1 Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла Рімана.

1. Задача про обчислення маси лінійного стержня за відомою густиною.

Нехай маємо прямолінійний стержень $[a;b]$, густина якого змінюється від точки a до точки b і є відомою неперервною функцією

$$\rho = \rho(x), a \leq x \leq b.$$

Якби густина була сталою $\rho = \text{const}$ (тобто тіло було б однорідним), то маса m такого стержня, як відомо, дорівнювала би добутку густини на довжину стержня. У цьому разі $m = \rho(b-a)$.

Якщо ρ не є сталою, то за попередньою формулою вже не можна обчислити масу стержня. Тому розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками $a = x_0 < x_1 < \dot{<} x_n = b$. Виберемо довліьну точку $\xi \in [x_{i-1}; x_i], i = \overline{1,n}$. Тоді маса відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ приблизно дорівнює $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, а маса усього стрежня

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$$

Отже, природньо взяти за точне значення маси границю $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$, $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти масу лінійного стрежня $[0;1]$, густина якого є функція $\rho(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1$.

<u>Розв'язок</u>. Для неперервної функції $\rho(x) = e^x$ границя суми σ не залежить від розбиття відрізку $[0;1]$ і вибору точок ξ_i (див. §4). Тому розіб'ємо відрізок $[0;1]$ на n рівних частин точками

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dot{<} x_k = \frac{k}{n} < \dot{<} x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Довжина кожного відрізку $\Delta_k = [x_{k-1}; x_k]$ дорівнює $\Delta x_k = \frac{1}{n}(k = \overline{1,n})$. Покладемо $\xi_k = x_{k-1}$, тобто ξ_k - лівий кінець відрізку $\Delta_k(k = \overline{1,n})$. Це означає, що густина відрізку Δ_k вважається рівною $\rho(\xi_k) = \rho(x_{k-1}) = e^{\frac{k-1}{n}}$, звідки маса його (приблизно) дорівнює $e^{\frac{k-1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$. Отже маса усього стержня (теж приблизно) обчислюється за формулою

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dot{+} e^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Оскільки $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ (сума n членів геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{\frac{1}{n}}$ і першим членом $a_0 = 1$), то $\sigma = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$. Враховуючи, що $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$, отримуємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma = e - 1$.

Отже шукана густина дорівнює $e - 1$.

2. Задача про площу криволінійної трапеції.

Нехай функція f неперервна на відрізку $\Delta = [a; b]$ і $f(x) \geq 0$, $x \in \Delta$. Розглянемо фігуру G (мал. 1), обмежену відрізками прямих $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x)$, тобто $G = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Фігуру G називають криволінійною трапецією, а відрізок Δ - її основою. Треба знайти площу криволінійної трапеції G.

Зауваження. Ми не будемо зупинятися на докладному обміркованні поняття площі фігури, про яку річ буде пізніше.

Розіб'ємо відрізок Δ на n частин точками x_i $(i = \overline{1,n-1})$, де $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1}$, і проведемо через ці точки прямі, паралельні вісі Oy. Тоді G розіб'ється на n "маленьких"криволінійних трапецій. Покладемо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$, і нехай $\xi \in \Delta_i$, де $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$ для $i = \overline{1,n}$. Тоді сума

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

яка залежить від розбиття відрізку Δ і вибору точок ξ_i, дорівнює площі ступінчастої фігури (мал. 1), складеної із n прямокутників, причому основою i-го прямокутника буде відрізок Δ_i, а довжина його висоти дорівнює $f(\xi_i)$. Інтуїтивно зрозуміло, що ця ступінчаста фігура буде мало відрізнітися від початкової фігури G при достатньо дрібному розбитті.

Будемо збільшувати число точок розбиття так, щоб найбільша із довжин відрізків Δ_i прямувала до нуля. Якщо при цьому сума σ буде мати границю S, не залежну ні від способу розбиття відрізка Δ, ні від вибору точок ξ_i, то природно вважати, що площа фігури G дорівнює S. Існування цієї границі дивись у §4.

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = x^2$ і відрізками прямих $x = a$ де $a > 0$ і $y > 0$ (мал. 2).

РёРѳРѣ1.png

Мал. 1

РёРѳРѣ2.png

Мал. 2

1.6 Розв'язок. Користуючись тим, що границя суми σ для неперервної функції $f(x) = x^2$ (див. §4) не залежить від способу розбиття відрізка $\Delta = [0; a]$ і вибору точок ξ_i, будемо вважати, що Δ розбитий на n відрізків однакової довжини, а ξ_i - правий кінець відрізку $\Delta_i \left(i = \overline{1,n}\right)$. Тоді

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обічислити шлях, пройденний точкою за час від $t = 2$ сек. до $t = 5$ сек., якщо швидкість $v(t) = 7t$.

2. Тіло рухається по прямій лінії. Обчислити роботу, витрачену на переміщення тіла з моменту часу a до моменту часу b, якщо потужність двигуна $W = kt^4$

3. Знайти площу криволінійної трапеції, обмежену віссю Ox, а також лініями:

а) $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$;

б) $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 10$;

в) $y = e^t x$, $x = 0$, $x = b$;

г) $y = x(1 - x^2)$, $x = 0$, $x = 1$;

д) $y = xe^x$, $x = 0$, $x = a$;

е) $y = \frac{\ln x}{x}$, $x = a$, $x = b$ (розбити відрізок $[a; b]$ точками, які утворюють геометричну прогресію).

