МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНІКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язування задач з математичного аналізу на тему: "Застосування визначеного інтеграла"

Одеса
2023

Складачі: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Лисенко З.М
кандидат фіз.-мат. наук, Шанін Р.В

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, професор Стороженко Е.О;
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кореновський А.О.

Методичні вказівки складаються з п'яти параграфів: обчислення площі плоской фігури, довжини дуги, об'єму тіла обертання, площі поверхні обертання, а також визначення статичних моментів і кооржинат центра маси.

В кожному параграфі приводиться необхідний теоретичний матеріал. Типові задаці даються з докладними поясненням. Наприкінці містяться завдання для самостійного розвьязання.

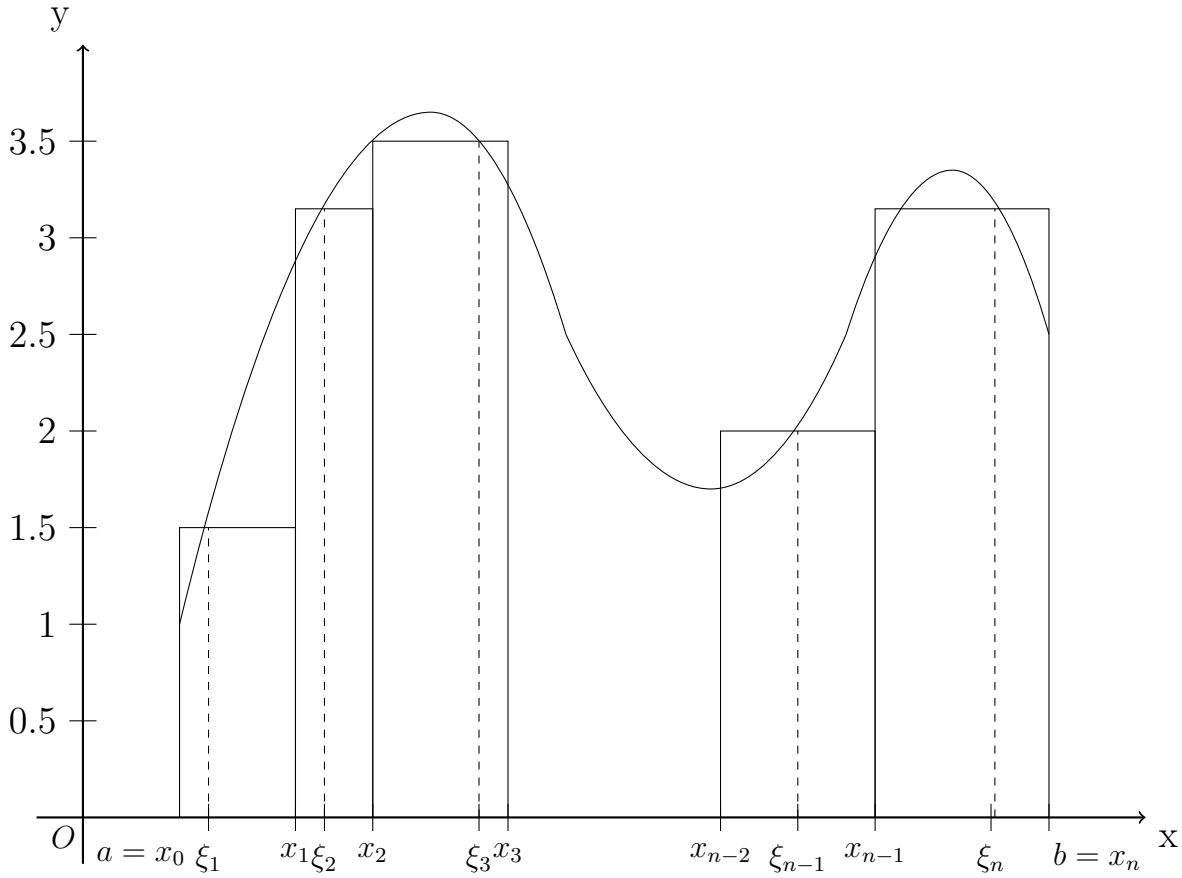
Вказівки призначаються для студентів I курсу прикладного відділення для підготовки до модуля за темою "Інтеграл Рімана"

Автори висловлюють щиру подяку Кучерук Л.Г за кропітку роботу в розробці цих методичних вказівок.

