Кічмаренко Ольга Дмитрівна

Вибрані лекції до курсу “Оптимальне керування функціонально-диференціальними системами”

для здобувачів третього

освітньо-наукового рівня вищої освіти
за спеціальністю 113 - прикладна математика

Існування оптимальних керувань для деяких класів функціонально-диференціальних рівнянь

0.1 Оптимальне керування деякими класами функціонально-диференціальних систем на скінченному інтервалі

Багато публікацій присвячено дослідженню задач оптимального керування функціонально-диференціальними системами. Ми відзначимо монографію [83], присвячену застосуванню методу динамічного програмування і принципу максимуму до таких задач. Там також представлена обширна бібліографія. В цьому сенсі згадуємо роботу [84], в якій на випадок компактності множини допустимих керувань отримано аналог теореми Філіппова про існування оптимальних керувань для звичайних диференціальних рівнянь. Але ці методи, як правило, дають необхідні умови оптимальності, або достатні умови є незручними для перевірки.

Головна мета цього розділу – отримати теореми існування оптимальних керувань для більш широкого класу задач оптимального керування функціонально-диференціальними системамипри більш слабких умовах, у порівнянні із згаданими роботами [84]-[67].

Введемо необхідні в подальшому позначення та функціональні простори. Оберемо дійсне число $h \geq 0$ та зафіксуємо його. Позначимо через $C_n\left([-h,0];\mathbb{R}^n\right)$ банахів простір неперервних вектор-функцій, визначених на $[-h,0]$, які діють в простір $\mathbb{R}^n$, з рівномірною метрикою $\|\varphi\|_C = \max\limits_{\theta\in[-h;0]} |\varphi(\theta)|$, де $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, при цьому через $\|\cdot\|$ будемо позначати норму матриці, узгоджену з нормою

вектора.

$L_p = L_p([-h,0];\mathbb{R}^m)$, $p > 1$ банахів простір p-інтегровних m-вимірних вектор-функцій

з стандартною нормою $\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_{-h}^{0} |\varphi(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай $x \in C_n([0,\infty);\mathbb{R}^n)$, початкова функція $\varphi \in C_n([-h,0];\mathbb{R}^n)$ при деякому $h \geq 0$. Якщо $x(0) = \varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t)\ , t \in [-h,0]\,, \\ x(t)\,, t \geq 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

є неперервною на $[-h,T]$.

Стандартним чином введемо елемент $x_t(\varphi) \in C_n([-h,0];\mathbb{R}^n)$ для кожного $t \geq 0$ при $\theta \in [-h,0]$ як $x_t(\varphi) = x(t+\theta,\varphi)$. Надалі використовуватимемо x_t замість $x_t(\varphi)$. Якщо $h = 0$, то банахів простір $C_n([-h,0];\mathbb{R}^n)$ співпадає з $\mathbb{R}^n$, а x_t співпадає з $x(t)$ для кожного $t \in [0,\infty)$.

Будемо говорити, що функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x_t), \quad x(s) = \varphi(s),\ s \in [-h,0],\ \varphi \in C_n \tag{0.2}$$

на $[0,\infty)$, якщо для кожного $t \geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ з (1.1) задовольняє співвідношення:

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_0^t f(s,x_s(\varphi))ds. \tag{0.3}$$

Нехай $t \in [0,T]$, D – деяка область в $[0,T] \times C$, ∂D – границя цієї області і $\overline{D} = D \cup \partial D$.

0.1.1 Постановка задачі оптимального керування системою, що описується функціонально-диференціальними рівняннями

В цьому розділі ми розглядаємо задачу оптимального керування функціонально-диференціальною системою

$$\dot{x} = f_1(t, x_t) + \int_{-h}^{0} f_2(t, x_t, y)\, u(t, y)\, dy,\ t \in [0, \tau], \tag{0.4}$$

$$x(t) = \varphi_0(t),\ t \in [-h, 0],$$

з критерієм якості

$$J[u] = \int_0^{\tau} L(t, x_t, u(t, \cdot))\, dt \to \inf \tag{0.5}$$

на $[0, T]$, де $\varphi_0 \in C$ – фіксований елемент, такий, що $(0, \varphi_0) \in D$, $x(t)$ фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, x_t – фазовий вектор в C, τ – момент часу, коли розв'язок (t, x_t) вперше виходить на границю ∂D , $f_1 : D \to \mathbb{R}^d$, $f_2 : D \times [-h, 0] \to M^{d\times m}$ are $d\times m$ -вимірні матриці, і для кожної пари $(t, \varphi) \in D$, $f_2(t, \varphi, \cdot) \in L_q([-h, 0]; M^{d\times m})$ з нормою $\|f_2(t, \varphi, \cdot)\|_{L_q} = \left(\int_{-h}^{0} \|f_2(t, \varphi, y)\|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $p > 1$, $L : D \times L_p \to \mathbb{R}^1$.

Параметр керування $u \in L_p([0, T] \times [-h, 0])$ – такий, що $u(t, y) \in U$, і U – опукла і замкнена множина в $\mathbb{R}^m$ майже для всіх t, y .

В роботі [84], в якій на випадок компактності множини допустимих керувань отримано аналог теореми Філіппова про існування оптимальних керувань для звичайних диференціальних рівнянь.

Для некомпактної множини допустимих керувань аналог теореми Цеззарі отримано в [62]. В згаданій роботі ...

В [63] в умовах компактності множини значень допустимих керувань отримано достатні умови оптимальності на фіксованому інтервалі $[t_0, t_1]$ для рівнянь

нейтрального типу.

В [85] задача оптимального керування системою із запізненням переписувалася в формі, не залежній від запізнення, та вивчалася методами для звичайних диференціальних рівнянь. В роботах [86]-[67] розглянуто задачу оптимального керування системою

$$\dot{x}\left(t\right)=rx\left(t\right)+f_0\left(x\left(t\right),\int_{-T}^{0}a\left(\varsigma\right)x\left(t+\varsigma\right)d\varsigma\right)-u\left(t\right)$$

.

$$J(u)=\int_0^{\infty}e^{-\varphi t}a^{t\sigma}(t)dt,\sigma\in\left(0,1\right).$$

0.1.2 Існування, єдиність і продовжуваність розв'язків до границі області

Нехай для задачі (1.4)-(1.5) виконуються наступні умови.

Умова 1. Допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u\in L_p\left([0,T]\left[-h,\right.\right.$ такі, що $u\left(t,y\right)\in U$ майже для всіх $t\in[0,T]$ і $y\in[-h,0]$.

Множину допустимих керувань позначимо $\mathcal{U}$.

Умова 2. Відображення $f_1(t,\varphi):D\to\mathbb{R}^d$ і $f_2(t,\varphi,y):D\times[-h,0]\to M^{d\times m}$ – визначені і вимірні за всіма їх аргументами в області D і $D_1=\{(t,\varphi)\in D,y\in[-h,0]\}$ відповідно, задовольняють умову лінійного росту і умову Ліпшиця за φ, тобто існує константа $K>0$, така, що

$$|f_1(t,\varphi)|+\|f_2(t,\varphi,y)\|\leq K\left(1+\|\varphi\|_C\right) \tag{0.6}$$

для всіх $(t, \varphi) \in D, y \in [-h, 0]$,

$$|f_1(t, \varphi_1) - f_1(t, \varphi_2)| + \|f_2(t, \varphi_1, y) - f_2(t, \varphi_2, y)\| \leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C \tag{0.7}$$

для всіх $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in D,\ y \in [-h, 0]$.

Умова 3. Для функції критерія якості вимагаємо, щоб:

1) відображення $L(t, \varphi, z) : D \times L_p \to \mathbb{R}^1$ визначене і неперервне за всіма його аргументами в області $D_2 = \{(t, \varphi) \in D, z \in L_p\}$;

2) існує така стала $a > 0$, що

$$|L(t, \varphi_1, z) - L(t, \varphi_2, z)\| \leq a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_C$$

для всіх $(t, \varphi_1, z), (t, \varphi_2, z) \in D_2$;

3) похідна Фреше L_u відображення L неперервна за всіма її аргументами в області D_2, і існують константи $C_1 > 0,\ \alpha > 0$ такі, що для всіх $(t, \varphi, z) \in D_2$ виконується нерівність:

$$\|L_u(t, \varphi, z)\|_{L_q} \leq C_1(1 + \|\varphi\|_C^{\alpha} + \|z\|_{L_p}^{p-1});$$

4) існує стала $C > 0$ така, що $L(t, \varphi, z) \geq C\|z\|_{L_p}^p$ для всіх $(t, \varphi, z) \in D_2$;

5) $L(t, \varphi, z)$ опукла по z для всіх фіксованих $t,\ \varphi$.

Наш перший результат стосується існування, єдиності та продовжуваності розв'язків системи (1.4) до границі ∂D області D. Це аналог теореми Каратеодорі для звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 0.1. Розв'язком початкової задачі (1.4) на сегменті $[-h, A]$, $A > 0$, назвемо неперервну на сегменті $[-h, A]$ функцію $x(t)$, таку, що

1) $x(t) = \varphi_0(t),\ t \in [-h, 0]$;

2) $(t, x_t) \in D$ на $t \in [0, A]$;

3) для $t \in [0, A]$ функція $x(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \left[f_1(s, x_s) + \int_{-h}^0 f_2(s, x_s, y) u(s, y) dy \right] ds. \tag{0.8}$$

Зауваження 0.1. Зрозуміло, що для $t \in [0, A]$ розв'язок $x(t)$ є абсолютно неперервною функцією і задовольняє рівняння (1.4) майже для всіх t на $[0, A]$.

Теорема 0.1. *Нехай виконуються умови 2.1 і 2.2.*

Тоді існує розв'язок початкової задачі (1.8) на сегменті максимальної довжини $[-h, \tau]$, $\tau > 0$ і $(\tau, x_\tau) \in \partial D$.

Доведення.

Зафіксуємо допустиме керування $u^* \in \mathcal{U}$. Спочатку ми доведемо локальне існування і єдиність розв'язку задачі (1.4), на деякому сегменті $[-h, \alpha]$, $\alpha > 0$.

Щоб це зробити, ми використаємо стандартний принцип зжимаючих відображень.

Зрозуміло, існують $\alpha_0 > 0$ і $\beta_0 > 0$ такі, що всі (t, φ), для яких $0 \le t \le \alpha_0$, і $\|\varphi - \varphi_0\|_C \le \beta_0$ належать області D є еквівалентними до φ_0 на $[-h, 0]$.

Тепер розглянемо клас $B(\alpha, \beta_0)$ всіх неперервних на $[-h, \alpha]$ функцій $x(t)$, таких, що співпадають з φ_0 на $[-h, 0]$ і $|x(t) - \varphi_0(0)| \le \beta_0$ для $t \in [0, \alpha]$.

Звичайно, множина $B(\alpha, \beta_0)$ є замкненою відносно рівномірної метрики на $[-h, \alpha]$.

В цьому випадку існує $\alpha_0 \ge \alpha_1 > 0$ таке, що якщо $x(t) \in B(\alpha, \beta_0)$ при $0 < \alpha \le \alpha_1$, тоді виконується нерівність:

$$\|x_t - \varphi_0(0)\|_C \leq \beta_0, \quad t \in [0, \alpha]. \tag{0.9}$$

Насправді, в умовах рівномірної неперервності функції φ_0 на$[-h, 0]$ існує $\alpha_1 > 0$ таке, що, якщо $|\theta_1 - \theta_2| \leq \alpha_1$, то

$$|\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta_2)| \leq \frac{\beta_0}{3} \tag{0.10}$$

для всіх $\theta_1, \theta_2 \in [-h, 0]$.

Отже, для кожного $t \in [0, \alpha_1]$ при $\alpha \leq \alpha_1$ із (1.10) і властивостей множини $B(\alpha, \beta_0)$, маємо

$$\|x_t - \varphi_0\|_C \leq \sup_{\theta \in [-h,-t]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| + \sup_{\theta \in [-t,0]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| \leq$$

$$\leq \sup_{\theta \in [-h,-t]} |\varphi_0(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| + \sup_{\theta \in [-t,0]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| +$$

$$+ \sup_{\theta \in [-t,0]} |\varphi_0(\theta) - \varphi_0(0)| \leq \frac{\beta_0}{3} + \frac{\beta_0}{3} + \frac{\beta_0}{3} = \beta_0.$$

Далі доведемо, що $\alpha > 0$ може бути обране таким, що оператор

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), \ t \in [-h, 0] \\ \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x_s) ds + \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s, y) u(s, y) dy ds, \ t \in [0, \alpha] \end{cases} \tag{0.11}$$

відображень множини $B(\alpha, \beta_0)$ в себе і є зжимаючим.

Із леми 2.2.1 [76] слідує, що x_t є неперервна функція за $t \in [0, \alpha]$. Отже, із умови 1 $f_1(s, x_s)$ є неперервні за $s \in [0, \alpha]$ і функція

$$\int_{-h}^0 f_2(s, x_s, y) u(s, y) dy \tag{0.12}$$

є вимірна за s і задовольняє оцінку

$$\left|\int_{-h}^{0} f_2(s,x_s,y)u(s,y)dy\right| \le C_2\left(\int_{-h}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

для деякої сталої $C_2>0$. Із цього ми маємо інтегрованість (1.12) за s, і, отже, абсолютну неперервність другого інтеграла в (1.12).

Тепер оцінимо різницю $|(Ax)(t)-\varphi_0(0)|$ при $t\in[0,\alpha],\ \alpha\le\alpha_0$.

З (1.6) і (1.7), використовуючи нерівність Холдера і теорему Фубіні, ми маємо

$$|(Ax)(t)-\varphi_0(0)| \le \int_0^t |f_1(s,x_s)|\,ds + \int_0^t\left(\int_{-h}^{0}\|f_2(s,x_s,y)\|\,|u(s,y)|\,dy\right)ds \le$$

$$\le \int_0^t K(1+\|x_s\|_C)ds + \int_0^t\left(\int_{-h}^{0}K^q\,(1+\|x_s\|_C)^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_{-h}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}ds \le$$

$$\le K(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_C)\alpha + Kh^{\frac{1}{q}}(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_C)\left(\int_0^{\alpha}\int_{-h}^{0}|u(s,y)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{1}{q}}.$$

Тут $q=\frac{p}{p-1}$.