2 Поняття визначенного інтеграла

У розглянутих задачах із §1 (див. також приклади 1-4) мова іде про знаходження границі сум виду

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

які називають інтегральними сумами. До обчислення таких сум зводиться розв'язок багатьох задач з геометрії, фізики, техніки та інших дисциплін. Тому питання, пов'язані з обгрунтуванням граничного переходу описаного типу, заслуговують усестороннього вивчення.

Нехай $f(x)$ визначена на $[a; b]$, нехай $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. $T = \{x_i\}_{i=1}^n$ – розбиття відрізку $[a,b]$; $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i](i = \overline{1,n})$ – відрізки розбиття; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – довжина Δ_i; $l(T) = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\}$ – діаметр (ранг) розбиття T.

Виберемо (довільно!) точки $\xi_i \in \Delta_i$; $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$ – набір проміжних точок, $\sigma_t(\xi; f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, – інтегральна сума функції f, відповідна даному вибору проміжних точок ξ даному розбитті f.

<u>Означення</u>. Число I називається границею інтегральної суми $\sigma_t(\xi; f)$. коли ранг $l(T)$ розбиття T прямує до нуля, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого розбиття, ранг якого $l(T) < \delta$ і при будь-якому набору проміжних точок ξ виконується нерівність

$$|\sigma_t(\xi; f) - I| < \varepsilon \tag{2}$$

За допомогою символів це означення можна записати так:

$$213\text{em}\left\{\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_t(\xi; f) = I\right\} \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \quad 211\text{em}\to |\sigma_t(\xi; f) - I| < \forall T : l(T) < \delta(\varepsilon) \forall\xi.$$

Зауваження. Це означення границі інтегральної суми не вкладається ні в означення границі функції, ні в означення границі послідовності, оскільки інтегральну суму не можна розглядувати ні як послідовність, ні як однозначну функцію.

Означення. якщо існує скінчена границя I інтегральних сум при $l(T) \to 0$, то функцію f звуть інтегровною на відрізку $[a; b]$, а число I називають визначеним інтегралом Рімана функції f на відрізку $[a,b]$ і пишуть

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

Означення. Далі через $R[a,b]$ будемо позначати сукупність усіх інтегровних на $[a,b]$ функцій.

Зауваження. Тепер, повертаючись до задач 1-4 із §1, можно зробити висновки:

1) прямолінійний стержень $[a,b]$ з густиною $\rho(x)$ $(a \le x \le b)$ має масу

$$m = \int_a^b \rho(x)\, dx; \tag{4}$$

2) криволінійна трапеція G (див. мал. 1) має площу

$$S = \int_a^b f(x)\, dx; \tag{5}$$

3) робота A сили $P(x)$ при переміщуванні матеріальної точки від $x = a$ до $x = b$ (при цьому напрямок сили співпадає з напрямком вісі

Ox) обчислюється за формулою

$$A = \int\limits_a^b P(x)\,dx; \tag{6}$$

4) тіло, яке рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$, за проміжок часу від $t = t_0$ до $t = T$ проходить шлях

$$l = \int\limits_{t_0}^T v(x)\,dt. \tag{7}$$

Приклад 5. Знайти $I = \int_a^b c\,dx$;, де c – стала
Розв'язок. За означенням визначеного інтеграла

$$\begin{gathered} I = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n c\Delta x_k = \\ = \lim_{\lambda\to 0} c\{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ...+(x_n - x_{n-1})\} = \lim_{\lambda\to 0} c(x_n - x_0) = \\ \lim_{\lambda\to 0} c(b-a) = c(b-a) \end{gathered} \tag{8}$$

Отже $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

Зауваження Функція Діріхлє $D(x)$ (див. §2) тем має нескінченно багато точок розриву на відрізку $[0;1]$ (вона розривна в кожній точці відрізку $[0;1]$). Але, як то було показано у §2 (див. також §3), функція $D(x)$ неінтегровна за Ріманом

Задачі для самостійного розв'язування

- Чи існують інтеграли $\int_0^5 [x]dx$ і $\int_0^5 \{x\}dx$?
- На відрізку $[0;1]$ задана функція $f(x) = \{... \ 0, \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \ 1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n} \le x < 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N} \ 1, \quad x = 1$

Чи існує інтеграл Рімана для функції $f(x)$ на відрізку $[0;1]$?

3 Властивості визначеного інтеграла

Будемо надалі припускати, що f обмежена на відрізку $[a,b]$

1. Властивості, що пов'язані з операціями над функціями.

   (а) Якщо функції f і g інтегровані на відрізку $[a,b]$, то для будь-яких α і $\beta(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$ функція $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ також інтегровна на відрізку $[a;b]$ і вірна рівність:

   $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

   (б) Якщо f і g інтегровні на відрізку $[a,b]$, то функція $\phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ також інтегровна на відрізку $[a;b]$.