1 Обчислення площ плоских областей

Нехай функція f неперервна на відрізку $\Delta = [a; b]$ і ;$f(x) \geq 0$,$x \in \Delta$.

Розглянемо фігуру G (мал. 1), обмежену відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і графіком функції $y = f(x)$, тобто $G = \{(x,y)|a \leq x \leq b,0 \leq y \leq f(x)\}$



Мал. 1

Фігура G називають криволінійною трапецією, а відрізок Δ - її основою. Треба знайти площу криволінійної трапеції G.

Розіб‘ємо відрізок Δ на n частин точками x_i $(i = \overline{1,n-1})$, де $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1}$, і проведемо через ці точки прямі, паралльні осі Oy. Тоді G розіб‘ється на n "маленьких" криволінійних трапецій. Покладемо:

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,$x_0 = a, x_n = b$ і нехай $\xi_i \in \Delta_i$, де $\Delta_i = [x_{i-1},x_i]$ $i = \overline{1,n}$. Тоді сума

$$\sigma_T(\xi, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $T = \{x_i\}_{i=1}^n$ - розбиття відрізку $[a;b]$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ -набір проміжних точок, дорівнює площі ступінчастої фігури (мал. 1), складеної із n прямокутників, причому основою i-го прямокутника буде відрізок Δ_i, а довжина його висоти дорівнює $f(\xi_i)$

Інтуїтивно зрозуміло, що ця ступінчаста фігура буде мало візрізнятися від початкової фігури G при достатньо дрібному розбитті.

Будемо збільшувати число точок розбиття так, щоб найбільша із довжин візрізків Δ_i прямувала до нуля. Якщо при цьому сума σ буде мати границю S, не залежну від способу розбиття відрізка Δ, ні від вибору точок ξ_i, то природно вважати, що площа фігури G дорівнює S.

Що ж розуміти під площею криволінійної трапеції G?

Для кожного відрізка Δ_k розглянемо криволінійну трапецію

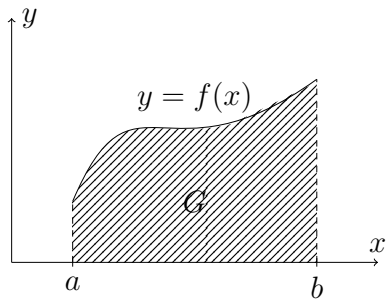
$G_k = \{(x,y)|\ x \in \Delta_k, 0 \leq y \leq f(x)\}$, а також вписаний у G_k і описаний навколо G_k прямокутники з основою Δ_k і висотами $m_k = \min_{x\in\Delta_k} f(x)$, $M_k = \max_{x\in\Delta_k} f(x)$ відповідно ($k = \overline{1,n}$). Сумарна площа усіх вписаних прямокутників дорівнює s_T, а описаних - S_T.

Означення. Величина $\underline{I} = \sup_T S_T$ називається внутрішньою площею криволінійної трапеції G, а величина $\overline{I} = \inf_T S_T$ - зовнішньою площею. Якщо для G має місце рівність $\underline{I} = \overline{I}$, то трапеція G називається квадровною (така, що має площу), а число $I = \underline{I} = \overline{I}$- площею криволінійної трапеції G.

Зауваження 1. Згідно з означенням s_T і S_T- нижня і верхня суми Дарбу, $\underline{I}$ і $\overline{I}$- нижній та верхній інтеграли Дарбу відповідно.