Тепер оберемо $\alpha_2\le\alpha_1$ із умови

$$K(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_C\,(\alpha+\alpha^{\frac{1}{q}}h^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\alpha}\int_{-h}^{0}|u(s,y)|^p\,dyds\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\beta_0}{3}. \tag{0.13}$$

Отже, для всіх $\alpha\le\alpha_1$ оператор A відображає $B(\alpha,\beta_0)$ в себе.

Тепер покажемо, що існує $\alpha_3\in[0,\alpha_2]$ така, що оператор A буде зжимаючим на $B(\alpha_3,\beta_0)$.

Нехай x і $z\in B(\alpha,\beta_0)$. З (1.7) ми маємо

$$|(Ax)(t)-(Az)(t)| \le \int_0^t K\,\|x_s-z_s\|_C\,ds + \int_0^t K\,\|x_s-z_s\|_C\int_{-h}^{0}|u(s,y)|\,dyds \le$$

$$\le\left(K\alpha + K\alpha^{\frac{1}{q}}h^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\alpha}\int_{-h}^{0}|u(s,y)|^p\,dyds\right)^{\frac{1}{p}}\right)\sup_{t\in[-h,\alpha]}|x(t)-z(t)|\,.$$

І тепер із цього ми маємо

$$\sup_{t\in[-h,\alpha]}|(Ax)(t)-(Az)(t)| \le$$

$$\leq \left(K\alpha + K\alpha^{\frac{1}{q}} h^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\alpha} \int_{-h}^{0} |u(s,y)|^p \, dyds \right)^{\frac{1}{p}} \right) \sup_{t\in[-h,\alpha]} |x(t) - z(t)| \,. \qquad (0.14)$$

Тепер обираючи $0 < \alpha_3 \leq \alpha_2$, із умови

$$K\alpha + K\alpha^{\frac{1}{q}} h^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\alpha} \int_{-h}^{0} |u(s,y)|^p \, dyds \right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

ми маємо, що оператор $A : B(\alpha_3, \beta_0) \to B(\alpha_3, \beta_0)$ є зжимаючим. Отже, на сегменті $[-h, \alpha_3)$ існує єдиний розв'язок початкової задачі (1.4).

Для доведення продовжуваності цього розв'язку до границі ∂D, ми використовуємо підхід з доведення теореми 2.3.2 [76]. Зауважимо, що з (1.6) для $(t, \varphi) \in D$ наступна оцінка виконується:

$$|f_1(t, \varphi)| \leq K(1 + \|\varphi\|_C) \qquad (0.15)$$

і

$$\left| \int_{-h}^{0} f_2(t, \varphi, y) u(t, y) dy \right| \leq K(1 + \|\varphi\|_C) h^{\frac{1}{q}} \int_{-h}^{0} |u(s, y)| \, dy. \qquad (0.16)$$

Нехай $[-h, \tau]$ інтервал максимальної довжини, на якому існує розв'язок $x(t)$. Для його продовження до границі ∂D необхідно показати, що для довільної замкненої множини $G \in Dt_G$ існує t_G таке, що $(t, x_t) \notin G$ для $t \in [t_G, \tau]$. Останнє твердження може бути доведене від протилежного. Справді, якщо це не так, тоді, аналогічно до теореми 2.3.2 [76], множина $\bar{Q} = \{(t, x_t) : t \in [-h, \tau]\}$ замкнена і обмежена в D.

Отже, із оцінок (1.15) і (1.16) слідує існування сталої M, такої, що для $(t, \varphi) \in \bar{Q}$ ми маємо $|f_1(t, \varphi)| \leq M$ і $\left| \int_{-h}^{0} f_2(t, \varphi, y) u(t, y) dy \right| \leq M \int_{-h}^{0} |u(s, y)| \, dy$.

Із (1.8) для кожного $t_1, t \in [0, \tau]$, маємо

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq M(t_2 - t_1) + Mh(t_2 - t_1)^{\frac{1}{q}} \left(\int_Q^T \int_{-h}^{0} |u(s,y)|^p \, dyds \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (0.17)$$

Звідси слідує, що $\{(t,x) : t \in [-h,\tau]\}$ належить компакній множині в D. Останнє твердження протиречить наслідку 2.3.1 [76]. Теорема доведена.

0.1.3 Існування оптимальних керувань

Наступна теорема дає умови існування оптимальної пари $x^*(t), u^*(t,\theta))$ для задачі (1.4)-(1.5), яка дає мінімум критерія якості (1.5).

В цьому випадку $u^* \in \mathcal{U}$ називається оптимальним керуванням, а відповідна траєкторія $x^*(t)$ (1.4) називається оптимальною траєкторією.

Теорема 0.2. *Нехай виконані умови 2.1-2.3.*

Тоді існує розв'язок задачі оптимального керування (1.4)-(1.5).

Доведення.

Спочатку зауважимо, що керування $u(t,\theta) = u(\theta)$ є допустимим.

Нехай $x(t)$ – розв'язок, який відповідає керуванню $u(t)$ і τ – це момент першого виходу розв'язку (t, x_t) на границю ∂D.

Тепер доведемо, що $x(t)$ обмежений на $[0,\tau]$.

Із (1.8) для $\in [0,\tau]$ ми маємо

$$|x(t)| \le |\varphi_0(0)| + \int_0^t K(1+\|x_s\|_C)ds + Kh^{\frac{1}{q}} \int_0^t (1+\|x_s\|_C)ds \, \|u\|_{L_p} \le$$

$$\le |\varphi_0(0)| + KT + Kh^{\frac{1}{q}} \|u\|_{L_p} T + (K + h^{\frac{1}{q}} u \, \|u\|_{L_p}) \int_0^t \|x_s\|_C \, ds =$$

$$= C_3 + C_4 \int_0^t \|x_s\| \, ds \le C_3 + C_4 \int_0^t \max_{s_1 \in [-h,s]} |x(s_1)| \, ds \tag{0.18}$$

З

$$\max_{s\in[-h,t]} |x(s)| \le \max_{s\in[-h,0]} |\varphi_0(s)| + \max_{s\in[0,t]} |x_1(s_1)| \, ,$$

а також з (1.18) ми маємо

$$\max_{s\in[-h,t]} |x(s)| \leq C_5 + C_4 \int_0^t \max_{s\in[-h,s]} |x(s_1)|\, ds$$

для деякої сталої $C_5 > 0$. Використовуючи нерівність Гронуолла, ми маємо $\max\limits_{s\in[-h,t]} |x(s)| \leq C_5$, $t \in [0,\tau]$ для деякої сталої $C_6 > 0$, яка не залежить від t. Із цього слідує, що

$$\max_{s\in[-h,\tau]} |x(s)| \leq C_6$$

і $\max\limits_{s\in[-h,\tau]} \|x_t\| \leq C_6$.

З леми 2.2.1 [76] x_t є неперервною за $t \in [0,\tau]$, із першого пункту умови 3 ми маємо $L(t, x_t, u(\theta))$ (де $(u(t,\theta)) = u(\theta)$ є неперервне за t і, отже,

$$\int_0^\tau L(t, x_t, u(\theta)dt \tag{0.19}$$

є обмеженим. Значить $\inf\limits_{u\in U} J(u) < \infty$. З того, що $J(u) \geq 0$, існує невід'ємна нижня границя m значень $J(u)$. Нехай $u^{(n)}(t,\theta)$ – мінімізуюча послідовність, така, що $J(u^n) \to m, \quad n \to \infty$ монотонно.

Нехай $x^{(n)}$ послідовність розв'язків рівняння (1.8), відповідних керуванням $u^{(n)}$, $[-h,\tau_n]$ – максимальний інтервал існування. Із теореми 1.1 слідує, що $[\tau_n, x^{(n)}_{\tau_n}] \in \partial D$.

Ми маємо

$$m + 1 \geq \int_0^{\tau_n} L(t, x^{(n)}_t, u^{(n)})dt \geq C \int_0^T \int_{-h}^0 \left|u^{(n)}(t,y)\right|^p dydt \tag{0.20}$$

для достатньо великого n. Отже, $u^{(n)}(t,y)$ є слабко компактним в $L_p([0,T] \times [-h,0])$.

Отже, можна вибрати послідовність (яку також позначимо через $u^{(n)}(t,y)$), яка є слабко збіжною до $u^k(f) \in L_p([0,T] \times [-h,0])$ в $L_p([0,T] \times [-h,0])$.

За лемою Мазура[[79], Chap.V] існує опукла комбінація $b_k(t,y) = \sum_{\tau=1}^{n(k)} \alpha_i \cdot (K)u^{(i)} \cdot (t,u)$ елементів $u^{(i)}(t,y)$ таких, що $b_k \to u^{(*)}$ строго в $L_p([0,T] \times [-h,0])$.

Тоді існує підпослідовність $b_{k_j}(t,y)$ послідовності $b_k(t,y)$ така, що для майже всіх (t,y) на $[0,T] \times [-h,0]$ вона збігається до $u^x(t,y)$.

Оскільки U є опуклою, то ми маємо $b_{k_j}(t,y) \in U$, і із замкненості множиниU слідує, що $u^*(t,y) \in U$ майже для всіх (t,y). Отже, функція керування $u^*(t,y)$ є допустимою.

Тепер доведемо рівномірну обмеженість розв'язку $x^{(n)}$ на $[-h,\tau_n]$. Із (1.8) і із умов 1 і 2 для $t \in [0,\tau_n]$ ми маємо

$$\left|x^{(n)}(t)\right|^q \leq 3^{q-1} \left|\varphi(0)\right|^q + K^q T^{\frac{q}{p}} 2^{q-1} \int_0^t (1 + \left\|x_s^{(n)}\right\|_C^q) ds +$$

$$+h \left(\int_0^T \int_{-h}^0 \left|u^{(n)}(t,y)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} K^q h \int_0^t 2^{q-1} (1 + \left\|x_s^{(n)}\right\|_C^q) ds.$$

З (1.20) та з останньої нерівності для деяких додатних констант C_7 і C_8, які не залежать від t, y і n, ми маємо

$$\left|x^{(n)}(t)\right|^q \leq C_7 + C_8 \int_0^t \|x_s\|^q \, ds$$

для $t \in [0,\tau_n]$.

Отже, ми маємо оцінку

$$\max_{s \in [-h,t]} |x(s)| \leq C_9 + C_8 \int_0^t \max_{s_1 \in [-h,s]} |x(s_1)| \, ds$$

для деякої сталої C_9.

Використовуючи нерівність Гронуолла, ми маємо

$$\max_{t \in [-h,\tau_n]} \left|x^{(a)}(t)\right| \leq C_{10}, \tag{0.21}$$

де C_{10} – додатна стала, яка не залежить від n.

Отже, $x^{(n)}(t)$ є рівномірно обмеженим. Тепер продовжимо функції $x^{(n)}(t)$ на весь сегмент $[0,T]$ наступним чином

$$y^{(n)}(t) = \begin{cases} x^{(n)}(t), t \in [0, \tau_n] \\ x^{(n)}(\tau_n), t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \tag{0.22}$$

Якщо $s_1 \leq s_2 \leq \tau_n$, то із (1.17) слідує оцінка

$$\left| y^{(n)}(s_1) - y^n(s_2) \right| \leq C_{11}(s_2 - s_1) + C_{12}(s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}}. \tag{0.23}$$

Якщо $s_1 \leq \tau_n \leq s_2$, то аналогічно до (1.23) ми маємо

$$\left| y^{(n)}(s_1) - y^n(s_2) \right| = \left| x^{(n)}(s_1) - x^{(n)}(\tau_n) \right| \leq C_{11}|\tau_n - s_1| + C_{12}|\tau_n - s_1| \leq$$

$$\leq C_{11}\ (s_2\ -\ s_1)\ +\ C_{12}(s_2\ -\ s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Звідси слідує рівностепенна обмеженість на $[0,T]$, а із (1.22) і (1.21) слідує рівномірна обмеженість сімейства функцій $\{y^{(n)}(t)\}$. Тому сімейство функцій $\left\{y^{(n)}(t)\right\}$ містить підпослідовність, рівномірно збіжну на $[0,T]$, і яку ми знову позначимо як $\left\{y^{(n)}(t)\right\}$. Нехай $y^{(x)}(t)$ – її рівномірна границя на $[0,T]$.

Функція $y^*(t)$ визначена і неперервна на $[0,T]$. Звідки ми також маємо $y_t^* = y^*(t+\theta)$ для всіх $t \in [0,T]$. Нехай τ^* – момент першого виходу розв'язку (t, y_t^*) на границю ∂D, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [O,T] : (t, y_t^*) \in \partial D\}, \\ T, \quad if \quad (t, y_t^*) \in D, \forall t \in [O,T]. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо

$$y_{\tau_n}^{(n)} = y^{(n)}(\tau_n + \theta) = x^{(n)}(\tau_n + \theta) = x_{\tau_n}^{(n)},$$

то τ_n є момент першого виходу (t, y_t^n) на межу ∂D.

Покажемо, що

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n. \tag{0.24}$$

Нехай це не так. Тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau. \tag{0.25}$$

Очевидно, існує підпослідовність τ_{n_k}, така, що $\tau_{n_k} \to \tau$ для $n_k \to \infty$. Отже, для достатньо великого n_k ми маємо $\tau < \tau^*$ і

$$(\tau, y^*_\tau) \in D. \tag{0.26}$$

Але $(\tau_{n_k}, y^{(n_k)}_{\tau_{n_k}}) \in \partial D$.

