінити результати власної практичної діяльності; виконує творчі завдання та ініціює нові шляхи їх виконання; вільно використовує набуті теоретичні знання при аналізі практичного матеріалу; проявляє творчий підхід до виконання індивідуальних та колективних завдань при самостійній роботі.
зараховано (75-89% від максимальної кількості балів)	достатньо повно володіє навчальним матеріалом, обґрунтовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей, використовуючи при цьому нормативну та обов'язкову літературу; при представленні деяких питань не вистачає достатньої глибини та аргументації, застосовує знання для розв'язання стандартних ситуацій; самостійно аналізує, узагальнює і систематизує навчальну інформацію, але допускаються при цьому окремі	правильно вирішив більшість розрахункових /тестових завдань за зразком; має стійкі навички виконання завдання

	несуттєві неточності та незначні помилки.	
зараховано (60-74% від максимальної кількості балів)	володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні або відтворює певну частину навчального матеріалу з елементами логічних зв'язків, знає основні поняття навчального матеріалу; має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.	може використовувати знання в стандартних ситуаціях, має елементарні, нестійкі навички виконання завдання. Правильно вирішив половину розрахункових/тестових завдань. Здобувач має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.
не зараховано (35-59% від максимальної кількості балів)	володіє навчальним матеріалом поверхово й фрагментарно (без аргументації та обґрунтування); безсистемно виокремлює випадкові ознаки вивченого; не вміє робити найпростіші операції аналізу і синтезу; робити узагальнення, висновки; під час відповіді допускаються суттєві помилки	недостатньо розкриває сутність практичних завдань, допускаючи при цьому суттєві неточності, правильно вирішив окремі розрахункові/тестові завдання за допомогою викладача, відсутні сформовані уміння та навички.
не зараховано (0-34% від максимальної кількості балів)	не володіє навчальним матеріалом	виконує лише елементи завдання, потребує постійної допомоги викладача

Примітка: максимальна кількість балів за кожною темою вказана в п.12.

Форма підсумкового контролю – залік, виставляється за кількістю балів, набраних в семестрі (згідно зі шкалою оцінювання з п. 12).

11. Питання для поточного та періодичного контролю

1. Простори Соболєва. Область із границею Ліпшиця.
2. Сліди функцій простору $H^1(\Omega)$.
3. Нерівність Фрідріхса.
4. Слабкий розв'язок еліптичної крайової задачі.
5. Стійкі й нестійкі граничні умови.
6. Теорема Лакса-Мільграма.

7. Регулярна тріангуляція області із границею Ліпшиця.
8. Простори сплайнів.
9. Теореми про апроксимації просторів Соболєва просторами сплайнів.
10. Дискретна варіаційна задача.
11. Лема Сеа.
12. Теорема про збіжність скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі. Обчислення СЛАУ скінченно-елементної апроксимації крайової задачі.
13. Бульбашкова функція трикутника.
14. Бульбашкова функції для сторони трикутника.
15. Квазі-інтерполяційний оператор.
16. Задача визначення похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі. Нев'язка скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової.
17. Оцінки похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі з використанням нев'язки.
18. L_2 -зображення нев'язки.
19. Апостеріорний оцінювач, побудований з використанням нев'язки.
20. Апостеріорні оцінки зверху та знизу похибки скінченно-елементного розв'язку еліптичної крайової задачі.
21. Обчислення апостеріорного оцінювача.
22. Апостеріорні оцінювачі з використанням відновленого градієнта.
23. Суперзбіжність скінченно-елементних розв'язків.
24. Апостеріорні оцінювачі з використанням локальних задач.
25. Визначення апостеріорного оцінювача.
26. Апостеріорна оцінка знизу погрішності власної функції.
27. Апостеріорна оцінка зверху погрішності власної функції.

12. Розподіл балів, які отримують здобувачі

Поточне тестування та самостійна робота				**Сума**
Змістовний модуль 1		**Змістовний модуль 2**		
Т1	Т2	Т3	Т4	100
25	25	25	25	

Розподіл балів за видами навчальної роботи

Види навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять	Сумарна кількість балів
Змістовий модуль 1			
Поточний контроль на лекціях	10	2	20
Виконання і захист практичних робіт	6	5	30
Усього за змістовим модулем 1			**0-50**
Змістовий модуль 2			
Поточний контроль на лекціях	10	2	20

Виконання і захист практичних робіт	6	5	30
Усього за змістовим модулем 2			**0 – 50**
Підсумкова сума балів			**0 – 100**

Шкала оцінювання ECTS та національна

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90–100	**A**	відмінно	зараховано
85–89	**B**	добре	
75–84	**C**		
70–74	**D**	задовільно	
60–69	**E**		
35–59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	**F**	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

13. Навчально-методичне забезпечення

Навчально-методичне забезпечення: робоча програма навчальної дисципліни; навчально-методичні матеріали для лекцій, конспекти (тексти, схеми) лекцій; мультимедійні презентації; плани практичних занять; методичні вказівки (рекомендації) щодо самостійного вивчення дисципліни:

1. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник. – Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2018. – 116 с.

14. Рекомендована література

Основна

1. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видавн. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 221 с.
2. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. – 2021 John Wiley & Sons, Inc., 2021. 331 pp.

3. AINSWORTH MARK and ODEN J. TINSLEY. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. – JOHN WILEY & SONS, 2000. – 264 pp.
4. Verfurth R. Adaptive Finite Element Methods. – Lecture Notes Winter Term Fakultat fur Mathematik, Ruhr-Universit 2007/08.
5. Verbitskyi V., Loktev A. An exact finite element scheme of the boundary value problem for an ordinary differential equation // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2020. Вип. 28. С. 82–87.
6. Вербицкий В. В., Иванищева И.Н. Итерационный алгоритм вычисления собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля / Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 33–42.

Допоміжна

1. Oden, J.T. and Demkowicz, L.F. Applied Functional Analysis. CRC Press., 1996.
2. Demkowicz L. Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / L. Demkowicz – Chapman and Hall/CRC. – 2006. – 398 p.
3. Молчанов И.Н., Николаенко Л.Д. Основы метода конечных элементов. - Киев, Наукова думка, 1989. - 269 с.
4. MIXED FINITE ELEMENT TECHNOLOGIES. EDITED BY CARSTEN CARSTENSEN, PETER WRIGGERS. – SpringerWienNewYork, 2009. – 221 pp.
5. Larson M.G. A-posteriori and a-priori error analysis for finite element approximations of selfadjoint eigenvalue problems SIAM J. Numer. Anal. 38 (2000), p. 562-580.

15. Електронні інформаційні ресурси

1. http://nbuv.gov.ua/ – Сайт Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського;
2. http://www.dnpb.gov.ua/ – Сайт Державної науково-педагогічної бібліотеки України імені В.О. Сухомлинського;
3. http://onu.edu.ua/ – Сайт бібліотеки ОНУ імені І. І. Мечникова;
4. http://odnb.odessa.ua/ – Сайт Одеської національної наукової бібліотеки;
5. http://korolenko.kharkov.com/ – Сайт Харківської державної наукової бібліотеки імені В.Г. Короленка;
6. https://www.imath.kiev.ua/ – Сайт Інституту математики НАН України;
7. https://umj.imath.kiev.ua/ – Український математичний журнал;
8. https://imath.kiev.ua/~nosc/web/?lang=ua/ – журнал Нелінійні коливання.
9. http://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews – реферативний математичний журнал, що видається AMS
10. https://zbmath.org/ - реферативний математичний журнал видавництва «Шпрингер» та електронна база даних «ZBMATH — The database Zentralblatt MATH»