Теорема. Якщо функція f неперервна на відрізку $\Delta = [a;b]$ і $f(x) \geq 0$, $x \in \Delta$, то криволінійна трапеція G (мал. 2) квадровна і її площа S обчислюється за формулою :

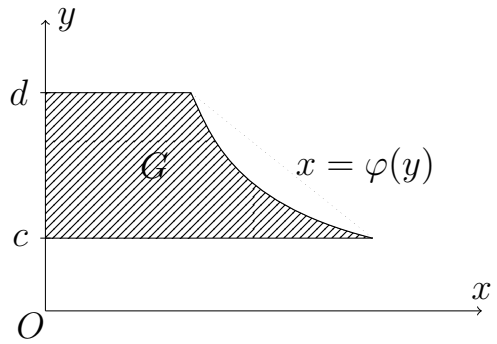
$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$



Мал. 2

Зауваження 2. 1) Якщо $G = \{(x,y)|\ c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq \varphi(y)\}$ (див. мал. 3),φ-неперервна на відрізку $[c; d]$, то площа фігури G дорівнює:

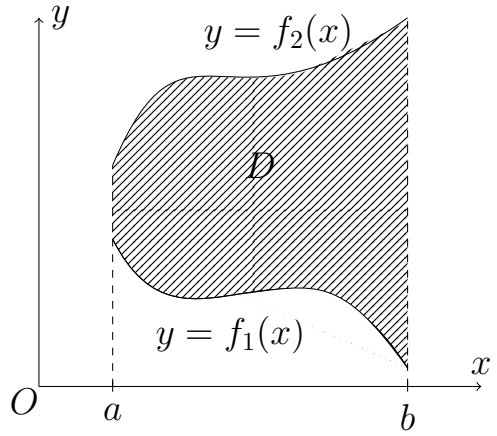
$$S = \int_c^d \varphi(y)dy \tag{2}$$



Мал. 3

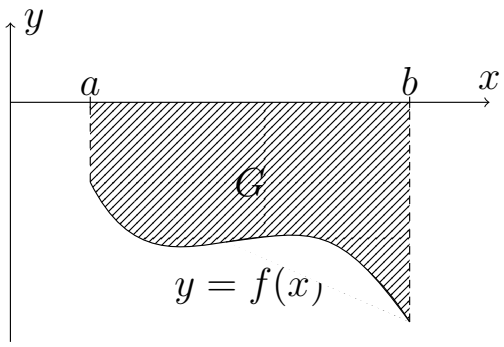
2)У загальному випадку, коли $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, 0 \leq f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ ш функції f_1, f_2 неперервні на відрізку $[a; b]$ (мал. 4), то площа S фігури D виражається формулою:

$$S = \int_c^d (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{3}$$



Мал. 4

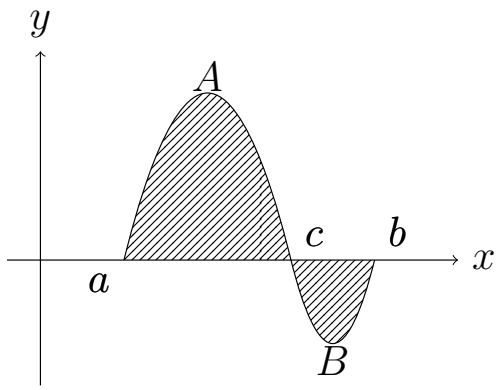
3) Може трапитися так, що $f(x) < 0$ для будь-яких $x \in [a; b]$. Тоді крива $y = f(x)$ розміщена під віссю Ox (мал. 5). У цьому випадку природно за площу S фігури D взяти додетне число: $S = -\int_a^b f(x)dx$



Мал. 5

Якщо $f(x) : \begin{cases} \geq 0, x \in [a; c] \\ \leq 0, x \in [c, b] \end{cases}$ і f неперервна на відрізку $[a; b]$, то площа S фігури $aABb$ (мал. 6) дорівнює:

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \tag{4}$$



Мал. 6

<u>Наслідок.</u> 1) Нехай крива, що обмежує криволінійну трапецію зверху, задана параметричними рівняннями:

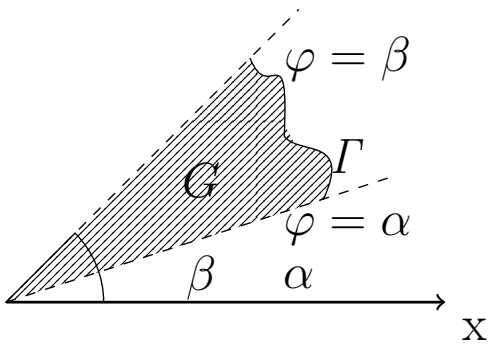
$$f(x) = \begin{cases} x = \varphi(t), \alpha \leq t \leq \beta \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де похідні $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$. Тоді площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\,\varphi'(t)dt \tag{5}$$