З іншого боку, беручи до уваги рівномірну збіжність підпослідовності $y^n(t)$ до $y^*(t)$ на $[-h, T]$ і рівномірну на $[-h, T]$ неперервність $y^*(t)$ не важко бачити, що $y^{(n_k)}_{\tau_{n_k}} \to y^*_\tau$ в C при $n_k \to \infty$.

Оскільки множина ∂D є замкненою, ми маємо $(\tau, y^*_\tau) \in D$. Останнє протиречить (1.26).

Отже,

$$\tau^* \underset{n\to\infty}{\leq} \tau = \lim \inf \tau_n.$$

Нехай $x^*(t) = y^*(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$. Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком рівняння (1.4), яке відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\tau^* < \tau$. Тоді за теоремою про характеризацію нижньої грані, множина $\{n \in N : \tau_n \leq \tau^*\}$ є скінченною. Звідки слідує, що існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності τ_n, така, що $\tau_{n_k} > \tau^*$. Тоді $y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}(t)$ для $t \in [0, \tau^*]$ і $x^{(n_k)}(t)$ збігаються рівномірно до $x^*(t)$ при $n_k \to \infty$. Ми маємо

$$x^{(n_k)}(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x^{n_k}_s)ds + \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x^{n_k}_s y)u^{n_k}(s, y)dyds \tag{0.27}$$

для $t \in [0, \tau^*]$.

Тоді ми маємо

$$x^{(u_k)}(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x_s^{n_k})ds + \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^{n_k} y)u^*(s, y)dyds +$$

$$+ \int_0^t \int_{-h}^0 (f_2(s, x_s^{(n_k)}, y) - f_2(s, x_s^*, y))(u^{(u_k)}(s, y) - u^*(s, y)dyds +$$

$$+ \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)(u^{(u_k)}(s, y) - u^*(s, y)dyds. \tag{0.28}$$

Очевидно, що $x_t^{(n_k)} \to x_t^*$ в C для всіх $t \in [0, \tau^*]$.

Із (1.7) ми маємо

$$\int_0^t f_1(s, x_s^{(n_k)})ds \to \int_0^t f_1(s, x_s^*)ds \tag{0.29}$$

а із врахуванням теореми Лебега про домінантну збіжність ми також маємо, що

$$\int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^{(n_k)}, y)u^*(s, y)dyds \to \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)u^*(s, y)dyds. \tag{0.30}$$

Аналогічно ми встановлюємо, що третій інтеграл в (1.28) прямує до нуля при $n_k \to \infty$.

Враховуючи умову 2 відносно f_2, легко показати, що вираз $\int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)u(s, y)dyds$ визначає лінійний неперервний функціонал на $L_2([0, t] \times [-h, 0])$,

Звідки останній інтеграл в (1.28) прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u^{(n_k)}(s, y)$ до $u^*(s, y)$. Здійснивши граничний перехід в (1.28), ми отримаємо, що $x^*(t)$ є розв'язком початкової задачі (1.4) на $[0, \tau^*]$, який відповідає керуванню $u^*(t, y)$.

2. Нехай $\tau^* = \tau$. Візьмемо довільне $t_1 \in [0, \tau]$ таке, що $t_1 < \tau^*$. Тоді множина $\{n \in N : \tau_n \leq t_1\}$ є скінченною.

У випадку скінченності множини $Z = \{n \in N : t_1 < \tau_n \leq t^*\}$ доведення зводиться до попереднього випадку. Нехай Z – нескінченна множина і δ_{n_k} підпослідовність послідовності τ_n така, що $\tau_{n_k} \in Z$. Тоді для кожного $t \in [0, t]$ ми маємо $y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Аналогічно до попереднього випадку, тоді $x^*(t)$ є розв'язок початкової задачі (1.4) на $[0, t_1]$, який відповідає керуванню $u^*(t, y)$, тобто

$$x^*(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x_s^*)ds + \int_0^t \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)u^*(s, y)dyds \tag{0.31}$$

для $t \in [0, t_1]$. Оскільки $t_1 < \tau^*$ – довільне, то рівність (1.31) виконується на інтервалі $[0, \tau^*]$.

Покажемо, що це виконується також для $t = \tau^*$. Нехай $t_n \in [0, \tau^*]$ і $t_n \to \tau^*$, тоді $x^*(t_n) \to x^*(\tau^*)$.

Аналогічно до нерівності (1.17), ми маємо при $n \to \infty$

$$\left| \int_0^{\tau^*} [f_1(s, x_s^*) + \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)u^*(s, y)dy]ds - \int_0^{t_n} [f_1(s, x_s^*) + \int_{-h}^0 f_2(s, x_s^*, y)u^*(s, y)dy]ds \right| \to 0.$$

Отже, $x^*(t)$ задовольняє (1.31) при $t = \tau^*$ також.

Залишилося показати, що керування $u^*(s, y)$ є оптимальним. Ми маємо два випадки.

1. Нехай $\tau^* < T$.

а) $\tau^* < \lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau$. Тоді, аналогічно до вищевикладеного, існує послідовність τ_{n_k} послідовності τ_n така, що $\tau_{n_k} > \tau^*$ і для $t \in [0, \tau^*]$ $y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Покажемо інтегрованість функції $L(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t, \cdot))$ на $[0, \tau^*]$

Використовуючи нерівність

$$\left| L(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t, \cdot)) - L(t, x_t^*, u_0) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\| L_u(t, x_t^*, u_0 + \lambda(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0) \right\|_{L_q} \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p},$$

де $u_0 = const$, $u_0 \in \mathcal{U}$, ми маємо

$$L(t, x_t^* u^{(n_k)}(t,\cdot)) \leq L(t, x_t^*, u_0) +$$

$$+ \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\| L_u(t, x_t^*, u_0 + \lambda(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0) \right\|_{\lambda_q} \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p}.$$

Використовуючи п. 3) із умови 3, ми маємо

$$L(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)) \leq L(t, x_t^*, u_0) + C_1 \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p} +$$

$$+ C_1 \left\| x_t^* \right\|_C^\alpha \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p} +$$

$$+ C_1 \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\| u_0 + \lambda(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0) \right\|_{L_p}^{p-1} \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p}. \qquad (0.32)$$

Перший доданок в (1.32) інтегрований, згідно з (1.19). Другий і третій доданки також інтегровані на $[0, \tau^*]$ в силу (1.20) і (1.21) і в силу рівномірної збіжності $x^{(n_k)}(t)$ до $x^*(t)$ на $[0, \tau^*]$.

Інтегрованість останнього доданку в (1.32) слідує із оцінки

$$\int_0^{\tau^*} (\|u_0\|_{L_p} + \|u^{n_k}(t,\cdot) - u_0\|)^{p-1} \left\| u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0 \right\|_{L_p} dt \leq$$

$$\leq 2^{\frac{(p-1)^2}{p}} \left(\int_0^{\tau^*} (\|u_0\|_{L_p}^p + \|u^{n_k}(t,\cdot) - u_0\|_{L_p}^p) dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{\tau^*} (\|u^{n_k}(t,\cdot) - u_0\|_{L_p}^p) dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, функція $\alpha(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)$ є інтегровною на $[0, \tau^*]$.

Нехай $\chi_R(t)$ – характеристична функція множини $\left\{ t \in [0,t] : \|u^*(t,\cdot)\|_{L_p} < R \right\}$ для деякого $R > 0$.

Оскільки $L(t, y, z)$ є опуклим на z (п. 5) із умови 2.3), то виконується наступна нерівність

$$L(t, x_t^*, \upsilon(t,\cdot)\chi_R(t) \geq L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\chi_R(t) +$$

$$\left\langle L_u^{'}(t, x_t^*, u^*(t,\cdot), \upsilon(t,\cdot) - u^*(t,\cdot)\right\rangle \chi_R(t) \tag{0.33}$$

для будь-якого допустимого керування $\upsilon(t,y) \in U_p$ і $t \in [0,\tau^*]$. Тут $\left\langle L_u^{'}, \upsilon - u^*\right\rangle$ – дія лінійного неперервного функціонала L_u на елемент $\upsilon(t,\cdot) - u^*(t,\cdot) \in L_p$. Покладаючи в (1.33) $\upsilon(t,\cdot) = u^{(n_k)}(t,\cdot)$ ми маємо

$$\int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot))\chi_R(t)dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\chi_R(t)dt +$$

$$+ \int_0^{\tau^*} \left\langle L_u^{'}(t, x_t^*, u^*(t,\cdot), u^{(n_k)}(t,\cdot) - u^*(t,\cdot)\right\rangle \chi_R(t)dt. \tag{0.34}$$

Враховуючи п. 3) із умови 3, ми маємо

$$\|L_u(t, x_t^*, u^*(t,\cdot)\|_{L_q} \chi_R(t) \leq K(1 + \|x_t^*\|_C^\alpha + R)^{p-1},$$

тому другий доданок визначає лінійний неперервний оператор в $L_p([0,\tau^*] \times [-h,0])$. Отже, другий інтеграл в (1.34) прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u^{n_k}(t,s)$ до $u^*(t,s)$.

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^{(u_k)}(t,\cdot))\chi_R(t)dt \geq \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\chi_R(t)dt.$$

З того, що $L(t,y,z) \geq 0$, $\chi_R(t) \leq 1$ і $\chi_R(t) \to 1$ при $R \to \infty$, із останньої нерівності ми маємо

$$\int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot)dt \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} \alpha(t, x_t^*, u^{(u_k)}(t,\cdot)dt. \tag{0.35}$$

Інтегрованість $L(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)$ на $[0,\tau^*]$ при цьому береться до уваги.

Розглянемо також різницю

$$\int_0^{\tau^*} \left| L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(u_k)}(t,\cdot)) - L(t, x_t^*, u^{(u_k)}(t,\cdot))\right| dt. \tag{0.36}$$

Використовуючи п. 2) із умови 3, ми маємо

$$\int_0^{\tau^*} \left| L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(u_k)}(t,\cdot)) - L(t, x_t^*, u^{(u_k)}(t,\cdot)) \right| dt \leq$$

$$\leq \alpha \int_0^{\tau^*} \left\| x_t^{(n_k)} - x_t^* \right\| dt \to 0, n_k \to \infty. \tag{0.37}$$

Граничний перехід в (1.37) можливий в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність (1.21) і рівномірну збіжність $x^{(n_k)}(t)$ до $x^*(t)$ на $[0, \tau^*]$. Із (1.37) ми маємо, що вираз (1.36) прямує до нуля при $n_k \to \infty$.

Далі ми отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot))dt \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} [L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot) - L(t, x^*, u^{(n_k)})]dt +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} \left| L(t, x_t^*, u^{(u_k)}(t,\cdot)) - L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot)) \right| dt + \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))dt. \tag{0.38}$$

Як було показано вище, перший ліміт в правій частині (1.38) рівний нулю, а другий – є невід'ємним в силу (1.35).

Тоді

$$m = \lim_{n_k\to\infty} \inf \int_0^{\tau_{n_k}} L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot))dt \geq \lim_{n_k\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot))dt \geq$$

$$\geq \int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))dt.$$

Отже, $J(u^*) = m$, і пара $(x^*(t), u^*(t,s))$ є оптимальною.

b) Нехай $\tau^* = \tau = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n$.

Розглянемо множину $Z = \{n \in N : t_1 < \tau_n \leq \tau^*\}$, де $t_1 \in [0, T]$ оберемо знову довільно так, що $t_1 < \tau^*$. Достатньо розглянути випадок, коли ця множина

нескінченна. Тоді, аналогічно до випадку a), ми можемо показати, що

$$\int_0^{t_1} L(t, x_t^*, u^*(t, \cdot))dt \leq m.$$

Отже, граничним переходом при $t_1 \to \tau^*$ ми встановлюємо, що

$$\int_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t, \cdot))dt \leq m.$$

Отже, $J(u^*) = m$.

2. Нехай $\tau^* = T$. Тоді із (1.24) ми маємо $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau^*$, і доведення зводиться до випадку 1, b). Теорема доведена.

0.2 Оптимальне керування деякими класами функціонально-диференціальних систем на півосі

0.2.1 Постановка задачі

Для нелінійної за фазовими змінними і лінійної за керуванням системи функціонально-диференціальних рівнянь на півосі отримано достатні умови існування оптимальних керувань в термінах правих частин та критерія якості. Вивчено зв'язок між розв'язками вихідної задачі та відповідної задачі на скінченних часових інтервалах.

Нехай $t \in [0, \infty)$, а D – область в $[-h, \infty) \times C$, δD – її межа.

В цьому підрозді розглядається задача оптимального керування для системи функціонально-диференціальних рівнянь $x\,(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$x\,(t) = f_1\,(t, x_t) + \int_{-h}^{0} f_2\,(t, x_t, y)\ \ u\ \ (t, y)\,dy,\ \ t \in [0, \tau]\ \ , \tag{0.39}$$

$x(t) = \varphi_0(t)\,,\ t \in [-h, 0]$ із критерієм якості

$$I[u] = \int_0^\tau \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t) + B(t, u(t, \cdot))\right) dt \ \to inf, \tag{0.40}$$

або

$$I[u] = \int_0^\tau \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t) + \int_{-h}^0 |u(t, y)|^2 dy\right) \to inf, \tag{0.41}$$

при p=2.

Дані задачі розглядаються на нескінченному інтервалі $t \geq 0$. Тут $\varphi_0 \in C$ – фіксований елемент, що $(0, \varphi_0) \in D$, *x(t)* – фазовий вектор в R^d, а x_t– відповідно фазовий вектор в C, τ – момент першого виходу (t, x_t) на межу δD. Тут також $f_1 : D \to R^d f_2 : D \times [-h, 0] \to M^{dxm}$, – $d \times m$ – вимірна матриця, причому, для кожних $(t, \varphi) \in D$, $f_2(t, \varphi, \cdot)$ належить простір $L_q([-h, 0]\,; M^{d\times m})$ з нормою

$$||f_2(t, \varphi)||_{L_q} = (\int_{-h}^0 ||f_2(t, \varphi, y)||^q dy)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$A : D \to R^+$ і $B : [0, \infty) \times L_p \to R^+$ - задані відображення.