   (в) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то функція $|f(x)|$ також інтегровна на цьому відрізку

   <u>Зауваження</u> Обернене твердження, взагалі кажучи, не вірно

   Наприклад, $|f(x)| = 1$ - інтегровна на $[a,b]$, де $f(x) = \{1, x -$ раціональне, $-1, x -$ ірраціональне. Але f - не інтегровна на $[a;b]$

   [I]

2. Властивості, пов'язані з відрізками інтегрування.

   (а) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a,b]$, то f - інтегровна на відрізку $[a_1;b_1]$, де $[a_1;b_1] \subset [a;b]$.

   (б) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $c \in (a;b)$, то вірна рівність:

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

   (в) Має місце твердження, зворотне твердженню в умові 2^0: якщо $a < c < b$ і якщо функція f інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то вона інтегровна на відрізку $[a;b]$ і вірна рівність:

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

   <u>Означення.</u> $\int_a^b f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

(г) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і c_1,c_2,c_3 - довільні точки цього відрізку, то

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx$$

3. Оцінки інтегралів.

(а) Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$ і для довільних $x \in [a;b] f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(б) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$ і для довільного $x \in [a;b] f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(в) Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і нехай існують числа m і M такі, що для довільних $x \in [a;b]$ виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$. Тоді

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(г) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ для довільних $x \in [a;b]$ і існує точка $x_0 \in [a;b]$ така, що $f(x_0) > 0$, причому функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Зауваження. Умова неперервності функції $f(x)$ в точці x_0, де $f(x_0) > 0$, суттєва. Приклад: $f(x) = \{0{,}0 < x \leq 1, 1, x = 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$.

(д) Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і існує $M > 0$ таке, що $|f| \leq M$. Тоді для довільних $\alpha, \beta \in [a;b]$ виконується

$$|\int_\alpha^\beta f(x)dx| \leq M|\beta - \alpha|$$

4. Теорема (інтегральна теорема про середнє). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову:

   (а) $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$;

   (б) існують числа m і M такі, що для довільних $x \in [a;b] m \leq f(x) \leq M$;

   (в) функція $g(x)$ не змінює знака на відрізку $[a;b]$, тобто $g(x) \leq 0$ для довільних $x \in [a;b]$, або $g(x) \leq 0$ для довільних $x \in [a;b]$.

   Тоді існує число $\nu \in [m;M]$ таке, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \nu \int_a^b g(x)dx$$

   Наслідок. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, а $g(x)$ інтегровна на $[a;b]$ і $g(x)$ не змінює знак на цьому відрізку, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

   Зокрема, якщо $g(x) = 1$, то існує числоа $c \in [a;b]$ таке, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

   Зауваження. Якщо $f(x) \leq 0$, то рівність $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ означає, що площа кріволінійної трапеції (див. мал. 3) з основою $\delta = [a;b]$ дорівнює площі прямокутника з основою довжини $(b-a)$ і висотою $f(c)$

   Приклад. Оцінити інтеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2}$
   Розв'язання. Як відомо, $sinx < x < tgx$ при $0 < x < \pi/2$ і тому

$$(\frac{sinx}{x})' = \frac{xcosx - sinx}{x^2} = \frac{cosx(x - tgx)}{x^2} < 0,$$

коли $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$. Звідси $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ - найбільше значення, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ - найменше значення функції $f(x)$ на проміжку $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$.

Таким чином, для всіх $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ будемо мати

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Звідси за властивостями (III; 3, 4) визначеного інтегралу отримаємо:

$$\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Приклад З'ясувати, який інтеграл більше:

$$\int_0^1 e^{-x} sinx dx \text{ або } \int_0^1 e^{-x^2} sinx dx$$

Розв'язання. Оскільки на відрізку $[0;1]$ функції $e^{-x}sinx$ і e^{-x^2} неперервні (а тому і інтегровні за теоремою 4), а на інтервалі $(0;1)$ виконується строга нерівність $e^{-x}sinx < e^{-x^2}$, то за властивістю (III, 4) визначеного інтегралу $\int_0^1 (e^{-x^2}sinx - e^{-x}sinx)dx > 0$, звідки (див. I, 1)

$$\int_0^1 e^{-x^2} sinx dx > \int_0^1 e^{-x} sinx dx$$

Приклад Знайти $\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\epsilon x^2+1}$

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{\epsilon x^2+1} (x \in [0;1])$ неперервна на відрізку $[0;1]$, то із наслідка теореми про середнє існує таке число $c \in [0;1]$, що

$$\int_0^1 \frac{dx}{\epsilon x^2+1} = \frac{1}{\epsilon c^2+1} \int_0^1 dx = \frac{1}{\epsilon c^2+1}$$

де $\int_0^1 dx = 1$ (дивись приклад 5 із §2).

Тоді

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{\epsilon x^2+1} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon c^2+1} = 1$$

Приклад. Нехай $f \in C([0;1])$ і $3\int_0^1 f(u)du = 1$. Довести, що існує число $c \in [0;1]$ таке, що $f(c) = c^2$

Доведення. Згідно умови $\int_0^1 f(u)du = \frac{1}{3} = \int_0^1 u^2 du$ (див. приклади 2, 4, §1).