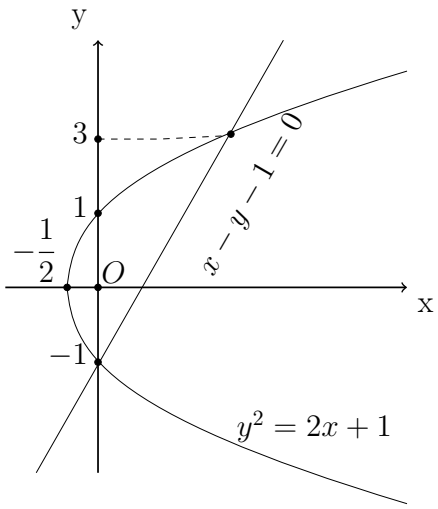
2) Нехай крива Γ задана у полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, де $\rho(\varphi) \ge 0$ і ρ - неперервна функція на відрізку $[\alpha;\beta]$. Плоску фігуру $G = \{(r;\varphi) : 0 \le r \le \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\}$ назвемо криволінійним сектором (мал. 7). Тоді площа S сектору G обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi \tag{6}$$



Мал. 7

Приклад 1.Визначити площу фігури, обмежену параболою $y^2 = 2x + 1$ і прямою $x - y - 1 = 0$



Мал. 8

Розв‘язання. Таким чином, фігура має вид параболічного сегменту. (мал. 8) Знайдемо ординати точок перетину параболи з прямою, розв‘язаши систему рівнянь: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}$

Отримаємо наступні розв‘зки: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

Таким чином y_1 = -1 і y_2=3 будуть межами інтегрування. Якщо покласти $x_1(y) = \dfrac{y^2 - 1}{2}$,
$x_2(y) = y + 1$, то, враховуючи, що $x_2(y) >= x_1(y)$, коли $y \in [-1; 3]$, за формулою 2 отримаємо:

$$S = \int_{-1}^{3} [x_2(y) - x_1(y)]dy = \int_{-1}^{3} [y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}]dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} (3 + 2y - y^2)dy = \frac{1}{2}(3y + y^2 - \frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{3} =$$
$$= \frac{1}{2}[(9 + 9 - 9) - (-3 + 1 + \frac{1}{3})] = \frac{16}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмежену кривою $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

Розв‘язання. З рівняння кривої випливає, що $|x| \geq 1$. Зрозуміло, що крива повинна бути замкненою, інакше задача буде не коректною. Проаналізуємо рівняння кривої. Якщо точка $(x; y)$ належить кривій, то точки $(x; -y)$ і $(-x; y)$ теж належать заданій кривій. звідси робимо висновок: крива симетрична відносно осей Ox і Oy. Тому достатньо збудувати задану криву в одному з квадрантів, наприклад, у першому квадранті, де $x \geq 0$, $y \geq 0$. Тоді таку криву можна задати рівнянням: $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.