Параметром керування є m-вимірна вектор-функція $u \in L_p([0, \infty) \times [-h, 0])$ і така, що для майже всіх (t, y), $u(t, y) \in W$, де W – опукла, замкнена множина в R^m і $0 \in W$.

Для кожного такого керування відповідним розв'язком (траєкторією) системи (1.39) назвемо неперервну функцію $x(t)$, що на відрізку *[-h, T]* задовольняє умови:

1)$x(t) = \varphi_0(t)\,, t \in [-h, 0]\,;$

2) $(t,\ x_t) \in D$ при $t \in [0, T]\,;$

3) при $t \in [0, T]$ $x(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t [f_1(s, x_s) + \int_{-h}^0 f_2(s, x_s, y)\, u(s, y)\, dy] ds. \tag{0.42}$$

Керування $u(t,\cdot)$ вважається допустимим для задач (1.39)-(1.40) та (1.39)-(1.41) якщо:

1)$u(t,y) \in L_p([0,\infty) \times [-h,0]\,;$

2) $u(t,y) \in W$ при майже всіх $t \geq 0$, $y \in [-h,0]\,;$

3) розв'язок *x(t)*, відповідний $u(t,\cdot)$, існує на інтервалі $[-h,\tau]\,, \quad \tau > 0;$

4) $|I\,[u]| < \infty.$

Множину допустимих керувань позначимо U.

Через $V(\varphi_0)$ позначимо функцію Беллмана задачі на нескінченному проміжку часу, а через $V_T(\varphi_0)$ – функцію Беллмана відповідної задачі на скінченному інтервалі *[0, T]*.

Запис керованої системи у формі (1.39) є досить загальний, він включає в себе, як частинні випадки, звичайну задачу оптимального керування для функціонально-диференціальних рівнянь

$$x\,(t) = f\,(t,x_t) + g\,(t,x_t)\,u\,(t)\,, \quad u \ \in L_p\,([0,\infty)\,;R^m)\,, \tag{0.43}$$

рівнянь з максимумами, систем звичайних диференціальних рівнянь. Вибір керування, як елемента для кожного t функціонального простору $u(t,\cdot) \in L_p([0,\infty)\times[-h,0])$ зумовлено двома причинами:

1) наблизити задачу до загальної, функціонально-операторної постановки задачі оптимального керування, згідно з якою $u(t) \in W$, тобто топологічному простору (див., наприклад, [5]);

2) даний клас задач включає в себе деякі задачі економічного характеру (див. [6], [7]).

Задачам оптимального керування системами типу (1.43) присвячено багато робіт. З цього приводу відзначимо монографію [8], в якій для задач керуван-

ня функціонально-диференціальними рівняннями розвинуто метод динамічного програмування та принцип максимуму.

Однак, дані методи дають, як правило, необхідні умови оптимальності, а в тих випадках, коли вони дають достатні умови, перевірка таких умов є досить складною і вимагає залучення нових об'єктів, яких не було в початковій задачі. Тому бажано б було мати достатні умови існування оптимального керування в термінах правих частин системи і критерія якості.

В цьому напрямку вкажемо на роботу [9], де при умові компактності множини значень допустимих керувань отримано аналог теореми Філіппова. У випадку необмеженості множини значень керувань тут отримано аналог теореми Cessari. Зазначимо, що відмова від компактності множини керувань приводить до умов росту, що пов'язує праві частини системи та критерій якості. В роботах [10]-[12] розглядалась задача оптимального керування системою

$$x\left(t\right)=\tau x\left(t\right)+f_0(x\left(t\right),\int_{-T}^{0}a\left(y\right)x\left(t+y\right)aly)-u(t)$$

В [10] для деяких функціоналів якості отримані рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана та в термінах їх розв'язків дані достатні умови оптимальності.

В [11] аналогічні питання розглянуто для задач із фазовими обмеженнями. У [12] за умови неспадної функції $\tau x+f_0(x,y)$ за обома змінними для критерія якості

$$I[u]=\int_0^{\infty}e^{-\rho t}u^{1-\delta}\left(t\right)x\left(t\right)dt,\quad \tau\in(0;1)$$

Отримані достатні умови оптимальності. В роботі [3] розглянута задача типу (1.39)-(1.40) в більш широкій постановці, але тільки на скінченному інтервалі [0,T].

Наша мета – узагальнити результати роботи [3] на нескінченний інтервал

$[0,\infty)$ та з'ясувати зв'язок між задачами на скінченному та нескінченному інтервалах. Виявилось, що за допомогою оптимальних керувань на скінченному відрізку можна легко будувати мінімізонти для задач на нескінченному інтервалі.

0.2.2 Існування оптимальних керувань

Тепер ми дамо строгу постановку задач та сформулюємо основні результати даної роботи. Надалі в роботі будемо вважати, що виконуються наступні головні умови.

Нехай D – область в $t \in [-h,\infty) \times C$, δD – її межа (див., наприклад [2], p.18). Позначимо

$$D_t = \{\varphi \in C, (t,\varphi) \in D\}, \quad D_c = \bigcup_{t\geq 0} D_t$$

D_c – обмежена в C.

Умова 2.2.1. Допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u(t,y) \in L_p([0,\infty)\times[-h,0]\,;R^m)$, що майже для всіх $t \geq 0$ і $y \in [-h,0]$ значення $u(t,y) \in W$, де W-опукла замкнена множина в R^m і $0 \in W$ і $I[u]$ існує. Множину допустимих керувань позначимо U.

Умова 2.2.2. Відображення $f_1\,(t,\varphi) : D \to R^d$ і $f_2\,(t,\varphi,y) : D \times [-h,0] \to M^{d\times m}$ визначені та вимірні за сукупністю аргументів в областях D і відповідно $D_1 = \{(t,\varphi) \in D, y \in [-h,0]\}$, а також задовольняють там по φ умови лінійного росту та Ліпшиця, тобто існує стала K>0, що

$$|f_1(t,\varphi)| + \|f_2(t,\varphi,y)\| \leq K(1+\|\varphi\|_c), \tag{0.44}$$

для $(t,\varphi) \in D,\ y \in [-h,0]$,

$$|f_1\,(t,\varphi_1) - f_1\,(t,\varphi_2)| + \|f_2\,(t,\varphi_1,y) - f_2\,(t,\varphi_2,y)\| \leq K\|\varphi_1-\varphi_2\|_c, \tag{0.45}$$

для $(t, \varphi_1), (t, \varphi_2) \in D$.

Умова 2.2.3. 1) Відображення $A : D \to R^1$, $A(t, \varphi) \geq 0$ для $(t, \varphi) \in D$ визначене і неперервне в D і при $(t, \varphi) \in D$ існує стала $K_A > 0$, така що $A(t, \varphi) \leq K_A(1 + \|\varphi\|_c)$;

2) відображення $B : [0, \infty) \times L_p \to R^1$ вимірне за сукупністю аргументів і існують сталі $a_0 > 0,\ a_1 > 0$, такі що

$$a_1 \|z\|^p_{L_p} \geq B(t, z) \geq a_0 \|z\|^p_{L_p},$$

при $t \geq 0$;

3) $B(t, z)$ для кожного $t \geq 0$ сильно диференційовне по z і похідна Фреше $\frac{\delta B}{\delta z}$ задовольняє при $t \geq 0$ і $z \in L_p$ оцінку

$$\left\| \frac{\delta B}{\delta z} \right\|_{\mathcal{L}(L_p; R^1)} \leq a_3 \|z\|^{p-1}_{L_p}$$

для деякої $a_2 > 0$, незалежної від t і z. Тут $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L_p; R^1)}$ – рівномірна операторна норма в просторі лінійних неперервних функціоналів над L_p.

З'ясуємо питання існування оптимальної пари для розглядуваних задач.

Теорема 0.3. *При виконанні умов 2.1-2.3 задачі* (1.39), (1.40) *та* (1.39), (1.41) *мають розв'язки* (x^*, u^*).

Доведення. По-перше, зауважимо, що в умовах теореми 2.1 виконані умови теореми 2.1 роботи [3]. Отже розв'язок початкової задачі (1.39) існує, єдиний і продовжується до межі області D.

Далі зауважимо, що множина U допустимих керувань непорожня, оскільки $0 \in U$. Дійсно, нехай $x(t, 0)$ – розв'язок системи (1.39), який відповідає цьому керуванню, а $x_t(0)$ відповідний елемент із C. Тоді в силу умови 1) із 2.3 та

обмеженості D_c ми маємо:

$$I\left[0\right]=\int_0^T e^{-\gamma t}A\left(t,x_0\left(0\right)\right)dt\leq\int_0^\tau e^{-\gamma t}K_A\left(1+\left\|x_t\left(0\right)\right\|_c\right)dt\leq K_A\int_0^\infty e^{-\gamma t}dt+$$

$$+K_AR\int_0^\infty e^{-\gamma t}dt<\infty$$

тут R – радіус кулі, що містить D_c.

Оскільки критерій якості невід'ємна величина, то існує невід'ємна нижня грань m значень $I[u]$ керувань $\{u_n(t)\}$. Нехай $u^{(n)}\left(t,y\right)$ – мінімізуюча послідовність, що $I\left[u^{(n)}\right]\to m,\ n\to\infty$ монотонно. Нехай також $x^{(n)}\left(t\right)$ послідовність розв'язків рівняння (1.39), що відповідають $u^{(n)}$, а $[-h,\tau_n]$ – максимальний інтервал їх існування.

Зауважимо, що $(\tau_n,x^{(n)}_{\varepsilon_n})\in\delta D$.

$$m+1\geq\int_0^{\tau_n}B\left(t,u^{(n)}(t,\cdot)\right)dt\geq a\int_0^{\tau_n}\int_{-h}^0\left|u^{(n)}(t,y)\right|^p dy\ dt\geq \tag{0.46}$$

$$\geq a\int_0^\infty\int_{-h}^0\left|u^{(n)}(t,y)\right|^p dy\ dt,$$

при достатньо великих n. Значить послідовність $u^{(n)}(t,y)$ слабко компактна в $L_p([0,\infty)\times[-h,0])$. Звідси існує слабко збіжна її підпослідовність. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що сама $u^{(n)}(t,y)$ слабко збіжна до $u^*\in L_p([0,\infty)\times[-h,0])$. За лемою Мазура [4, гл. v] деяка опукла комбінація

$$b_k\left(t,y\right)=\sum_{i=1}^{n|k|}\alpha:(k)\,u^{(i)}(t,y)$$

елементів $u^{(i)}(t,y)$ збігається сильно до $u^*\ \ L_p([0,\infty)\times[-h,0])$. Отже, існує підпослідовність $b_{k_j}(t,y)$ послідовності $b_k(t,y)$, що майже скрізь на $[0,\infty)\times[-h,0]$ збігається до $u^*(t,y)$. Оскільки W – опукла і замкнена, то $b_{k_j}(t,y)\in W$, а тому і $u^*(t,y)\in W$, отже, керування $u^*(t,y)$ є допустимим.

Розглянемо тепер послідовність розв'язків $x^n(t)$ системи (1.39), які відповідають керуванням $u^n(t,y)$. При $t \in [0,\tau_n]$ ми маємо

$$x^{(n)}(t) - \varphi_0(0) + \int_0^t \left[f_1\left(s, x_s^{(n)}\right) + \int_{-h}^0 f_2(s, x_s, y)\, u^{(u)}(s,y)\, dy \right] ds. \qquad (0.47)$$

За функціями $x^n(t)$ побудуємо функції $z^n(t)$, що визначаються на всю піввісь наступним чином

$$z^{(n)}(t) = \begin{cases} x^{(n)}(t), & t \in [0,\tau_n] \\ x^{(n)}(\tau_n), & t \geq \tau_n. \end{cases}, \qquad (0.48)$$

Оскільки D_c – обмежена, то існує C>0, що

$$\left| z^{(n)}(t) \right| \leq C, \quad t \geq 0. \qquad (0.49)$$

Оберемо довільне T>0 та зафіксуємо його. Покажемо, що сім'я функцій $\left\{ z^{(n)}(t) \right\}$ компактна $[0,T]$. Для цього, в силу (1.49), достатньо довести їх рівностепеневу неперервність. При $t_1, t_2 \in [0,\tau_n]$ із (1.47) в силу (1.44) маємо оцінку

$$\left| x^{(n)}(t_1) - x^{(n)}(t_2) \right| \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| f_1(s, x_s^{(n)}) \right| ds + \int_{t_1}^{t_2} \left| \int_{-h}^0 f_2\left(s, x_s^{(n)}, y\right) u^{(n)}(s,y)\, dy \right| ds \leq$$

$$\leq K \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \left\| x_s^{(n)} \right\|_c\right) ds + \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \left\| x_s^{(n)} \right\|_c\right) \int_{-h}^0 \left| u^{(n)}(s,y) \right| dy\, ds \leq$$

$$\leq K(1+C)(t_2 - t_1) + K(1+C) \int_{t_1}^{t_2} \int_{-h}^0 \left| u^{(n)}(s,y) \right| dy\, ds \leq$$

$$\leq K(1+C)(t_2 - t_1) + K(1+C)\, h^{1/q} (t_2 - t_1)^{1/q} \left(\int_0^\infty \int_{-h}^0 \left| u^{(n)}(s,y) \right| dy\, ds \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq K(1+C)(t_2 - t_1) + K(1+C)\, h^{1/q} (t_2 - t_1)^{1/q} \left(\frac{m+1}{a} \right)^{1/p}. \qquad (0.50)$$

Отже, при $t_1 \leq t_2 \leq \tau_n$

$$\left| z^{(n)}(t_1) - z^{(n)}(t_2) \right| \leq C_1 (t_2 - t_1) + C_2 (t_2 - t_1)^{1/q}, \qquad (0.51)$$

для деяких додатніх сталих $C_1 C_2$.

