МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНІКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язування задач з математичного аналізу на тему: "Невизначений інтеграл"

Одеса
2023

Складачі: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Лисенко З.М
кандидат фіз.-мат. наук, Шанін Р.В

Рецензенти: доктор фіз.-мат. наук, професор Стороженко Е.О;
кандидат фіз.-мат. наук, доцент Кореновський А.О.

Методичні вказівки складаються з семи параграфів, в яких розглядаються означення й властивості невизначеного інтеграла, а також основні методи обчислення невизначених інтегралів.

В кожному параграфі приводяться необхідний теоретичний матеріал. Типові задачі даються з докладним поясненням. Наприкинці містяться завдання для самостійного розв'язання.

Вказівки призначаються для студентів I курсу прикладного відділення для підготовки до модуля за темою "Інтеграл Рімана".

1 Означення й властивості невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення полягає в тому, щоб від заданої функції $f(x)$ знайти її похідну $f'(x)$. Якщо, наприклад, відомо закон прямолінійного руху точки $S = S(t)$ і треба знайти швидкість ν та прискорення a в даний момент часу t, то ці задачі розв'язуються за допопмогою похідних:

$$\nu = S'(t), \qquad a = \nu'(t) = S''(t).$$

Проте на практиці доводиться частіше розв'язувати обернені задачі, коли відоме прискорення $a = a(t)$ і треба знайти швидкість ν в момент часу t та пройдений шлях S за час t точкою, яка рухається прямолінійно. Отже, за відомою функцією $a(t)$ треба знайти функцію $\nu(t)$, для якої $a(t)$ є похідною, а потім за функцією $\nu(t)$ знайти функцію $S(t)$ для якої $\nu(t)$ є похідною.

Отже з математичної точки зори дістаємо таку задачу. На деякому проміжку $(a; b)$ задано функцію $f(x)$. Треба знайти таку функцію $F(x)$, щоб $F'(x) = f(x)$, для $x \in (a; b)$.

Означення. Нехай функції $f(x)$ і $F(x)$ визначені на $(a; b)$. Якщо існує $F'(x)$ на $(a; b)$ і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a; b)$, то $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $(a; b)$.

Зауваження 1. Із означення випливає, що первісна $F(x)$ функції $f(x)$, $x \in (a; b)$, неперервна на $(a; b)$.

Зауваження 2. Якщо $F(x)$ первісна для $f(x)$ на $(a; b)$, то $F(x)+C$ при будь-якому значенні $C = const$ також являється первісною для $f(x)$ на $(a; b)$.

Приклади.

1. Для функції $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ первісною на $\mathbb{R}$ є функція $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Для функції $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ первісною на $\mathbb{R}$ є функція $F(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Для функції $f(x) = 0$ при $x < 0$ і $f(x) = x$ при $x \geq 0$ первісною на $\mathbb{R}$ є функція $F(x) = 0$ при $x < 0$ і $F(x) = \frac{x^2}{2}$ при $x \geq 0$ відповідно.

Чи будь-яка функція має первісну? Наступний приклад показує, що відповідь на це питання негативна.

Приклад.

Нехай $f(x) = \mathrm{sgn}x$, $x \in (-1;1)$. Функція $f(x)$ не має первісної на $(-1;1)$.

Припустимо, що це твердження не має місця. Нехай F така, що для всіх $x \in (-1;1)$ $F'(x) = f(x)$. До відрізка $[0;x]$, $0 < x < 1$ і функції F застосуємо теорему Лагранжа. Тоді існує $\theta \in (0;x) : F(x) - F(0) = F'(\theta)x = f(\theta)x = x$. Звідси

$$F'_+(0) = \lim_{x\to+0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to+0} 1 = 1.$$

Але $F'_+(0) = F'(0) = f(0) = 0$. Маємо суперечність. Цей приклад показує, що прості функції можуть не мати первісної.

Теорема 1. (про зв'язок первісних для однієї функції). Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві первісні для $f(x)$ на $(a;b)$, то для всіх $x \in (a;b)$ $F_2(x) - F_1(x) = C$, де C – – стала.