Тоді $\int_0^1 (f(u) - u^2)du = 0$. З іншого боку, оскільки функція $f(u) - u^2 \in C([0;1])$, то із наслідка теореми про середнє існує число $c \in [0;1]$ так, що $\int_0^1 (f(u) - u^2)du = ((f(c) - c^2) \int_0^1 du = f(c) - c^2$.

Таким чином, $f(c) - c^2 = 0$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Оцінити інтеграли:

(а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}sin^2xdx}$

(б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$

(в) $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx$

(г) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{100+3cosx}$

(д) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

(е) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} xarctgxdx$

2. З'ясувати, який інтеграл більше:

(а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{x}dx$ або $\int_0^{\pi} \frac{sinx}{x}dx$

(б) $\int_0^1 x^2sin^2xdx$ або $\int_0^1 xsin^2xdx$

(в) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}dx$ або $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

а) Розіб'ємо відрізок $\left[0;\pi\right]$ на 3 рівні частини точками: $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{3}, x_2=\frac{2}{3}\pi, x_3=\pi$. Отримаємо розбиття $T=\left\{0;\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi;\pi\right\}$. На відрізку $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ функція $\sin x$ монотонно зростає, і тому для цього відрізку маємо $m_1=\sin 0=0, M_1=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. На відрізку $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi\right]$ найменшим значенням функціх являється $m_2=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а найбільщим $M_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$. На відрізку $\left[\frac{2}{3}\pi;\pi\right]$ функція $\sin x$ монотонно спадає, і тому $m_3=\sin\pi=0, M_3=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки усі $\triangle x_k=\frac{\pi}{3}$, то

$s_T=\sum_{k=1}^3 m_k\triangle x_k=\frac{\pi}{3}\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}+0\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\approx 0{,}907;$

$S_T=\sum_{k=1}^3 M_k\triangle x_k=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi(\sqrt{3}+1}{3}\approx 2{,}86.$

б) При розбитті відрізку $[0,\pi]$ на 6 рівних частин точками $x_0=0, x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{3}, x_3=\frac{\pi}{2}, x_4=\frac{2}{3}\pi, x_5=\frac{5}{6}\pi, x_6=\pi$ тим же шляхом знайдемо:

$m_1=0, M_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$

$m_2=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, M_2=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$m_3=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}, M_3=\sin\frac{\pi}{2}=1;$

$m_4=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}, M_4=\sin\frac{\pi}{2}=1;$

$m_5=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}, M_5=\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$m_6 = \sin\pi = 0, M_6 = \sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2};$.

Для розбиття $T_1 = \left\{0, \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi; \pi\right\}$ отримаємо наступні суми Дарбу:

$s_{T1} = \frac{\pi}{6}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1{,}43;$

$S_{T1} = \frac{\pi}{6}(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6) = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2{,}48.$

Як і повинно бути (дивись властивість 3°сум Дарбу), виконуються нерівності

$$s_T \leq s_{T1} \leq S_{T1} \leq S_T$$

Приклад 9. При якому $\delta > 0$ із нерівності $\max_{k=l,n} \triangle x_k < \delta$ випливає спаввідношення

$$\Big|\int\limits_0^3 \sin 50x dx - \sum_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \triangle x_k\Big| < 0{,}001, \text{де } 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3 \text{і } \xi_k \text{ - будь}$$

Розв'язання. Інтеграл Рімана $\int\limits_0^3 \sin 50x dx$ існує (див. §4) і мають місце нерівності:

$$s_T \leq \int\limits_0^3 \sin 50x dx \leq S_T,$$

$$s_T \leq \sum_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \triangle x_k \leq S_T,$$

які випливають із властивостей 1°і 5°сум Дарбу.

Тому $\Big|\int\limits_0^3 \sin 50x dx - \sum\limits_{k=1}^{n} \sin 50\xi_k \triangle x_k\Big| \leq S_T - s_t$. Таким чином, для виконання потрібної нерівності достатньо, щоб виконувалась нерівність.

$$S_T - s_T = \sum\nolimits_n^{k=1} (M_k - m_k)\Delta x_k < 0{,}001,$$

де $m_k = min_{x\epsilon[x_{k-1};x_k]} sin50x, M_k = max_{x\epsilon[x_{k-1};x_k]} sin50x, (k = \bar{1,n})$. Нехай $m_k = sin50a_k, M_k = sin50b_k$. Оскільки $f'(x) = 50cos50x$, то за формулою Лагранжа

$$0 \leq M_k - m_k = 50cos(50c_k)(b_k - a_k) \leq 50\Delta x_k.$$

Звідси

$$0 \leq S_T - s_T = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq 50\sum_{k=1}^{n} \leq$$
$$\leq 50(max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k)\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = 150 max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k < 150\delta$$

Таким чиномб якщо $150\delta \leq 0{,}001$, наприклад $\delta = \frac{0{,}001}{150}$, то будемо мати $S_T - s_T < 0{,}001$.

Заувеження.

Фактично ми показали, що $\int_0^3 sin50xdx \approx \sum_{k=1}^{n} sin50\xi_k\Delta x_k$, де $\xi_k \epsilon [x_{k-1}; x_k]$,$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, з точністю $\xi = 0{,}001$,якщо $max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k < \delta$, де $\delta = \frac{0{,}001}{150}$

Заувеження.