Якщо $t_1 < \tau_n < t_2$, то аналогічно до (1.51) маємо

$$\left| z^{(n)}(t_2) - z^{(n)}(t_1) \right| = \left| x^{(n)}(t_1) - x^{(n)}(\tau_n) \right| \leq C_1 (\tau_n - t_1) + C_2 (\tau_n - t_1)^{1/q} \leq$$

$$\leq C_1 (t_2 - t_1) + C_2 (t_2 - t_1)^{1/q}.$$

Звідки випливає рівностепенева неперервність сімейства функцій $z^{(n)}(t)$ на $[0, \tau]$, а отже і їх компактність.

Отже, існує підпослідовність $z_k^{(n)}(t)$ послідовності $z^{(n)}(t)$ така, що $z_k^{(n)}(t)$ рівномірно збіжна до $z^*(t)$ на $[0, \tau]$. Функція $z^*(t)$ визначена та неперервна на $[0, \tau]$, а значить існує z_t^* як елемент простору C при всіх $t \in [0, \tau]$.

Отже, кожному відрізку $[0, \tau]$ із послідовності $\left\{ z^{(n)}(t) \right\}$ виділяється рівномірно збіжна підпослідовність. Покажемо, що існує підпослідовність послідовності $\left\{ z^{(n)}(t) \right\}$, що збігається поточково на $[0, \infty)$ до деякої неперервної функції. Для цього використаємо діагональний метод.

Для T=1 існує підпослідовність $\left\{ z_1^{(n)}(t) \right\}$ послідовності $\left\{ z^{(n)}(t) \right\}$ така, що $z_1^{(n)}(t) \rightrightarrows z_1^*(t)$ при $n \to \infty$ на $[0, 1]$.

Для T=2 існує підпослідовність $\left\{ z_2^{(n)}(t) \right\}$ послідовності $\left\{ z_1^{(n)}(t) \right\}$ така, що $z_2^{(n)}(t) \rightrightarrows z_2^*(t)$ при $t \in [0, 2]$.

Зауважимо, що при цьому $z_2^*(t) = z_1^*(t)$ при $t \in [0, 1]$. Продовжуючи даний процес, отримаємо для кожного натурального N існування підпослідовності $\left\{ z_N^{(n)}(t) \right\}$ послідовності $\left\{ z_{N-1}^{(n)}(t) \right\}$ такої, що $z_N^{(n)}(t) \rightrightarrows z_N^*(t)$ на [0,N] і $z_N^*(t) = z_{N-1}^*(t)$ при $t \in [0, N-1]$.

Застосувавши діагональний метод, із даних послідовностей виділимо підпослідовності $\left\{ z_n^{(n)}(t) \right\}$, що, очевидно, поточково на $t \in [0, \infty)$ збігається до неперервної функції $z^*(t)$, визначеної наступним чином:

$z^*(t) = z_N^*(t)$ на [0,N], N – натуральне число. Надалі для зручності, знову послідовність $\left\{z_n^{(n)}(t)\right\}$ будемо позначати як $\{z^n(t)\}$, а відповідну послідовність керувань як $\{U^n(t)\}$. Оскільки $z^*(t)$ визначена і неперервна на $[0,\infty)$, то і z_t^* існує як елемент простору C при всіх $t \geq 0$. Відзначимо також, що $z_N^*(t)$ збігається рівномірно до $z^*(t)$ на кожному відрізку $[0,\tau]$.

Нехай τ^* момент першого видоху (t, z_t^*) на δD, тобто

$$\tau^* = \begin{cases} inf\ \{t \geq 0 : (t, z_t^*) \in \delta D \\ \infty,\ if\,(t, z_t^*) \in \delta D,\ t \geq 0 \end{cases}$$

Відзначимо, що $z_{\tau_n}^{(n)} = z^{(n)}(\tau_n + \theta) = x^{(n)}(\tau_n + \theta) = x_{\tau_n}^{(n)}$, а отже, τ_n – момент першого виходу $(t, z_t^{(n)})$ на δD.

Покажемо, що

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} inf \tau_n\ , \tag{0.52}$$

Розглянемо два випадки: $\tau^* < \infty$ і $\tau^* = \infty$.

1) Нехай $\tau^* < \infty$, тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} inf \tau_n\ = \tau \tag{0.53}$$

Оберемо довільне $T \in [0,\infty)$ і таке, що $T > \tau^*$. Очевидно, існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$, що $\tau_{n_k} \to \tau$ при $n_k \to \infty$. Отже, для достатньо великого n_k ми маємо $\tau_{n_k} < \tau^*$ і

$$(\tau_{n_k}, z_{\tau_{n_k}}^*) \in D, \quad (\tau, z_\tau^*) \in D, \tag{0.54}$$

але $(\tau_{n_k}, z_{\tau_{n_k}}^{(nk)}) \in \delta D$.

З іншого боку, враховуючи рівномірну на $[-h,T]$ збіжність послідовності $z^n(t)$ до $z^*(t)$ і рівномірну на [-h,T] неперервність $z^*(t)$, ми маємо

$$z_{\tau_{n_k}}^{(nk)} \to z_\tau^{(\tau)}, \tag{0.55}$$

в C. Дійсно,

$$\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|z^{(nk)}(\tau_{n_k}+\theta)-z^*(\tau+\theta)\right|\le\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|z^{(nk)}(\tau_{n_k}+\theta)-z^*(\tau_{n_k}+\theta)\right|+$$

$$+\sup_{-h\le\theta\le 0}|z(\tau_{n_k}+\theta)-z(\tau+\theta)|\to 0, n_k\to\infty,$$

Оскільки множина δD замкнута, то $(\tau, z^*_\tau)\in\delta D$. Останнє суперечить (1.54).

2) Нехай $\tau^*=\infty$, а $\lim_{n\to\infty} inf\tau_n\ <\infty$. Виберемо T$_2$ >0 і $T_2>\lim_{n\to\infty} inf\tau_n$. Провівши тепер аналогічні міркування на [0, T$_2$], матимемо, що даний випадок зведеться до попереднього

$$\tau^*\le\lim_{n\to\infty} inf\tau_n=\tau\ . \tag{0.56}$$

Покладемо $x^*(t)=z^*(t)$ при $t\in[0,\tau^*]$ у випадку скінченного τ^* і $t\in[0,\infty)$ при $\tau^*=\infty$. Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком рівняння (1.39), який відповідає керуванню $u^*(t,y)$ при всіх розглядуваних t.

Розглянемо три випадки.

1. Якщо $\tau<\infty$, то доведення аналогічне доведенню відповідного факту з [3, теорема 2.2].

2. Нехай $\tau=\infty$, але $\tau^*<\infty$. В цьому випадку або існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$, що $\tau_{n_k}\to\infty$, $n_k\to\infty$, або лише скінченна кількість $\tau_n<\infty$. Тоді для достатньо великих n_k, $z^{(nk)}(t)=x^{(nk)}(t)$ при $t\in[0,\tau^*]$ і $x^{(nk)}(t)\rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k\to\infty$ на $[0,\tau^*]$. Подальше доведення аналогічне [3, теорема 2.2].

3. Нехай $\tau^*=\infty$. Візьмемо довільне T>0 і розглянемо відрізок [0; T]. Аналогічно попередньому випадку існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$, що $\tau_{n_k}\to\infty$, $n_k\to\infty$. Тоді на [0,T] при достатньо великих n_k, $z^{(nk)}(t)=x^{(nk)}(t)$ на [0, T], а отже $x^{(nk)}(t)\rightrightarrows x^*(t)$ на [0, T] при $n\to\infty$. Подальше доведення аналогічне попередньому.

Залишилось показати, що керування $u^*(t,y)$ – оптимальне.

1. Нехай $\tau^* < \tau$. В цьому випадку або існує підпослідовність $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності $\{\tau_n\}$, що $\tau_{n_k} \to \tau$ при $n_k \to \infty$, або лише не більше, ніж скінченна кількість $\{\tau_n\}$ скінченна (у випадку $\tau = \infty$). Тоді для достатньо великих n_k знову $z^{(nk)}(t) = x^{(nk)}(t)$ при $t \in [0,\tau^*]$ і $x^{(nk)}(t) \rightrightarrows x^*(t)$ при $n_k \to \infty$ на $[0,\tau^*]$.

Також, очевидно, маємо, що для всіх $t \in [0,\tau^*]$.

$$\left\| x_t^{(nk)} - x_t^* \right\|_c \to 0, \quad n_k \to \infty, \tag{0.57}$$

Ми маємо

$$\int_0^{\tau_{nk}} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{(nk)}\right) dt + \int_0^{\tau_{nk}} B\left(t, u^{(nk)}(t,\cdot)\right) dt \geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{(nk)}\right) dt + \\ + \int_0^{\tau^*} B\left(t, u^{(nk)}(t,\cdot)\right) dt. \tag{0.58}$$

Підінтегральний вираз у першому доданку в (1.58) для кожного t прямує до $A(t, x_t)$ і в силу (1.57) і умови 1) з 2.3. В силу обмеженості D_c і умови лінійного росту $A(t,\varphi)$ (умова 1) з 2.3) ми маємо також, що $A\left(t, x_t^{(nk)}\right) \leq K_A(1+K_1)$ для деякої сталої $K_1 > 0$, тому використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо, що

$$\int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{(nk)}\right) dt \to \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^*\right) dt. \tag{0.59}$$

Оскільки $B(t,u)$ – опукла по u, то

$$B\left(t, \vartheta\left(t,\cdot\right)\right) \geq B\left(t, u^*\left(t,\cdot\right)\right) + \left\langle B'u\left(t, u^*\left(t,\cdot\right)\right), \vartheta\left(t,\cdot\right) - u^*\left(t,\cdot\right)\right\rangle, \tag{0.60}$$

для будь-якого допустимого керування $\vartheta(t,y) \in U$. Тут $\langle L'u, \vartheta - u^*\rangle$ - дія лінійного неперервного функціоналу $L'u$ на елемент $\vartheta(t,\cdot) - u^*(t,\cdot) \in Lp$. При цьому, в силу умови 3) з 2.3 ми маємо

$$\int_0^{\infty} \int_{-h}^{0} \left| \frac{\delta B}{\delta u}(t, u^*(t,y) \right|^q dydt \leq a_3 \int_0^{\infty} \int_{-h}^{0} |u^*(t,y)|^p dydt < \infty.$$

Отже, за теоремою Ріса вираз

$$\int_0^\infty < B'u(t, u^*(t,\cdot), \vartheta(t,\cdot)) - u^*(t,\cdot) > dt$$

задає лінійний неперервний функціонал в $Lp([0,\infty) \times [-h, 0])$. Поклавши тепер в (1.60) $\vartheta\,(t,\cdot) = u^{nk}\,(t,\cdot)$ і використавши слабку збіжність $u^{nk}\,(t,y)$ до $u^*\,(t,y)$, отримаємо для другого доданку в (1.58) нерівність

$$\lim_{n_k\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} B\left(t, u^{(nk)}(t,\cdot)\right) dt \geq \int_0^{\tau^*} B\,(t, u^*(t,\cdot))\, dt\ , \tag{0.61}$$

таким чином, з (1.58), (1.59) і (1.61) ми маємо

$$m = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{(nk)}\right) dt + \int_0^{\tau_{n_k}} B\left(t, u^{(n_k)}(t,\cdot)\right) dt \right) \geq$$

$$\geq \int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A\,(t, x_t^*)\, dt + \lim_{n_k\to\infty} \inf \int_0^{\tau^*} B\left(t, u^{(n_k)}(t,\cdot)\right) dt \geq$$

$$\int_0^{\tau^*} e^{-\gamma t} A\,(t, x_t^*)\, dt + \int_0^{\tau^*} B\,(t, u^*(t,\cdot))\, dt,$$

отже, в цьому випадку керування $u^*(t,y)$ є оптимальним.

2. Нехай $\tau^* = \tau$. Візьмемо довільне $t_1 = \tau^*$ і розглянемо відрізок [0, t_1]. На даному відрізку $x^{(nk)}(t) \rightrightarrows x^*(t)$, при $n_k \to \infty$, а отже $x_t^{(n_k)} \to x_t^*$ в C, $n_k \to \infty$.

В силу теореми про характеризацію нижньої границі множина $\{n \in N | \tau_n < t_1\}$ скінченна, а на проміжку (t_1, τ^*) може лежати нескінченна кількість точок τ_n (якщо вони скінченні). Розглянемо цю послідовність. Тоді, аналогічно до попереднього, ми отримаємо

$$m = \lim_{n_k\to\infty} (\int_0^{\tau_{n_k}} e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{(nk)}\right) dt \ + \int_0^{\tau_{n_k}} B\left(t, u^{(n_k)}(t,\cdot)\right) dt) \geq$$

$$\geq \int_0^{t_1} e^{-\gamma t} A\,(t, x_t^*)\, dt + \int_0^{t_1} B\,(t, u^*(t,\cdot))$$

Звідки граничним переходом при $t_1 = \tau^*$ отримаємо, що $I[u^*] = m$.

Для функціоналу (1.41) доведення аналогічне. При цьому умова 3) з 2.3 виконується автоматично, оскільки $\frac{\delta B}{\delta z} = 2u(t,\cdot)$. Теорема доведена.

0.3 Зв'язок між задачею оптимального керування на скінченному та на нескінченному часовому інтервалах

Нехай T>0 – фіксоване. Через (x_T^*, u_T^*) позначимо розв'язки задач (1.39), (1.40) та (1.39), (1.41) на [0, T].

Для задач на нескінченному інтервалі покладемо

$$u_{T,\infty}(t,\cdot) = \begin{cases} u_T^*(t,\cdot), & t \in [0,T] \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Очевидно, що дане керування є допустимим для вихідної задачі. Знову $(u^*(t,\cdot), x^*(t))$ – оптимальна пара для задачі (1.39)-(1.40).