Доведення. Нехай $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Звідси $\Phi'(x) = F'_2(x) - F'_1(x) = f(x) - f(x) = 0$. Тоді за наслідком із теореми Лагранжа $\Phi(x) = C = const$. Звідси $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Зауваження 3. За попередньою теоремою дві первісні функції для тієї самої функції відрізняється одна від одної на сталу величину:

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Інакше кажучи, якщо $F(x)$ – первісна функція для $f(x)$ на $(a;b)$, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ зображується у вигляді $F(x)+C$, де C – довільне стале число. Таким чином, ми можемо уточнити зауваження 2, а саме:
якщо $F(x)$ – первісна функція для $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$ – також первісна функція для $f(x)$ на $(a;b)$ і ніякі інші функції, окрім функцій виду $F(x) + C$, не можуть бути первісними для функції f.

Означення. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на деякому промужку Δ називають невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку, позначають символом $\int f(x)dx$ і пишуть

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна функція $f(x)$ на Δ, C – стала, $\int$ – знак інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз ($f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$), $f(x)$ – підінтегральна функція.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від даної функції називається інтегруванням. Таким чином, інтегрування є зворотною операцією у відношенні до знаходження похідної.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчаються способи інтегрування функцій, називається інтегральним численням.

<u>Приклади.</u>

1. $\displaystyle\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

   Перевірка: $\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)' = e^{2x}.$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

   Перевірка: $(\sin x + C)' = \cos x.$

1. $\int dF(x) = F(x) + C$, оскільки $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, оскільки $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

3. Властивість лінійності (інтеграл від лінійної комбінації функцій дорівнює відповідній лінійній комбінації інтегралів від розглядуваних функцій): якщо f і g інтегровані на Δ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то функція $\varphi = \alpha f + \beta g-$ інтегрована на Δ і

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx. \qquad *$$

Доведення. Нехай F і G — первісні для функцій f і g відповідно, тоді $\Phi = \alpha F + \beta G$ - первісна для функції φ, оскільки

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x) = \varphi(x)$$

Згідно означенню невизначеного інтеграла ліва частина (*) складається із функцій виду $\Phi(x) + C$, а права - із функцій виду

$$\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Кожна функція виду $\Phi(x)+C$ належить сукупності функцій $\Phi(x)+$ $+\alpha C_1+\beta C_2$ і навпаки.

Приклади.

1. $\displaystyle\int(e^x+x^2)dx=\int e^x dx+\int x^2 dx=e^x+\frac{x^3}{3}+C.$

2. $\displaystyle\int\left(-2\sin x+\frac{3}{1+x^2}\right)dx=-2\int\sin x dx+3\int\frac{dx}{1+x^2}=$
$=-2(-\cos x)+3\operatorname{arctg}x+C.$

Зауваження 4. $\int\sin 2x dx=\int d(-\frac{1}{2}\cos 2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$. З іншого боку, $\int\sin 2x dx=\int 2\sin x\cos x dx=\int d(\sin^2 x)=\sin^2 x+C_2$. Це не означає, що $-\frac{1}{2}\cos 2x$ дорівнює $\sin^2 x$. Це означає, що сукупності функцій $\{-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\}$ і $\{\sin^2 x+C_2\}$ співпадають, що рівносильне існуванню такої сталої, що $\sin^2 x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$ ($x=0:C=\frac{1}{2}$, звідки отримаємо відому формулу $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$).

2 Таблиця основних інтегралів

1). $\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ x\neq 0,\ \alpha\neq -1,$ оскільки $\displaystyle\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right)'=x^\alpha.$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad x\in\mathbb{R},\ n-\text{ціле},\ n\geq 0.$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\quad x\neq\mathbb{R},\ n-\ \text{ціле},\ n\neq -1.$$

2). $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,\quad x\neq 0,$ оскільки, наприклад,

$$\text{при}\quad x>0\quad (\ln x)'=\frac{1}{x},$$

$$\text{при}\quad x<0\quad (\ln(-x))'=\frac{1}{x}.$$

3). $\displaystyle\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\quad x\in\mathbb{R};$

$$\text{якщо} \quad a = e, \quad \text{тоді} \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

4). $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

5). $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

6). $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$

7). $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (\pi n, \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$

8). $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

9). $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

10). $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

11). $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$

12). $\int \frac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arctg} x + C, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$

13). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \quad |x| < 1.$

14). $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C, \ |x| \neq 1.$

15). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C, \quad a \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

Зауваження 5. Як відомо, елементарними функціями є многочлени, раціональні функції, степенева, показникові й логарифмічна функції, тригонометричні та обернені тригонометричні функції, їх суми, добутки й частки, а також всілякі суперпозиції у скінченому числі цих функцій. Похідні елементарних функцій є елементарними функціями. Але має місце такий відомий факт (без доведення): первісні

елементарних функцій, взагалі кажучи, елементарними функціями можуть і не бути. Наприклад, не будуть елементарними функціями первісні таких простих функцій: $f(x) = \cos x^2$, $f(x) = \sin x^2$, $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$, хоча, як буде далі доведено, їх первісні існують.