Взагалі, якщо функція f(x) має обмежену похідну на відрізку $[a; b]$,тобто $|f'(x)| \leq M$,то для виконання нерівності $S_T - s_T < \xi$достатньо, щоб $max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k < \delta, \delta\frac{\xi}{M(b-a)}$. Приклад10.При якому значенні $\delta > 0$із нерівності $max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k < \delta$ випливає, що

$$\left|\int_2^7 x^2dx - \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Delta x_k\right| < 0{,}001?$$

Розв'язок. Функція $y = x^2$ монотонно зростає на відрізку [2;7]. Тоді $m_k = x_{k-1}^2$,$M_k = x_k^2$,$k = \bar{1,n}$. Звідси

$$S_T - s_T = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2)\Delta x_k <$$
$$(max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k)(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{k-1}^2) <$$
$$\delta\left[(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + ...(x_n^2 - x_{n-1}^2)\right] = \delta(x_n^2 - x_0^2) = \delta(49-4) = 45\delta.$$

Тому можна вибрати $\delta = \frac{0.001}{45}$.

Заувеження.

Ми показали, що $\int_2^7 x^2dx \approx \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Delta x_k$, де $\xi_k \epsilon [x_{k-1}; x_k]$,$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, з точністю $\varepsilon = 0{,}001$, якщо $max_{k=\bar{1,n}}\Delta x_k < \delta = \frac{0{,}001}{45}$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Для наступних інтегралів обчислити верхні та нижні суми Дарбу, відповідні розбиттю відрізка [a;b] на n рівних частин:

   (а) $\int_1^2 lgxdx$,$n = 10$;

   (б) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$,$n = 5$,$n = 10$;

   (в) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$,$n = 10$.

2. Для інтеграла $\int_1^2 lgxdx$ обчислити верхню і нижню суми Дарбу, відповідні розбиттю відрізка [1;2]на частини точками $x_0 = 1$,$x_1 = 1{,}1$,$x_2 = 1{,}2$,$x_3 = 1{,}4$,$x_4 = 1{,}6$,$x_5 = 1{,}8$,$x_6 = 2$.

3. Знайти таке $\delta > 0$, щоб із $max_{k=\overline{1,n}}\Delta x_k < \delta$ випливало б

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right| < \varepsilon \text{ ,якщо}$$

(а) $f(x) = x^3 - 3x$,$a = 2$,$b = 3$,$\varepsilon = 0{,}01$;

(б) $f(x) = xe^{-x}$,$a = 0$,$b = 3$,$\varepsilon = 0{,}001$;

(в) $f(x) = arctgx$,$a = 0$,$b = 1$,$\varepsilon = 0{,}001$;

г) $f(x) = cos100x, a = 0, b = 2, \varepsilon = 0{,}01$;
д) $f(x) = x^3e^x, a = 0, b = 1, \varepsilon = 0{,}001$.

§4. Класи інтегровних функцій

Які функції входять до класу інтегрованих на відрізку $[a;b]$ функцій? На це питання відповідають приведені нижче теореми.

Теорема 4. Якщо $f \in C[a;b]$, то $f \in R[a;b]$.

Приклад 11. Довести, користуючись означенням визначеного інтеграла і попередньою теоремою, що

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Доведення. Оскільки $f \in C[a;b]$ інтегровна на $[a;b]$ за теоремою 4, то границя інтегральних сум не залежить від вибору проміжних точок $(\xi_i)_{j=1}^n$. Тому можна вважати, що $\xi_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2} \in \Delta_i = [x_{i-1};x_i]$,$i = \overline{1,n}$. Звідси $\sigma_T(\xi,x) = \sum_{i=1}^n \xi_i\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

Таким чином $\int_a^b xdx = \lim_{l(T)\to 0}\sigma_T(\xi,x) = \lim_{l(T)\to 0}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Зауваження. У цьому прикладі, а також у багатьох прикладах, розглянутих вище, теорема 4 суттєво використовується.

Теорема 5. Якщо $f-$ монотонна на відрізку $[a;b]$ то f інтегровна на відірзку $[a;b]$.

Означення. Функція f називається кусково-неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона обмежена на $[a;b]$ і неперервна у всіх точках цього відрізку, окрім скінченого числа точок $C_i(i = \overline{1,n})$.

Теорема 6. Якщо функція f кусково-неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на $[a;b]$.

Приклад 12. На відрізку $[0;1]$ задана функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{, якщо } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

Чи існує інтеграл Рімана $\int_0^1 f(x)dx$?

Розв'язання. Функція f є кусково-сталою на відрізку $[0;1]$ і має розриви у точках $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, оскільки

$\lim_{x\to\frac{1}{n}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}+0} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1}$,
$\lim_{x\to\frac{1}{n}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{n}-0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$,

звідки $\lim_{x\to\frac{1}{n}} f(x)$ не інсує. Але функція f не залежить до класу кусково-неперервних, оскільки вона має нескінченно багато(точніше, лічильну множину) точок розриву.

Покажемо, що $f-$ монотонна на $[0;1]$. Нехай $x_1, x_2 \in [0;1]$ і $x_1 < x_2$.