Теорема 2.4. За виконання умов 2.2.1-2.2.3 маємо:

1)

$$V_T(\varphi_0) \to V(\varphi_0), \quad T \to \infty; \tag{0.62}$$

2) існує послідовність $T_n \to \infty$, $n \to \infty$, що послідовність $\left\{u_{T_n,\infty}^*\right\}$ є мінімізантом для задачі (1.39), (1.40), тобто

$$I\left[u_{T_n,\infty}^*\right] \to V, \quad n \to \infty, \tag{0.63}$$

3)

$$u_{T_n,\infty} \xrightarrow{\omega} u^*, \quad n \to \infty \tag{0.64}$$

слабко в $L_p([0;\infty) \times [-h,0]; R^m)$

4) поточково на [0,T], рівномірно на кожному скінченному інтервалі

$$x^{T_n,\infty}(t) \to x^*(t), \quad n \to \infty. \tag{0.65}$$

Якщо задача (1.39)-(1.40) має єдиний розв'язок, то збіжності у (1.63), (1.64) мають місце при всіх T$\to \infty$.

Доведення.

Спочатку розглянемо задачу (1.39)-(1.40). Візьмемо довільне T>0 та зафіксуємо його. Як і раніше $V(\varphi_0)$ – функція Беллмана відповідної задачі на [0,T]. З теореми 2.1 та відповідної теореми з [3] випливає, що дані задачі мають розв'язки $x^*(t), u^*(t,\cdot))$ та $x^T(t), u_T^*(t,\cdot))$. Зазначимо, що множина допустимих керувань на $[0,\infty)$ є підмножиною допустимих керувань на [0, T]. За допустимими керуваннями $u(t,\cdot)$ на [0, T], що не є допустимими на $[0,\infty)$ побудуємо наступні керування

$$u_{T,\infty}(t,\cdot) = \begin{cases} u(t,\cdot), & t \in [0,T] \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{0.66}$$

Об'єднання множини допустимих керувань на [0, ∞) із множиною керувань вигляду (1.66) позначимо U_T. Тоді така множина допустимих керувань співпадає на [0, ∞) з множиною U, а на [0, T] вона співпадає із множиною всіх допустимих керувань задачі типу (1.39)-(1.40) на [0, T]. Дійсно, за довільним допустимим керуванням $u(t,\cdot)$ на [0, T], яке не є допустимим на [0, ∞) за правилом (1.66) будуємо допустиме керування на [0, ∞). З іншого боку $L_p([0,\infty)) \subset L_p([0,T])$.

Позначимо $D_T = D \cap [-h,T]$, а τ_T^* - момент виходу $x_t^{*,T}$ на границю області D_T.Зазначимо, що у випадку $\tau_T^* < T$ керування $u_{T,\infty}^*(t,\cdot)$ буде оптимальним для задачі (1.39), (1.40) на [0, ∞]. Тоді $V < V_T$.

Розглянемо тепер випадок $\tau_T = T$. Позначимо $x(t) = x(t, u_{T,\infty}^*(t,\cdot))$ – розв'язок початкової задачі (1.39), який відповідає керуванню $u_{T,\infty}^*(t,\cdot)$. Зазначимо,

що оскільки при $t \in [0,T]$ $u^*(t,\cdot) = u_T^*(t,\cdot)$, то в силу єдиності розв'язку початкової задачі (1.39) $x(t) = x^{*,T}(t)$ при $t \in [0,T]$. Із означення функції Беллмана тоді маємо

$$V \leq I\left(u_{T,\infty}^*\right) = \int_0^T \left(e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{*,T}\right) + B\left(t, u_T^*(t,\cdot)\right) dt + \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} A(t, x_t)\, dt$$

$$= V_T + \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} A(t, x_t)\, dt. \tag{0.67}$$

При цьому використана умова 2) із 2.3. Тут τ_T – момент виходу x_t на межу області D. Другий доданок в (1.67) прямує до нуля при $T \to \infty$ в силу обмеженості D_c і теореми Лебега про домінантну збіжність.

Нагадаємо, що τ^* - момент виходу оптимальної траєкторії x_t^* задачі (1.39), (1.40) на $[0,\infty]$ на границю D. Зазначимо, що якщо $\tau^* \leq T$, то пара $(x^*(t), u^*(t,\cdot))$ буде оптимальною і для задачі на [0, T] і в цьому випадку знову V=V$_T$. Нехай $\tau^* > T$. Тоді

$$V = I[u^*] = \int_0^T \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t^*) + B(t, u^*(t,\cdot))\right) dt + \int_T^{\tau^*} \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t^*) + \right.$$

$$\left. + B(t, u^*(t,\cdot))\right) dt \geq V_T + \int_T^{\tau^*} \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t) + B(t, u^*(t,\cdot))\right) dt. \tag{0.68}$$

Але

$$\int_T^{\tau^*} \left(e^{-\gamma t} A(t, x_t^*) + B(t, u^*(t,\cdot))\right) dt \leq \int_T^{\infty} e^{-\gamma t} K_A (1 + K_1)\, dt + \int_T^{\infty} a_1 \|u^*(t,\cdot)\|_{L_p}^p dt =$$

$$= \int_T^{\infty} e^{-\gamma t} K_A (1 + K_1)\, dt + \int_T^{\infty} \int_{-h}^{0} |u^*(t,y)|^p dy dt \to 0, \tag{0.69}$$

при $T \to \infty$.

Тоді, з одного боку з (1.67) ми маємо

$$V - V_T \leq \int_T^{\tau_T} e^{-\gamma t} A(t, x_t)\, dt,$$

а з іншого боку ми отримали

$$V - V_T \geq \int_T^{\tau_T} \left(e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^*\right) + B\left(t, u^*\left(t, \cdot\right)\right)\right) dt,$$

звідки отримуємо, з урахуванням (1.69), перше твердження теореми 2.2, а саме (1.62).

Далі, для зручності, не втрачаючи загальності вважатимемо, що $T = n \in N$ – натуральне. Нехай $u_n^*\left(t, \cdot\right)$ - оптимальне керування $[0, n]$, $u_{n,\infty}^*\left(t, \cdot\right)$ - допустиме керування задачі (1.39), (1.40) на $[0, \infty)$, яке визначене формулою (2.3*).

Знову, якщо для якогось n $\tau_n^* < n$, то $u_{n,\infty}^*$ є оптимальним для задачі на нескінченному інтервалі. Тут τ_n^* - момент виходу $x_t^{n,\infty}$ на границю області D.

Нехай тепер $\tau_n^* = n$ для всіх n. Оскільки $V_n = I[u_n^*] \to V$, то існує стала L, така що $V_n \leq L$. Але з умови 2) з 2.3 та із (2.3*) ми маємо

$$L \geq V_n = I\left[u_n^*\right] = \int_0^n \left(e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{*,n}\right) + B\left(t, u_n^*\left(t, \cdot\right)\right)\right) dt \ \geq$$

$$\geq a \int_0^n \int_{-h}^0 |u_n^*(t, y)|^p dy dt = a \int_0^\infty \int_{-h}^0 \left|u_{n,\infty}^*(t, y)\right|^p dy dt,$$

а, отже, послідовність допустимих керувань $\left\{u_{n,\infty}^*\right\}$ слабко збіжна підпослідовність, яку знову позначимо через $\{u_{n,\infty}\}$, не втрачаючи загальності. Ми маємо

$$u_{n,\infty}^* \xrightarrow{w} u^*, \quad n \to \infty \text{ в } L_p([0, \infty) \times [-h, 0]). \tag{0.70}$$

Аналогічно до теореми 2.1, з використанням леми Мазура, отримуємо, що майже при всіх (t, y) $u^*(t, y) \in W$.

Позначимо $x_t^{n,\infty}(t)$ розв'язок початкової задачі (1.39), що відповідає керуванню $u_{n,\infty}^*\left(t, \cdot\right)$. Нехай τ_n – момент виходу $x_t^{n,\infty}$ на границю області D. Очевидно що $\tau_n > n$. Тоді ми маємо

$$I\left[u_{n,\infty}\right] = \int_0^n \left(e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{*,n}\right) + B\left(t, u_n^*\left(t, \cdot\right)\right)\right) dt + \int_n^{\tau_n} \left(e^{-\gamma t} A\left(t, x_t^{n,\infty}\right) + \right.$$

$$+B\left(t,u_{n,\infty}^{*}\left(t,\cdot\right)\right))dt=V_n+\int_n^{\tau_n}\left(e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^{n,\infty}\right)+B\left(t,u_{n,\infty}^{*}\left(t,\cdot\right)\right)\right)dt.$$

Але $B\left(t,u_{n,\infty}^{*}\left(t,\cdot\right)\right)=0$ при $t\geq n$ в силу побудови $u_{n,\infty}$ і умови 2) з 2.3. Тоді

$$I\left[u_{n,\infty}\right]=V_n+\int_n^{\tau_n}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^{n,\infty}\right)dt, \tag{0.71}$$

$$\int_n^{\tau_n}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^{n,\infty}\right)dt\leq\int_n^{\tau_n}e^{-\gamma t}K_A\left(1+\|x_t^{n,\infty}\|_c\right)dt,$$

за умовою 1 із 2.3. Оскільки множина D_c обмежена, то, як і вище, при $t\leq\tau_n$ $\|x_t^{n,\infty}\|\leq K_1$.

Отже,

$$\int_n^{\tau_n}e^{-\gamma t}K_A\left(1+K_1\right)dt\leq\int_n^{\infty}e^{-\gamma t}K_A\left(1+K_1\right)dt\to 0,\quad n\to\infty, \tag{0.72}$$

Із (1.71) і (1.72) ми маємо, що

$$I\left[u_{n,\infty}\right]\to V,\quad n\to\infty. \tag{0.73}$$

Отже, послідовність $\left\{u_{n,\infty}^{*}\right\}$ є мінімізуючою для задачі (1.39), (1.40), що й доводить твердження 2) теореми 2.2. Позначимо $x^*(t)$ розв'язок початкової задачі (1.39), що відповідає керуванню $u^*(t,\cdot)$ із (1.70). Такий розв'язок існує і він єдиний, що є наслідком з теореми 2.1 роботи [3]. Твердження про те, що пара $\left(u^*\left(t,\cdot\right),x^*\left(t\right)\right)$ є оптимальною для задачі (1.39), (1.40) доводиться аналогічно відповідному твердженню з теореми 2.1. Твердження 3) даної теореми тепер очевидне. Доведення твердження 4) проводиться аналогічно до доведення відповідного факту з теореми 2.1.

Якщо задача (1.39), (1.40) має єдиний розв'язок, то збіжності (1.63) і (1.64) мають місце при всіх $T\to\infty$. Останнє очевидним чином випливає з того факту, що із будь-якої підпослідовності $\left\{u_{n_k,\infty}^{*}\right\}$ послідовності $\left\{u_{n,\infty}^{*}\right\}$ із (1.70) виділяється слабко збіжна до оптимального керування $u^*\left(t,\cdot\right)$ послідовність, а таке керування єдине. Теорема доведена.

Зауваження 2.3. В умовах теореми 2.4 для функціоналу (1.41) справедливі всі твердження теореми 2.2 із заміною слабкої збіжності (1.64) оптимальних керувань на сильну збіжність в $L_2([0,\infty)\times[-h,0]\,;R^m)$.

Доведення. Розглянемо задачу оптимального керування (1.39), (1.41). Очевидно, що доведення потребує лише встановлення сильної збіжності $u^*_{\tau_n,\infty}$ до u^*. Аналогічно до теореми 2.1 ми маємо

$$V=\lim_{n\to\infty}(\int_n^{\tau_n}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^{n,\infty}\right)dt+\int_0^{\tau_n}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}(t,y)\right|^2dydt)\geq\int_0^{\tau^*}A\left(t,x_t^*\right)e^{-\gamma t}dt+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int_0^{\tau_n}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}(t,y)\right|^2dydt, \tag{0.74}$$

тому остання границя в (1.74) існує, а отже, співпадає зі своєю нижньою границею. Але з побудови $u^*_{n,\infty}$ випливає, що

$$\int_0^{\tau_n}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}(t,y)\right|^2dydt=\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}(t,y)\right|^2dydt.$$

Тому з (1.74) ми маємо

$$V\geq\int_0^{\tau^*}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^*\right)dt+\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}\left(t,y\right)\right|^2dydt=\int_0^{\tau^*}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^*\right)dt+$$

$$+\lim_{n\to\infty}inf\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}\left(t,y\right)\right|^2dydt\geq\int_0^{\tau^*}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^*\right)dt+\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*\left(t,y\right)\right|^2dydt\geq$$

$$\geq\int_0^{\tau^*}e^{-\gamma t}A\left(t,x_t^*\right)dt+\int_0^{\tau^*}\int_{-h}^0\left|u^*\left(t,y\right)\right|^2dydt=V$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*_{n,\infty}(t,y)\right|^2dt=\int_0^{\infty}\int_{-h}^0\left|u^*(t,y)\right|^2dydt.$$

Звідки з урахуванням (1.70) випливає сильна збіжність $u^*_{n,\infty}$ до u^* в $L_2\left([0;\infty)\times(-h;0]\right)$ що й доводить зауваження 2.3.

Наступна теорема стосується випадку, коли область D_c у постановці задачі є необмеженою. Як показано в попередній підсекції для задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою на скінченному інтервалі та в роботі [3], розв'язок початкової задачі не може вийти на нескінченність за скінченний час. Проте може необмежено зростати так, що інтеграли в (1.40) та (1.45) стануть розбіжними при всіх допустимих керуваннях. Доведемо теорему, яка гарантує існування оптимального керування в цьому випадку.

Отже, нехай D — область в $[-h, \infty] \times C$, але множина значень керувань W обмежена в R^m. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що W – куля радіуса R.

Теорема 2.5. Якщо виконані умови теореми 2.3 і

$$\gamma < (hR + 1)K, \tag{0.75}$$

то задачі (1.39), (1.40) та (1.39), (1.41) мають розв'язки.

Доведення. Розглянемо в умовах даної теореми задачу (1.39), (1.41). Покажемо спочатку, що множина допустимих керувань U непорожня. Для цього, як в теоремі 2.3., покажемо, що $0 \in U$.