Зауваження 6. Кожна з формул у приведеній вище таблиці інтегралів розглядається на тих проміжках дійсної осі $\mathbb{R}$, на яких означена відповідна підінтегральна функція. Якщо таких проміжків декілька, то стала C у правій частині може змінюватися від проміжку до проміжку.

3 Метод заміни змінної (метод підстановки).

У цьому параграфі розглянемо найважливіший спеціальний прийом, який дозволяє знаходити ефективно і у явному вигляді первісні багатьох елементарних функцій.

Теорема 2. Нехай $\int f(t)dt = F(t) + C$ на $\tilde{\Delta} = \varphi(\Delta)$, де $t = \varphi(x)-$ функція, що диференційована на проміжку Δ (звідки $\tilde{\Delta}$ – теж проміжок), тобто множина значень функції φ збігається з областю визначення функції $F(t)$. Тоді

$$\int f(\varphi(x))d\varphi = F(\varphi(x)) + C$$

або

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

(формула інтегрування заміною змінної).

Доведення. Дійсно, $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Таким чином, якщо $F(t)-$ первісна для $f(t)$, то $F(\varphi(x))-$ первісна для $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Зауваження 7.

1. Якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \int f(ax+b)\frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

2. Оскільки

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C,$$

то

$$\int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C, \quad \varphi(x) \neq 0.$$

3. Оскільки

$$\int t^{\alpha}dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0,$$

то

$$\int (\varphi(x))^{\alpha}d(\varphi(x)) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad \varphi(x) > 0.$$

<u>Приклади</u>.

1. $\displaystyle\int (2x+3)^6 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^7}{7} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)^k} = \begin{cases} \dfrac{(x+a)^{-k+1}}{-k+1} + C, & k \neq 1, \\ \ln|x+a| + C, & k = 1. \end{cases}$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

4. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

За допомогою табличного інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$, обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

За допомогою табличного інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$, обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}} = \int \frac{d(x-\frac{3}{2})}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}} =$$

$$= \ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right| + C.$$

Іноді буває доцільно при обчисленні інтеграла $\int f(x)dx$ перейти до нової змінної. Нехай $x = \varphi(t)$– строго монотонна і диференційована функція на деякому проміжку. Тоді вона має обернену $t = w(x)$. Звідси $f(x)dx = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = u(t)dt$, де $u(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Тоді

$$\int f(x)dx = \int u(t)dt = F(t) + C = F(w(x)) + C$$

– формула інтегрування підстановкою.

<u>Приклад</u>.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = [a>0] = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) = a\sin t, \\ t = w(x) = \arcsin\frac{x}{a}, \end{array}\right.$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t,\ \ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Big]=$$

$$=\int a\cos t\cdot a\cos t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C.$$

4 Метод інтегрування частинами.

Якщо метод інтегрування заміною змінної зводить невизначений інтеграл до табличного інтегралу, то наступний метод інтегрування частинами дозволяє даний невизначений інтеграл звести до іншого невизначеного інтегралу, який знаходиться або простіше, або є табличним, або зводиться до табличного.

Теорема 3. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно-диференційовані на Δ (тобто $u'(x)$ і $v'(x)$ – неперервні). Тоді

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$

(формула інтегрування частинами).

Доведення. За умовою функція $u\cdot v$ теж має неперервну похідну і за привилом диференціювання добутку $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, звідки $uv'=$ $=(u\cdot v)'-u'v$. Тому $\int uv'dx=\int(u\cdot v)'dx-\int u'vdx=(uv+C)-\int u'vdx$. Відносячи C до інтегралу $\int u'vdx$, знаходимо: $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$.

Зауваження 8. Іноді формулу інтегрування частинами записують в термінах диференціалів:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

оскільки

$$dv=v'dx,\quad du=u'dx.$$

Приклади.