Якщо x_1 і x_2 належать до одного відрізку $(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}]$, то $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{n}$

Нехай $x_1 \in (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n})$, $x_2 \in (\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}]$ і $(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}) \cap (\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}] = \emptyset$. З умови $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) = \frac{1}{n} < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} = f(x_2)$. Це доказує монотонність фунції f на відрізку $[0;1]$. Тоді за теоремою 5 інтеграл $\int_0^1 f(x)dx$ існує.

2º Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізу $[a;b]$ і для довільного $x \in [a;b]$ $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{9}$$

3º Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і нехай існують числа m і M такі, що для довільних $x \in [a;b]$ виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$. Тоді

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{10}$$

4º Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ для довільних $x \in [a;b]$ і існує точка $x_0 \in [a;b]$ така, що $f(x_0) > 0$, причому функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0. \tag{11}$$

Зауваження. Умова неперервності функції $f(x)$ в точці x_0, де $f(x_0) > 0$, суттєва. Приклад: $f(x) = \begin{cases} 0, 0 < x \leq 1 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

5º Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, то

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx. \tag{12}$$

Зауваження. Якщо f інтегровна на відрізку з кінцями a,b ($a < b$ або $a > b$), то $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \right|$.

6º Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і існує $M > 0$ таке, що $|f| \leq M$. Тоді для довільних $\alpha, \beta \in [a;b]$ виконується

$$\left| \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \right| \leq M\,|\beta - \alpha|\,. \tag{13}$$

IV. Теорема 7 (інтегральна теорема про середнє). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову:

1. $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a;b]$;
2. існують числа m і M такі, що для довільних $x \in [a;b]$ $m \leq f(x) \leq M$;
3. функція $g(x)$ не змінює знака на відрізку $[a;b]$, тобто $g(x) \geq 0$ для довільних $x \in [a;b]$, або $g(x) \leq 0$ для довільних $x \in [a;b]$.

Тоді існує число $\mu \in [m; M]$ таке, що

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{14}$$

Наслідок. Якщо функція неперервна на відрізку $[a; b]$, а $g(x)$ інтегровна на $[a; b]$ і $g(x)$ не змінює знак на цьому відрізку, то існує точка $c \in [a; b]$ така, що

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{15}$$

Зокрема, якщо $g(x) = 1$, то існує число $c \in [a; b]$ таке, що $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Зауваження. Якщо $f(x) \geq 0$, то рівність $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$ означає, що площа криволінійної трапеції l0.6

РёРѳРњ3.png

(див. мал. 3) з основою $\Delta = [a; b]$ дорівнює площі прямокутника з основою довжини $(b - a)$ і висотою $f(c)$.

Розв'зання. $I = \int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}ds = \int\limits_0^{100\pi} \sqrt{2} \mid \sin x \mid dx = \sqrt{2} \int\limits_0^{100\pi} \mid \sin x \mid dx =$

$$= \sqrt{2} \left(\int\limits_0^{\pi} \sin x dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx + \cdots + \int\limits_{98\pi}^{99\pi} \sin x dx - \int\limits_{99\pi}^{100\pi} \sin \right.$$

$$= \sqrt{2}\left((-\cos x)\,|_0^{\pi} + (\cos x)\,|_{\pi}^{2\pi} + \cdots + (-\cos x)\,|_{98\pi}^{99\pi} + (\cos x)\,|_{99\pi}^{100\pi}\right)$$

$$= \sqrt{2}(2+2+\cdots+2) = \sqrt{2}\cdot 2\cdot 100 = 200\sqrt{2}.$$

Приклад 24. Довести, що якщо функція f неперервна на [], а функції φ і ψ диференційовані на R, то

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\phi(x)}^{\psi_(x)} f(t)dt\right) = \psi^{'}(x)f\left(\psi(x)\right) - \varphi^{'}(x)f\left(\varphi(x)\right).$$

Доведення. Нехай F - первісна для f. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = F(t)\,|_{t=\varphi(x)}^{t=\psi(x)} = F\left(\psi(x)\right) - F\left(\varphi(x)\right).$$

Оскільки $F^{'}(t) = f(t)$, то за правилом диференціювання складної функції

$$\left(F\left(\psi(x)\right) - F\left(\varphi(x)\right)\right)^{'} = F^{'}\left(\psi(x)\right)\psi^{'}(x) - F^{'}\left(\varphi(x)\right)\varphi^{'}(x) =$$
$$= f\left(\psi(x)\right)\psi^{'}(x) - f\left(\varphi(x)\right)\varphi^{'}(x).$$

Теорема 12.(заміна змінної). Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a_0; b_0)$, а функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну на $(\alpha_0; \beta_0)$, причому $\varphi(t) \in (a_0; b_0)$ при всіх $t \in (\alpha_0; \beta_0)$. Тоді якщо $\alpha \in (\alpha_0; \beta_0), \beta \in (\alpha_0; \beta_0), a = \varphi(\alpha)$,$b = \varphi(\beta)$, то справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi^{'}(t)dt.$$

Остаточно $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx - \int\limits_a^0 f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$

Приклад 25. Обчислити $I = \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx.$

Розв'язання.

$$I = \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = R\sin t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos t; dx = R\cos t dt \end{array}\right] = R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi R^2}{4},$$

Приклад 26. Нехай f-неперервна на $[-a; a]$. Довести, що

а) якщо f - непарна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

б) якщо f - парна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Доведення.