Дійсно, нехай $x(t, o)-$ розв'язок системи (1.39), що відповідає керуванню $u = 0$, а x_t- відповідний елемент з C, $\tau-$ момент його виходу на границю області D.

Для $t \in [0; \tau)$ запишемо інтегральне представлення $x(t, 0)$

$$x(t, 0) = \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x_s)ds. \tag{0.76}$$

Звідси, беручи до уваги (1.44), ми отримаємо:

$$\begin{aligned} &|x(t)| \leq |\varphi_0(0)| + \textstyle\int_0^t K(1 + \|x_s\|_c)ds \leq \\ &\leq |\varphi_0(0)| + K \textstyle\int_0^t \left(1 + \max\limits_{s_1 \in [-h;s]} |x(s_1)|\right) ds. \end{aligned} \tag{0.77}$$

З (1.77) маємо, що

$$\max_{s\in[0;t]}|x(s)| \le |\varphi_0(0)| + K\int_0^t (1+\|x_s\|)\,ds.$$

Оскільки $\max\limits_{s\in[-h;t]}|x(s)| \le \max\limits_{s\in[-h;0]}|\varphi_0(s)| + \max\limits_{s\in[0;t]}|x(s)|$,

то

$$\max_{s\in[-h;t]}|x(s)| \le 2\max_{s\in[-h;0]}|\varphi_0(s)| + Kt + K\int_0^t \max_{s_1\in[-h;s]}|x(s_1)|\,ds$$

а, отже, і

$$\max_{t\in[0;\tau]}\|x_t(0)\|_c \le \left(2\max_{s\in[-h;0]}|\varphi(t)| + Kt\right)c^{Kt}. \tag{0.78}$$

Звідси, використовуючи умову 1) теореми 2.3, ми маємо

$$J(0) = \int_0^\tau e^{-\gamma t}A(t,x_t(0))dt \le \int_0^\tau e^{-\gamma t}K_A\left(1+2\max_{t\in[-h;0]}\varphi_0(t)+Kt\right)e^{Kt}dt < \infty,$$

в силу умови (1.64).

Оскільки критерій якості невід'ємний, то знову існує невід'ємна нижня грань m значень $J[u]$ і нехай $\left\{u^{(n)}(t,\cdot)\right\}-$ мінімізуюча послідовність, така, що

$$J\left(u^{(n)}\right) \to m, n\to\infty. \tag{0.79}$$

Нехай $\left\{x^{(n)}(t)\right\}-$ послідовність розв'язків рівняння (1.39), які відповідають керуванням $u^{(n)}$, а $[-h,\tau_n)-$ максимальний інтервал їх існування, $\left(\tau_n, x^n_{\tau_n}\right)\in\partial D$. Аналогічно до теореми (1.44) знову отримаємо, що послідовність $\left\{u^{(n)}(t,\cdot)\right\}$ слабко компактна в $L_p\left([0;\infty)\times(-h;0]\right)$. При цьому справедлива оцінка (1.46). не втрачаючи загальності, вважатимемо, що сама послідовність $\left\{u^{(n)}(t,\cdot)\right\}$ слабко збіжна до $u^*(t,\cdot)\in L_p\left([0;\infty)\times[-h;0]\right)$. Як і в доведенні теореми 2.3, маємо, що $u^*(t,\cdot)\in U-$ множині допустимих керувань задачі (1.39)-(1.40).

Аналогічно до (1.47) для $x^{(n)}(t)$ маємо інтегральне представлення

$$x^{(n)}(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t\left[f_1(s,x_s) + \int_{-h}^0 f_2(s,x_s,y)u^{(n)}(s,y)dy\right]ds,$$

звідки, врахувавши (1.44) та обмеженість множини V, отримуємо оцінку:

$$\max_{s\in[0;t]}\left|x^{(n)}(s)\right| \leq$$

$$\leq |\varphi_0(0)| + K\int_0^t \left(1+\left\|x_s^{(n)}\right\|_c\right) ds + RK\int_0^t\int_{-h}^0 \left(1+\left\|x_s^{(n)}\right\|_c\right) dy\, ds =$$

$$= |\varphi_0(0)| + Kt + RKth + (hRK+K)\int_0^t \left\|x_s^{(n)}\right\|_c ds,$$

звідки, аналогічно до (1.78), маємо

$$\max_{s\in[-h;t]}\left|x^{(n)}(s)\right| \leq b_1 + b_2 t + (hRK+K)\int_0^t \max_{s_1\in[-h,s]}\left|x^{(n)}(s_1)\right| ds$$

для деяких позитивних констант b_1, b_2. Тоді, використовуючи нерівність Гронуалла, ми отримаємо

$$\max_{s\in[-h;t]}\left|x^{(n)}(s)\right| \leq (b_1+b_2t)\, e^{(hRK+K)t},$$

звідки

$$\max_{s\in[0,t]}\left\|x_s^{(n)}\right\| \leq (b_1+b_2t)\, e^{(hRk+K)t}. \tag{0.80}$$

Звідси маємо, що $x_t^{(n)}$ не досягає нескінченної межі ∂D за скінченний час. Іншими словами, $x_t^{(n)}$ може вийти на нескінченність лише при $t\to\infty$. Останнє дає змогу на довільному відрізку $[0;1]$ розглянути послідовність функцій

$$z^{(n)}(t) = \begin{cases} x^{(n)}(t), t\in[0,\tau_n] \\ x^{(n)}(\tau_n), t\in[\tau_n, T]\,, \end{cases} \tag{0.81}$$

якщо $\tau_n \leq T$, і

$$z^{(n)}(t) = x^{(n)}(t), \tag{0.82}$$

якщо $\tau_n > T$.

Аналогічно до теореми 2.3, ми можемо показати, що послідовність $\left\{z^{(n)}(t)\right\}$ містить підпослідовність, яка поточкові збігається на $[0;\infty]$ до деякої неперервної функції $z^*(t)$, при цьому збіжність рівномірна на кожному скінченному відрізку $[0;T]$.Знову можна вважати, що сама послідовність $\left\{z^{(n)}(t)\right\}$ має цю властивість. Позначимо через τ^*- момент виходу z на ∂D. Покладаючи тепер $x^*(t) = z^*(t)$ при $t \in [0;\tau^*]$, можемо показати (аналогічно до теореми 2.3), що $x^*(t)-$розв'язок рівняння (1.39) що відповідає керуванню $u^*(t,\cdot)$. Доведення оптимальності пари $(u^*(t,\cdot), x^*(t))$ проводиться по тій же схемі, що і в теоремі 2.3. При цьому граничний перехід типу (1.59) можливий в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність, оскільки з оцінки (1.80) і умови лінійного росту для $A(t,\varphi)$ ми маємо

$$e^{-\gamma t}A\left(t, x_t^{(n)}\right) \leq K_A e^{-\gamma t}\left(1 + \|x_t\|_c\right) \leq K_A e^{-\gamma t}\left(b_1 + b_2 t\right) e^{(hRK+K)t}.$$

Величина $K_A e^{-\gamma t}\left(b_1 + b_2 t\right) e^{(hRK+K)t}$ є тепер інтегровною мажорантою, якщо врахувати умову (1.64) теореми. Теорема доведена.

0.4 Застосування отриманих результатів

Як застосування отриманих вище абстрактних результатів, розглянемо деякі часткові випадки задачі (1.4)-(1.5) і ()-() спочатку на скінченному інтервалі.

Приклад 0.1. Якщо $u = u(t)$ і не залежить від y, тоді задача (1.4)-(1.5) зводиться до звичайної задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою.

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t) + g(t, x_t)u(t),\ \ t \in [0, \tau]$$

$$x(t) = \varphi_0(t),\ t \in [-h, 0]$$

$$J[u] = \int_0^\tau L(t, x_t, u(t))dt \ \to \inf,$$

де $g(t, x_t) \in M^{d\times m}$ і $g(t, x_t) = \int_{-h}^0 f_2(t, x_t, y)dy$, $u(t) \in L_p([0, T])$, $u(t) \in \mathcal{U}$.

Приклад 0.2. Рівняння з максимумом.

Ще одним частковим випадок задачі (1.4)-(1.5) є задача оптимального керування системою із максимумом на інтервалі $[-h, T], h > 0$.

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t, \max_{s\in I(t)} x(s)) + f_2(t, x_t, \max_{s\in I(t)} x(s))u(t) \tag{0.83}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0]$$

$$J[u] = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t))dt \ \to \inf, \tag{0.84}$$

де $I(t) = [\beta(t), \alpha(t)]$, $\max x(s) = (\max x_1(s), \ldots, \max x_d(s))$, $\beta(t), \alpha(t)$ – неперервні на $[0, T]$ функції. Такі, що $\beta(t) \le \alpha(t) \le t$ і $\min\limits_{t\in[0,T]}(\beta(t) - t) = -h$, G – область в $\mathbb{R}^d$, $f(t, x, y) : [0, T] \times G \times G \to M^{d\times m}$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $L(t, x, u) : [0, T] \times G \times U \to \mathbb{R}^1$.

Загальна теорія рівнянь із максимумом представлена в монографії [70].

Задача (1.83)-(1.84) зводиться до задачі (1.4)-(1.5) якщо покладемо

$$u(t, y) = u(t) \in L_p([0, T]),$$

$$\tilde{f}_1(t, \varphi) = f_1(t, \varphi(0), \max_{\theta\in[\beta(t)-t,\alpha(t)-t]} \varphi(\theta)),$$

$$\tilde{f}_2(t, \varphi) = \int_{-h}^0 f_2(t, \varphi(0), \max_{\theta\in[\beta(t)-t,\alpha(t)-t]} \varphi(\theta), s)ds.$$

Нехай виконуються наступні умови:

2.3.A. Функції $f_1(t, x, y)$ і $f_2(t, x, y, s)$ визначені і вимірні за всіма їх аргументами в області $Q = \{t \in [0, T], x \in G, y \in G\}$, і $Q_1 = \{t \in [0, T], x \in G, y \in G, s \in [-h, 0]\}$

і задовольняють за змінними x, y умову лінійного росту і умову Ліпшиця з константою $K > 0$ в цих областях, тобто

$$|f_1(t,x,y)| + \|f_2(t,x,y,s)\| \leq K(1+|x|+|y|) \tag{0.85}$$

$$|f_1(t,x,y) - f_1(t,x_1,y_1)| + \|f_2(t,x,y,s) - f_2(t,x_1,y_1,s)\| \leq$$
$$\leq K\left(|x_0 - x_1| + |y - y_1|\right) \tag{0.86}$$

для всіх $t \in [0,T]$, $x, y, x_1, y_1 \in Q$ $s \in [-h, 0]$.

2.3.B.

1) Функція $L(t,x,y) : [0,T] \times G \times U \to \mathbb{R}^1$ визначена і неперервна за всіма своїми аргументами і задовольняє умову Ліпшиця за змінною x;

2) частинна похідна L_u є неперервною в області визначення і для деяких сталих $C_0 > 0,\ \alpha > 0$ задовольняє оцінку:

$$\|L_u(t,x,u)\| \leq C_0(1 + |x|^\alpha + |u|^{p-1});$$

3) існує константа $C_1 > 0$ така, що

$$L(t,x,u) \geq C_1 \left|u\right|^p, p > 1;$$

4) функція $L(t,x,u)$ опукла за u для кожного фіксованого $t \in [0,T],\ x \in G$.

Задача оптимального керування (1.83)-(1.84) може бути записана в наступному вигляді:

$$\dot{x}(\theta) = f_1(t, x_t), \max_{\theta \in I(t)} x(t)) + \int_{-h}^{0} f_2(t, x(t)) \max_{\theta \in I(t)} x_t, s) ds\, u(t) \tag{0.87}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0]$$

$I(t) = [\beta(t) - t, \alpha(t) - t]$

$$I(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t)) dt \to \inf. \tag{0.88}$$

Тоді всі умови 2.1-2.3 виконуються.

При цьому область $D \subset [-h, T] \times C$ є множиною $\{(t, \varphi) : t \in [-h, T], \varphi \in \Omega$, де Ω – множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\varphi(\theta) \in G$ для $\theta \in [-h, 0]$, $\partial\Omega$ – це множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\varphi(\theta) \in \bar{G}$, і для кожної такої функції існує точка $\theta \in [-h, 0]$ така, що $\varphi(\theta) \in \partial G$. Очевидно, що множина $[0, T] \times \Omega = D$ відкрита і $\partial D = ([0, T] \times \partial\Omega) \cup (\{T\} \times \bar{\Omega})$ замкнена.

Перевіримо умови 2.1-2.3. Дійсно, в силу 4.А ми маємо

$$\left|\tilde{f}_1(t, \varphi)\right| = \left|f_1(t, \varphi(0), \max_{\theta \in [\beta(t)-t, \alpha(t)-t]} \varphi(\theta))\right| \leq$$

$$\leq K\left(1 + |\varphi(0)| + \left|\max_{\theta \in [\beta(t)-t, \alpha(t)-t]} \varphi(\theta)\right|\right) \leq K\left(1 + \|\varphi\|_C + \|\varphi\|_C\right)$$

і для $\tilde{f}_1(t, \varphi)$ умова (1.6) виконується. Для $\tilde{f}_2(t, \varphi)$ ситуація аналогічна. Далі

$$\left|\tilde{f}_1(t, \varphi) - \tilde{f}_1(t, \varphi_1)\right| \leq$$

$$\leq K\left(|\varphi(0) - \varphi_1(0)| + \left|\max_{\theta \in [\beta(t)]-t, \alpha(t)-t]} \varphi(\theta) - \max_{\theta \in [\beta(t)-t, \alpha(t)-t]} \varphi_1(\theta)\right|\right) \leq$$

$$\leq K\left(\|(\varphi - \varphi_1\|_C + \left|\max_{\theta \in [\beta(t)-t, \alpha(t)-t]} |\varphi(\theta) - \varphi_1(\theta)|\right|\right) \leq 2K\|\varphi - \varphi_1\|_C,$$

отже, умова (1.7) виконується.