1. $\int x\cos xdx=\int xd(\sin x)=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C$.

2. $$I = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2+a} & du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - I + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - I + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Розв'язуючи це як рівняння відносно I, знаходимо

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

3. Нехай $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Виведемо рекурентну формулу.

$$I_n = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} & du = -n(x^2+a^2)^{-n-1}2x\,dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n+1}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot I_n - 2a^2n\cdot I_{n+1}.$$

Звідси

$$I_{n+1} = \frac{1}{2a^2n}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2a^2n}\cdot I_n.$$

Наприклад, оскільки $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$, то

$$I_2 = [n=1] = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

4. $$\int x^2e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2e^x - 2\int x d(e^x) =$$

$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

5. $$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = [\alpha\beta \neq 0] = \frac{1}{\alpha}\left[\cos\beta x\cdot e^{\alpha x} - \right.$$

$$\left. - \int e^{\alpha x}(-\sin\beta x\cdot\beta)dx)\right] = \frac{1}{\alpha}\cos\beta x\cdot e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}\int \sin\beta x d(e^{\alpha x}) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha^2}\left[\sin\beta x \cdot e^{\alpha x} - \beta\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot I + C.$$

Звідси

$$I = \frac{\alpha cos\,\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x} + C.$$

5 Інтегрування раціональних функцій.

Розглянемо окремий клас функцій - раціональні функції, невизначені інтеграли від яких є елементарними функціями. Вкажемо метод знаходження невизначених інтегралів від таких функцій.

Раціональною функцією називається відношення двох многочленів. Раціональну фунцію $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де P і Q - многочлени, завжди можна зобразити у вигляді $\frac{P}{Q} = S + \frac{P}{Q}$, де S і P- многочлени, причому степінь многочлена P меньша за степень многочлена Q (дріб $\frac{P}{Q}$ називається правильним). При розкладанні раціонального дробу на прості ми користуємося відомою теоремою з алгебри: якщо $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ многочлени степені m і n відповідно, $m < n$ і коефіцієнти - дійсні числа, а

$$Q_n(x) = C(x-\alpha_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

де $\sum\limits_{m=1}^{k}\alpha_m + 2\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j = n$, то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-\alpha_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(\alpha_1-1)}}{(x-\alpha_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \ldots +$$

$$+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-\alpha_k)^{\alpha_k}} + \ldots + \frac{A_k^{(1)}}{x-\alpha_k} + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + D_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots +$$

$$+\frac{B_s^{(\beta_s)}x + D_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \ldots + \frac{B_s^{(1)}x + D_s^{(1)}}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Таким чином, правильний раціональний дріб зображується у вигляді суму простих дробів виду

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r},\ \ r\in\mathbb{N}; \qquad \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k},\ \ k\in\mathbb{N},\ \ p^2-4q<0.$$

Як відомо

$$\int \frac{Adx}{x-\alpha} = A\ln|x-\alpha| + C,$$

$$\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^r} = A\frac{(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C, \;\; r \neq 1.$$

Позначимо

$$I_k = \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}dx,$$

та виділимо повний квадрат за змінною x

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right), \;\; q-\frac{p^2}{4} > 0.$$

Нехай

$$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \alpha, \;\; x+\frac{p}{2} = t.$$

Тоді

$$I_k = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+\alpha^2)^k}dt.$$

Легко бачити, що I_k - лінійна комбінація інтегралів $I'_k = \int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^k}$ і $I''_k = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^k}$. Якщо $k > 1$, то

$$I'_k = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+\alpha^2)}{(t^2+\alpha^2)^k} = \frac{1}{2}\frac{(t^2+\alpha^2)^{-k+1}}{(-k+1)} + C =$$

$$= \frac{1}{2(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C,$$

інтеграл I''_k обчислюється за допомогою рекурентної формули. Якщо $k = 1$, то

$$I'_k = \int \frac{tdt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+\alpha^2)}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+\alpha^2)+C = \frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C,$$

$$I''_k = \int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + C = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Висновок: інтеграл від будь-якого раціонального дробу зображається у вигляді лінійної комбінації многочлена (якщо дріб неправільний), правильного раціонального дробу, натурального логарифма та арктангенса.

Приклади.