а) Оскільки f - непарна, то $f(-x) = -f(x)$ для усіх $x \in [-a; a]$.

Тоді $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \left[\begin{array}{c} x = -t; dx = -dt \\ x = -a \to t = a; x = 0 \to t = 0 \end{array}\right] = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt.$

Звідси $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 0.$

Аналогічно доводиться б).

Приклад 27. Довести, що якщо f - неперервна на R періодична з періодом T функція, то для будь-якого $a \in R$ вірна вірність:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

Доведення. $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx;$

$$\int\limits_{T}^{a+T} f(x)dx = \begin{bmatrix} x = t + T \\ x = T \to t = 0 \\ x = a + T \to t = a \end{bmatrix} = \int\limits_{0}^{a} f(t+T)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt =$$

$$-\int\limits_{a}^{0} f(t)dt.$$

Остаточно $\displaystyle\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)dx = \int\limits_{a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{T} f(x)dx - \int\limits_{a}^{0} f(x)dx =$

$$\int\limits_{0}^{T} f(x)dx.$$

Приклад 28. Обчислити $\mathrm{I} = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^5 x \cos^8 x dx.$

Розв'язання.

$$\mathrm{I} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{2}\pi} \sin^5 x \cos^8 x dx = \left[\begin{array}{c} \sin^5 x \cos^8 x - \text{періодична} \\ \text{з періодом } 2\pi \end{array} \right] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^8 x dx = 0,$$

оскільки $\sin^5 x \cos^8 x$ — непарна функція.

Теорема 13 (інтегрування частинами). Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають на $[a; b]$ неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v(x)u'(x)dx.$$

Зауваження. Враховуючи, що $v'(x)dx = dv, u'(x)dx = du$, формулі інтегрування частинами можна надати вигляду:

$$\int\limits_{a}^{b} udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} vdu$$

Приклад 29. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} x \ln x dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2 x\ln x dx = \int\limits_1^2 \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Приклад 30. Обчислити інтеграли: $\mathrm{I}_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \mathrm{I}'_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, де $n-$ ціле невід'ємне число.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}'_n$.

Дійсно, $\mathrm{I}'_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = t; x = 0 \to t = \frac{\pi}{2} \\ dx = -dt; x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \end{array}\right] =$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \mathrm{I}_n$$

Обчислимо I_n. Легко знайти $\mathrm{I}_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \mathrm{I}_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Нехай тепер $n > 1$. Інтегрування частинами дає:

$$\mathrm{I}_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right] = -\sin^{n-1} x \text{co}$$

$$+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Таким чином, $\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2} - (n-1)\mathrm{I}_n$. Звідси знаходимо рекурентну формулу:

$$\mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2},$$

по якій інтеграл I_n послідовно приводиться до I_0 або I_1 в залежності від
того, число n парне або непарне.

Розглянемо обидва випадки.

1. Нехай $n = 2m$. Тоді $\mathrm{I}_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m}\mathrm{I}_{2m-2} = \dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\mathrm{I}_{2m-4} = \ldots =$

$$= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

2. Якщо $n = 2m+1$, то аналогічно попередньому знаходимо

$$\mathrm{I}_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\mathrm{I}_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Таким чином,

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}'_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } n \text{ парне;} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

<u>Приклад 31.</u> Довести формулу Валіса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}.$$

<u>Розв'язання.</u> Для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin^{2m+2} x < \sin^{2m+1} x < \sin^{2m} x$. Тоді за властивістю (III; 4°, §5) визначеного інтеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx,$$

звідки за рекурентною формулою попереднього прикладу

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$\frac{2m+1}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}<\frac{\pi}{2}.$$

Звідси за теоремою про три послідовності

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}.$$

Зауваження. Отримана формула Валіса дає простий вираз для числа π через натуральні числа. Вона використусться, на приклад, при виведениі формули Стірлінга:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12\pi}}, 0<\theta<1,$$

5.Обчислити інтегали:
XX

$$\text{а)}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{8}} x^6\sin^7 x dx$$

$$\text{б)}\int\limits_{-2}^{2}(x^7-7x)\ln^3(x^4+1)dx;$$

$$\text{в)}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^9 x dx;$$

$$\text{г)}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$$

4 Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула Ньютона-Лейбніца дає дійсно зручний метод обчислення визначених інтегралів у тому випадку, коли відома первісна підінтельної функції, причому ця первісна не дуже складна. У противному випадку інтеграл обчислюють наближено, при цьому не виключається

застосування формули Ньютона-Лейбніца, але вже для інших більш простих функцій. У даному параграфі ми розглянемо наближене обчислення визначених інтегралів за допомогою формули Тейлора, а також нерівностей між інтегралами, які випливають із нерівностей між підінтегральними функціями.

Приклад32. Обчислити інтеграл Френеля $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ з точністю до 10^{-2}.

Розв'язання. Ми знаємо, що первісна $\int x^2 dx$ функції $\sin x^2$ не виражається у елементарних функціях. Отже використати безпосередньо формулу Ньютона-Лейбніца у даному випадку не можливо. Поступимо інакше. За формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа маємо:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_{2n+2}(x),$$

де $r_{2n+2} = \frac{\sin\left(+\frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$,$0 < \xi < x$.