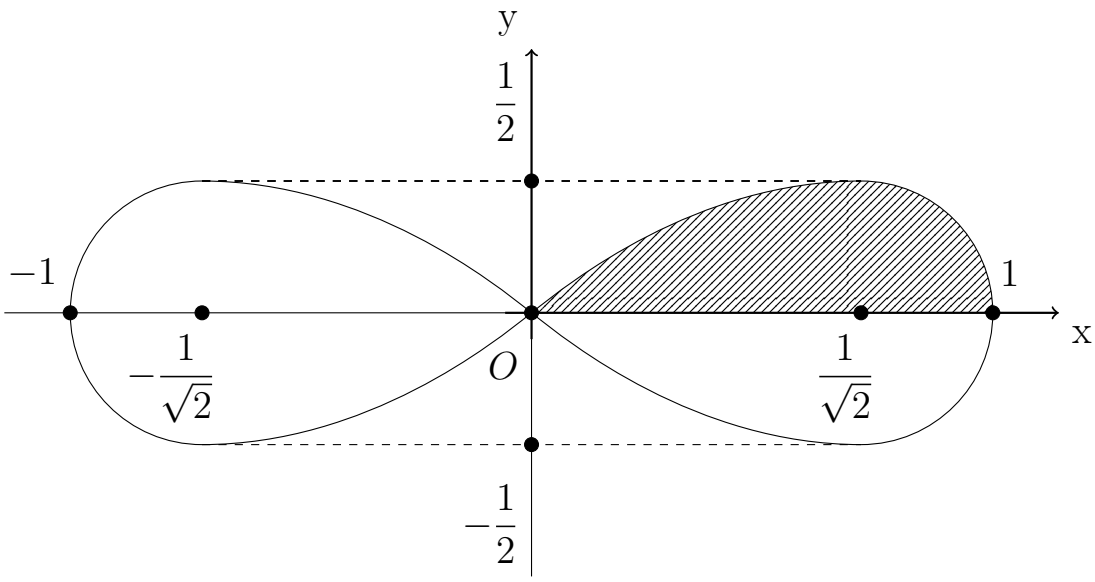
Оскільки $y' = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$, то $y' > 0$, коли $x \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ і $y' < 0$, коли $x \in (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1)$. Таким чином, $y' = x\sqrt{1 - x^2}$, зростає при $x \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ і спадає при $x \in (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1)$. Отже $y_{max} = y(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{2}$. Оскільки $y^n = \dfrac{2x(x^2 - 1{,}5)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} < 0$ при $x \in (0; 1)$, то функція $y(x)$ опукла уверх. Тепер збудуємо графік функції $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, а потім і усієї кривої (мал.9)

За формулою 1 :

$$\frac{1}{4}S = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{array}{cc} x = sin\phi & x = 0 \to \psi = 0 \\ dx = cos\phi d\phi & x = 1 \to \phi = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_2^{\frac{\pi}{2}} sin\psi cos^2\psi d\psi = -\int_2^{\frac{\pi}{2}} cos^2\psi dcos\psi = -\frac{cos^3\psi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

Звідси $S = \frac{4}{3}$.



Мал. 9

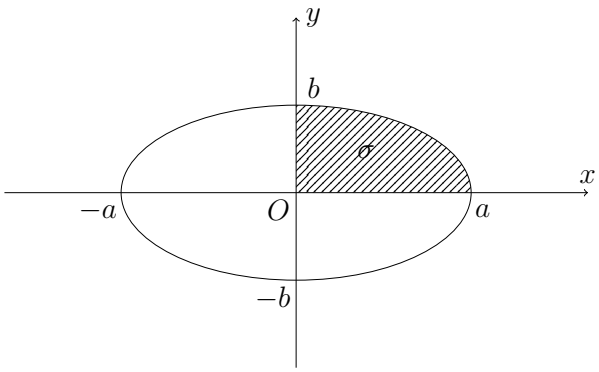
Зауваження 3. Щоб знайти площу плоскої фігури, треба мати вигляд цієї фігури, тобто треба вміти намалювати лінії, які обмежують цю фігуру. Іноді ці лінії легко намалювати (приклад 1), іноді складніше (приклад 2). Але в будь-якому випадку малюнок допомагає знайти межі інтегрування.

Зауваження 4. Рекомендується аналізувати фігуру на симетричність відносно осей Ox, Oy (приклад 2), або якихось інших осей. Це спрощує шукання площі фігури.

Приклад 3. Обчислити фігури, обмежені еліпсом (мал.10)

Розв'язання. Розглянемо параметричне рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \text{ Тоді } S = 4\sigma;$$



Мал. 10

де σ - площа криволінійної трапеції Oba (мал. 10). Покладемо $\varphi(t) = a\cos t$,$\psi(t) = b\sin t$. Тепер знайдемо межі зміни параметру t. Криволінійна трапеція Oba має основу відрізок [0;a], тобто x змінюється від 0 до a. Але рівняння $0 = x = a\cos t$ дає $t = 2$, а рівняння $a = x = a\cos t$ дає $t = 0$. Таким чином, коли x змінюється від 0 до a, параметр t змінюється від $\dfrac{\pi}{2}$ до 0. Тоді за формулою 5:

$$\sigma = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \psi(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (b\sin t)(-a\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt =$$
$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2t}{2}dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Звідси $S = \pi ab$ (якщо $a = b = R$, то маємо площу круга πR^2).