Тепер, враховуючи, що L є скінченно-вимірним відображенням за u, похідна Фреше L_u співпадає з матрицею Якобі $\frac{\partial L}{\partial u}$, а норма $\|L_u\|_{L_q} = \|L_u\|$. Тому для задачі (1.83) і (1.84), коли умови 4.А і 4.Б виконуються, теорема 2.1 і 2.2 справедливі.

Також ці системи можна розглядати на інтервалі $(-h; \infty]$ Додатково вимагатимемо, щоб $\beta(t), \alpha(t)$ були неперервні на $[0; \infty)$ функції, $\beta(t) \leq \alpha(t) \leq t$ і $\inf\limits_{t \geq 0} (\beta(t) - t) = -h$.

Тоді задача (**??**), (**??**) зводиться до задачі (1.39), (1.40), якщо ми покладемо $u(t,y) = u(t) \in L_p([0;\infty))$, і відображення A і B задані в областях $\{t \geq 0, x \in G\}, \{t \geq 0, U\}$ відповідно, область $G \in \mathbb{R}^d$, замкнена, опукла множина $U \in \mathbb{R}^m$.

Оцінки

$a_1 |z|^p \geq B(t,z) \geq a |z|^p$ при $t \geq 0$

та припущення про неперервність частинних похідних $\frac{\partial B}{\partial u}$ з оцінкою

$$\|B_u\| \leq a_3 |z|^{p-1}$$

гарантують виконання умов 2), 3) із 2.3. В ролі множини $D \subset [-h;\infty) \times C$ обирається множина $\{(t,\varphi) : t \in [-h;\infty), \varphi \in \Omega\}$, де $\Omega-$ множина функцій $\varphi \in C$, така, що $\varphi(\theta) \in G$ при $\theta \in [-h;0]$.

$\partial\Omega-$ множина функцій $\varphi \in C$ таких, що $\varphi(\theta) \in \bar{G}$, причому для кожної такої функції існує точка $\theta \in [-h;0]$ така, що $\varphi(\theta) \in \partial G$.

Список використаних джерел

Література

1. М.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматулина. "Ведение в теорию функционально-дифференциальных уравнений М., Наука, 1991

2. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.

3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

4. Самойленко А.М., Мустафаев Х.З. О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – К.: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 104 – 107.

5. Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 160 с.

6. Хапаев М.М. О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 11, № 5. – С. 600 – 608.

7. Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pyres et appl. Acad. RpR. – 1959. – Vol. 4, № 3. – P. 467 – 483.

8. Фодчук В.И. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. Мат. Журн. – 1964. – Т. 16, № 2. – С. 273 – 279.

9. Фодчук В.И. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром // Укр. мат. журн. – 1962. – Т. 14, № 4. – С. 435 – 440.

10. D. D. Bainov, S. G. Hristova, Differential equations with maxima, CRC Press Tylor and Francis Group, (2011) 291.

11. Plotnikov V.A., Kichmarenko O.D., A note on the averaging method for differential equations with maxima // Iranian Journal of optimization. – 2009. – V.1, № 2. – P. 132-140.

12. Kichmarenko O.D., Sapozhnikova K.Yu. Full averaging scheme for differential equation with maximum. // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. 2015. – Vol. 3, Iss. 1. P. 113-122.

13. S.Dashkovskiy, S.Hristova, O.Kichmarenko, K.Sapozhnikova Behavior of the solution to the systems with maximum *Proceedings: of 20th IFAC World Congress*, pages 13467-13472, 2017.

14. J. Hale. *Introduction to the functional differential equations.* Springer, 1966.

15. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Averaging in infinite dimensions, J. Integral Equations Appl. 2 (1990), No. 4, 463-494.

16. B.Lehman, S.Weibel Fundamental theorems of averaging for functional differential equations. *J.Differ.Equ.*, 152, pages 160-190, 1999.

17. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: На-ука, 1981. – 400 с.

18. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.

19. Застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями / Кравець В.І., Ковальчук Т.В., Могильова В.В., Станжицький О.М. //Укр. мат. журн. – 2018. - Т.70, № 2. – С. 205–214.

20. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М., Наука, гл ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. - 85 с.

21. Aumann R.J. Integrals of Set-Valued Functions // J. Math. Analysis and Applic. – 1965. – Vol. 12, № 1. – P. 1 – 12.

22. Benjamin C. KuoDigital Control Systems (2nd ed.) – Oxford University Press, 1995. – 784 p.

23. G. D'Antona, A. Ferrero Digital Signal Processing for Measurement Systems: Theory and Applications. – Springer, 2006. – 268 p.

24. Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений // Украинский математический журнал. 1996. Т. 48, № 4. С. 464 – 475.

25. V. A. Plotnikov, L. I. Plotnikova, A. T. Yarovoi Averaging method for discrete systems and its application to control problems // Nonlinear Oscillations.– 2004.– V.7, Iss. 2.– P. 240 – 253.

26. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием // Научный вестник Ужгородского университета. Математика и информатика. 2012. Вып. 23, № 2. С. 76 – 85.

27. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени. // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. 2012. Т.17, вып. 1–2. С. 54 – 69.

28. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах управления // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ–2014: Труды. [Электр. ресурс] М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. С. 1304–1316.

29. Плотников В.А. Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложения к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15, № 8. - С. 1427 - 1433.

30. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. - Одесса: Астропринт, 1999. - 356 с.].

31. Кічмаренко О.Д. Схеми повного усереднення в задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою //Нелінійні коливання. – 2018. - Т.21, № 3. – С. 358–367.

32. Кічмаренко О.Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-диференціальних систем. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Математика та інформатика. - 2018. - Т. ?? – С. ??–??.

33. Белан Е.Л. (1967). О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений. *Украинский математический журнал,* 19(3), 85–90.

34. Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г. (1996). Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений. *Украинский математический журнал,* 48(4), 464 – 475.

35. Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т. (2004). Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. *Нелинейные колебания,* 7(2), 241 – 254.

36. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. (2016). Общая схема усреднения систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием. *Нелинейные колебания,* 19(3), 376 – 389.

37. Плотніков В.О., Кічмаренко О. Д. (2002). Усереднення диференціальних рівнянь з максимумом. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика,* 78–82.

38. Апарцин А.С. (1999). *Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы.* Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние.

39. Боголюбов Н.Н., О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1945.

40. Самойленко А.М., Перестюк Н. А. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, No. 11. – С. 2001-2010.

41. G. Hale, Theory of functional-differential equations, – New-York: Springer-Verlag, 1977, **doi:** 10.1007/978-1-4612-9892-2.

42. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальних систем – М.: Наука, 1975. – 528 с.

43. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики – М.: Наука, 1981. – 400 с.

44. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах оптимального управления – Киев – Одесса: Лыбедь, 1992. – 188 с.

45. Носенко Т.В., Станжицький О.М. Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, No.4. – С. 512–519.

46. Kichmarenko O. D. Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // Journal of Pure and Applied Mathematics/ 2017. – **115**, No. 1. – P. 93–114, **doi**: 10.12732/ijpam.v115i1.8.

47. Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале // Диффер. уравнения. – 2006. – **42**, No 4. – С. 476–482.

48. Станжицкий А.Н., Добродзий Т.В. Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Диффер. уравнения. – 2011. – **47**, No 2. – С. 264–277.

49. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 688 с.

50. Ли Е.Б. и Маркус Л., Основы теории оптимального управления. – Krieger Pub Co, 1986.

51. Yosida K., Functional analysis. – Berlin- New-York:Springer-Verlag, 1980.

52. V. Gaitsgory, Averaging and near viability of singularly perturbed control systems, *Journal of Convex Analysis*, **2**, No. 13 (2006), 329-352.

53. V.A.Plotnikov, A.V. Plotnikov, A.N.Vityuk, *Differential Equations with a Multi-valued Right-Hand Side: Asymptotic Methods*, Odessa, Astroprint (1999) (in Russian).

54. G. Gramer, Averaging of multivalued differential equations, *Int. J. Math. Math. Sci*, **25**, (2003), 1015-1022.

55. T. Donchev, A. Donchev, Singular perturbations in infinite-dimensional control systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **5**, No. 42 (2003), 1795-1812, **doi:** 10.1137/S0363012902416080.

56. M. Nikol'skii, An optimal control problem with a small parameter, *Cybernetics and System Analysis*, **3**, No. 38 (2002), 439-443, **doi:** 10.1023/B:JOTH.0000023089.90150.78.

57. M.A.Krasnosel'skii, S.G. Krein, On the principle of averaging in nonlinear mechanics, *Usp.Mat.Nauk*, **3**, No. 65 (1955), 147-152 (in Russian).

58. A.N.Filatov, L.V.Sharova, *Integral Inequalities and theory of nonlinear Oscillations*, Moskow: Nauka (1976) (in Russian).

59. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. *Control of systems with after-effect.* **157**, Amer. Math. Society., Providence, 1992.

60. Angell, T.S. Existence theorems for optimal control problems involving functional differential equations. *Journ. of Optimiz. Theory and Applic.* **7** (3) (1971) 149–169.

61. Filippov, A.F. On certain questions in the theory of optimal control. *SIAM. Journal on Control* **1** (1) (1962) 76–84.

62. Cesari, L. Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints I and II. *Transactions of the American Math. Society* **124** (3) (1966) 369–430.

63. Banks, H.T. and Keut, G.A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in functional space *SIAM. Journ on Control* **10** (4) (1972) 567–593.

64. Guo-Ping, C., Jin-Zhi, H. and Simon, X. Y. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures* **81** (15) (2003) 1539 – 1546.

65. Carlier, G. and Taharoni, R. On some optimal control problems governed by a state equation with memory. *ESIAM Control, Optimization and Calculus of Variations* **14** (4) (2008) 725–743.

66. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi, F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints I: regularity of viscosity solutions. *SIAM. Journ. on Control and Optimiz* **48** (8) (2010) 4910–4937.

67. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi,F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints II: Verification and

optimal Feedbacks. *SIAM Journ. on Control and Optimiz.* **49** (6) (2011) 2378-–2414.

68. Hale, G. *Theory of functional-differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977.

69. Yosida, K. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.

70. Bainov, D.D. and Hristova, S.G. *Differential Equations with Maxima.* CRS Press Tylor and Francis Group, 2011.

71. Lavrova, O., Mogylova, V., Stanzhytskyi, O. and Misiats O. Approximation of the Optimal Control Problem on an Interval with a Family of Optimization Problems on Time Scales. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **17** (3) (2017) 303-–314.

72. Martynyuk, A.A. Analysis of a Set of Trajectories of Generalized Standard Systems: Averaging Technique. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **17** (1) (2017) 29-–41.

73. Kamaljeet and Bahuguna, D. Extremal Mild Solutions for Nonlocal Semilinear Differential Equations with Finite Delay in an Ordered Banach Space. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **16** (3) (2016) 300-–311.

74. Bryson, A.E., Ho, Y.C. *Applied optimal control:optimization, estimation, and control.* Waltham, MA: Blaisdell, 1969.

75. Beltrami, E.J. *An algorithmic approach to nonlinear analysis and optimization.* Math in Sci. and Engr., 63, Academic Press, 1970.

76. Hale, G. *Theory of functional-differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977. DOI 10.1007/978-1-4615-9968-5

77. T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1966. DOI 10.1007/978-3-642-66282-9

78. Kichmarenko, O., Stanzhytsky, O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **18** (2) (2018) 196-–211.

79. Yosida, K. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980. DOI 10.1007/978-3-642-61859-8

80. Alekseev,V., Tikhomirov, V. and Fomin, S. *Optimal control.* Moscow, Science, Russia, 1979 (in Russian). DOI 10.1007/978-1-4615-7551-1

81. Asea, P.K., Zak, P.J. Time-to-build and cycles. *Journal of Economic Dynamics and Control* **23** (2) (1999) 1155-–1175. DOI: 10.3386/t0211

82. Bambi, M. Endogenous growth and time to build: the AK case *Journal of Economic Dynamics and Control* **32** (2008) 1015-–1040. DOI 10.1.1.582.8187

83. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. *Control of systems with after-effect.* **157**, Amer. Math. Society., Providence, 1992.

84. Angell, T.S. Existence theorems for optimal control problems involving functional differential equations. *Journ. of Optimiz. Theory and Applic.* **7** (3) (1971) 149–169. DOI: 10.1007/BF00932473

85. Guo-Ping, C., Jin-Zhi, H. and Simon, X. Y. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures* **81** (15) (2003) 1539 – 1546. DOI: 10.1016/S0045-7949(03)00146-9

86. Carlier, G. and Taharoni, R. On some optimal control problems governed by a state equation with memory. *ESIAM Control, Optimization and Calculus of Variations* **14** (4) (2008) 725–743. DOI:10.1051/cocv:2008005

87. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi, F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints I: regularity of viscosity solutions. *SIAM. Journ. on Control and Optimiz* **48** (8) (2010) 4910–4937. Doi:10.1137/09076742X

88. R.P.Agarwal, S.R.Grace, I.Kiguradze, D.O'Regan Oscillation of functional differential equations *Mathematical and Computer Modelling* **41** (4-5) (2005) 417–461. DOI: 10.1016/j.mcm.2004.06.018

89. S.Dashkovskiy, M.Kosmykov, A.Mironchenko, L.Naujok Stability of interconnected impulsive systems with and without time delays, using Lyapunov methods *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **6** (3) (2012) 899–915. DOI:10.1016/j.nahs.2012.02.001

90. A.Ashyralyev, D.Agirseven, B.Ceylan Bounded Solutions of Delay Nonlinear Evolutionary Equations *Journal of Computational and Applied Mathematics* **318** (2016) 69–78. DOI: 10.1016/j.cam.2016.11.046

91. А.Ф. Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования Вестник МГУ, сер. 1. Математика, механика, 1959, №2, 25–32