Тому при $x \in [0;1]$ $|r_{2n+2(x)}| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$. Але $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$ при $n \geq 2$.
Таким чином, $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^5 \equiv P(x)$ з точністю 10^{-3} при $0 \leq x \leq 1$.
Отже, користуючись властивостями (3;2°,5°,§5)

$$\Big|\int\limits_0^1 \sin x^2 dx = \int\limits_0^1 P(x^2)dx\Big| \leq \int\limits_0^1 \big|\sin x^2 - P(x^2)\big|dx < \int\limits_0^1 10^{-3}dx = 10^{-3}$$

Таким чином, $\big|\int\limits_0^1 \sin x^2 dx - \int_0^1 P(x^2)dx\big| \leq \int\limits_0^1 \big|sinx^2 - P(x^2)\big|dx < \int\limits_0^1 10^{-3}dx =$

За формулою Ньютона-Лейбніца,

$$\int\limits_0^1 P(x^2)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^(10)\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3! \cdot 7}x^7 + \frac{1}{5! \cdot 11}x^1 1\right)\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \frac{1}{5! \cdot 11} \approx 0{,}31.$$

Отже, $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0{,}31$ з похибкою менше 10^{-3}.

Приклад 33. Обчислити наближено еліптичний інтеграл

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0{,}25 \sin^2 x dx},$$

користуючись формулою Тейлора із трьома членами. Оцінити похибку отриманого результата.

Розв'язання.Інтеграл $\sqrt{1 - 0{,}25 \sin^2 x dx}$ не береться у елементарних функціях. Тому формулу Ньютона-Лейбніца, як і в попередньому прикладі, безпосередньо застосувати ми не можемо.

Розглянемо формулу Тейлора для функції

$$\varphi(z) = (1-z)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + r_2(z),$$

де $r_2(z) = \frac{\varphi^{(3)}(\xi)}{3!} z^3, 0 < \xi < z$ -залишковий член у формі Лагранжа.

Оскільки $\varphi^{(3)}(\xi) = -\frac{3}{8}\Big(1-\xi\Big)^{-\frac{5}{2}}$, то, покладаючи $z = 0{,}25 \sin^2 x \leq \frac{1}{4}$, отримаємо:

$$0 < \xi < \frac{1}{4};$$
$$-\frac{4}{3\sqrt{3}} < \varphi^{(3)}(\xi) < -\frac{3}{8};$$
$$-\frac{2}{9\sqrt{3}}\Big(\frac{\sin^2 x}{4}\Big)^3 < r_2(0{,}25 sin^2 x) < -\frac{1}{16}\Big(\frac{\sin^2 x}{4}\Big)^3,$$

звідки $-\frac{2}{9\sqrt{3}\cdot 4^3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx < \Delta < -\frac{1}{16\cdot 4^3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$, де $\Delta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r_2(0{,}25 sin^2 x) dx$.

Згідно з рекурентною формулою (див. приклад 30):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{5}{6}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\sin^2 x dx =$$

$$= \frac{15}{24}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{15}{96}\pi = \frac{5}{32}\pi.$$

Таким чином, $-\frac{5\pi}{9\sqrt{3}\cdot 2^{10}} < \Delta < -\frac{5\pi}{2^{15}}$, або $-9{,}84\cdot 10^{-4} < \Delta < -4{,}79\cdot 10^{-4}$.

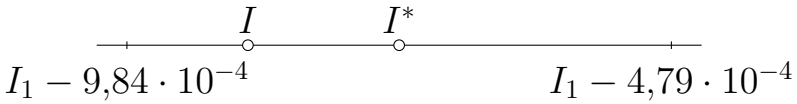
Нехай $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{8}sin^2 x - \frac{1}{128}\sin^4 x\right)dx$.

Тоді $I = I_1 + \Delta$, звідки $I_1 - 9{,}84\cdot 10^{-4} < I < I_1 - 4{,}79\cdot 10^{-4}$.

Покладемо

$I \approx I^* = \frac{1}{2}\{(I_1 - 9{,}84\cdot 10^{-4}) + (I_1 - 4{,}79\cdot 10^{-4})\} = I_1 - \frac{1}{2}(9{,}84 + 4{,}79)\cdot 10^{-4}$.

Оскільки $I_1 = \frac{957\pi}{2048} \approx 1{,}4680196$, то $I \approx I^* = 1{,}467287$.



$$|I - I^*| < \frac{1}{2}\{(I_1 - 4{,}79\cdot 10^{-4}) - (I_1 - 9{,}84\cdot 10^{-4})\} =$$

$$= \frac{1}{2}(9{,}84\cdot 10^{-4} - 4{,}79\cdot 10^{-4}) < 2{,}53\cdot 10^{-4} < 5\cdot 10^{-4}.$$

Отже, $I \approx I^* = 1{,}467287$ з точністю $5\cdot 10^{-4}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \sin\frac{x^2}{2}dx$ з похибкою $5\cdot 10^{-5}$.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-0{,}5\sin^2 x}}$ за допомогою формули Тейлора з трьома членами у головній частині. Оцінити похибку отриманого результата.