Зауваження 5. Площу Oba (мал.10) можна було би знайти,користуючись рівнянням еліпсу в декартовій системі координат: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Оскільки дуга ba еліпса має рівняння $y = \sqrt[b]{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, то за формулою 1:

$$\sigma = \int_0^b \sqrt[b]{1} - \frac{x^2}{a^2}dx = \begin{bmatrix} x = a\sin t & x = 0 \to t = o \\ dx = a\cos tdt & x = a \to t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[b]{1-\sin^2 t} \quad a\cos tdt = ab\int_0^{\frac{\pi}{0}} \cos^2 tdt =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi ab}{4}$$

Як бачимо, відшукання площі σ у цьому випадку трохи складніше, ніж у випадку параметричного завдання еліпса. Таким чином,

площу однієї і тієї ж фігури можна обчислювати за різними формулами(дивись нижче також приклади 4, 7), Ясно, що вибір формули визачасться двома моментами:

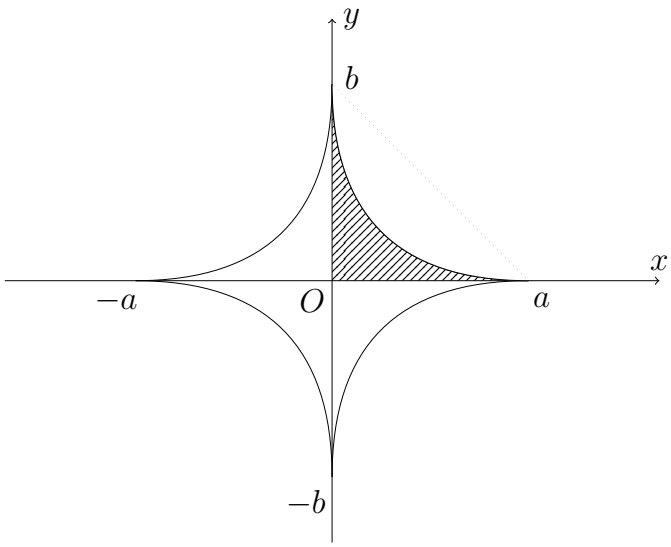
1) найбільш простим збудуванням графіків ліній обмежуючих фігуру;

2) найбільши простим визначеним інтегралом, який фігурус у форму.

Приклад 4. Знайти площу фігури, обмежену кривою (астроїдою).

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, a > 0$$

Розв'язання. Ясно, що крива повинна бути замкненою. Оскільки $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 0$,то$|x| \geq a$. Ясно також, що коли x зростає, y спадає і навпаки. Якщо точка $(x; y)$ належить кривій, то точки $(x, -y)$ і $(-x, y)$ пакож належать кривій. Таким чином, крива симетрична відносно осей Ox і Oy. Тому достатньо знайти чверть площі даної фігури, яка лежить у першому квадранті $(x \geq 0, y \geq 0)$. Якщо тепер у виразити через x і спробувати знайти площу за формулою 1, то ми отримаємо достатно складний інтеграл. Задача значно спрощується, якщо криву задати у параметричній формі: $\begin{cases} x = a\sin^3 t \equiv \varphi(t) \\ y = a\cos^3 t \equiv \psi(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$



Мал. 11

Розглянемо перший квадрант: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$. Якщо $0 = x = a\sin^3 t$,то$t = 0$, якщо $a = x = a\sin 3t$,$t = \frac{\pi}{2}$. Отже, коли x змінюється

від 0 до a, параметр t змінюється від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ (мал. 2). Тоді за формулою 5:

$$\frac{1}{4}S\int_0^{\frac{pi}{2}}\psi(t)\varphi(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)dt =$$
$$= 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 tdt = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\cdot\frac{sin^2 2t}{4}dt =$$
$$= \frac{3}{8}ab\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2td(\sin 2t)\right) =$$
$$= \frac{3}{8}ab\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$
$$= \frac{3}{16}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt = \frac{3ab\pi}{32}.$$

Отже, площа даної фігури дорівнює $\dfrac{3\pi ab}{8}$.