1. $$\int \frac{x^4}{x^2-x+1}dx = \int \left(x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1}\right)dx =$$
$$= \int x^2dx + \int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. $$I = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \int \left[\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}\right] =$$
$$= [1 \equiv A(x-1)(x-3) + B(x+2)\times(x-3) + C(x-1)(x+2)]$$

Можна зрівняти коефіцієнти при однакових степенях x в отриманій тотожності і знайти A, B, C. Але є більш ефективний спосіб обчислення: покладаючи послідовно $x=-2$, $x=1$ і $x=3$, із тотожності знаходимо $\left[A=\frac{1}{15},\ B=-\frac{1}{6},\ C=\frac{1}{10}\right]$.Звідси $I=\frac{1}{15}\ln|x+2| - \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{10}\ln|x-3| = \frac{1}{30}\ln\frac{|x+2|^2|x-3|^2}{|x-1|^5} + C$.

3. $$I = \int \frac{3x^3-5x+10}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}dx =$$
$$= \int \left[\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}\right]dx$$

$(*)$ $\quad 3x^3-5x+10 \equiv A(x^2+2x+5) + B(x-1) + (Cx+D)(x-1)^2$; Покладаючи $x=1$, знаходимо $8=8A$ звідки $A=1$.Якщо тепер диференціювати (*), а потім покласти $x=1$, в отриманій рівності, знайдемо $4=4+4B$, звідки $B=0$.Залишається зрівняти коефіцієнти при x^3 і незалежні члени в (*). Одержимо: $3=C$; $10=5A+D$, звідки $D=5$. Таким чином

$$I = \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3x+5}{x^2+2x+5}\right]dx = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+5\cdot\frac{2}{3}}{x^2+2x+5}dx =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{10}{3}-2}{x^2+2x+5}dx =$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} =$$
$$= \frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$$

.

6 Інтегрування ірраціональних функцій.

Інтеграли від ірраціональних функцій, як правило, не беруться в скінченому вигляді. Проте можна вказати деякі окремі типи ірраціональних функцій, інтеграли від яких є елементарні функції. Для таких інтегралів можна застосувати підстановки, які зводять невизначений інтеграл від ірраціональної функції до невизначеного інтегралу від раціональної функції. Розглянемо деякі типи таких інтегралів.

а) Інтеграл виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx,$$

де $r_k \in \mathbb{Q}, \left(k = \overline{1,n}\right)$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$, підстановкою $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^p, p$ – спільний знаменник раціональних чисел $r_1, \ldots, r_n$, зводяться до інтегралу від раціональної функції.

<u>Приклад</u>.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-3}dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x-3}} = \int \frac{(x-3)^{\frac{1}{4}}dx}{(x-3)^{\frac{1}{2}}+(x-3)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Спільний знаменник } \frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3} \text{дорівнює 12.}\\ \text{Застосовуємо підстановку:}\\ x-3=t^{12}; dx=12t^{11}dt\end{array}\right] = \int \frac{t^3}{t^6+t^{11}dt} = 12\int \frac{t^{10}}{t^2+1} =$$

$$= 12\int \left[\frac{t^{10}}{t^2+1} = \frac{t^{10}+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} = t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}\right] =$$

$$= 12\int \left(t^8 - t^6 + t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= \frac{12t^9}{9} - \frac{12t^7}{7} + \frac{12t^5}{5} - \frac{12t^3}{3} + 12t - 12\operatorname{arctg}(t) + c = \left[t = (x-3)^{\frac{1}{12}}\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x-3)^3} - \frac{12}{7}\sqrt[12]{(x-3)^7} + \frac{12}{5}\sqrt[12]{(x-3)^5} - 4\sqrt[4]{x-3} + 12\sqrt[12]{x-3} -$$
$$-12\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[12]{x-3} + c.$$

б) Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a \neq 0,\ b^2-4ac \neq 0$$

можна звести до інтегралу від раціональної функції за допомогою підстановки Ейлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{\alpha}x, \alpha > 0;$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, c > 0;$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t\,(x-x_1)\,, b^2-4ac > 0,$ де x_1 – один із коренів квадратного тричлена ax^2+bx+c.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}} = \begin{bmatrix} \text{Оскільки } a=4>0, \text{ то застосовуємо першу} \\ \text{підстановку Ейлера: } \sqrt{4x^2+4x+3} = t-2x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4x^2+4x+3 = t^2-2tx+4x^2, 4x+3 = t^2-2tx, x = \dfrac{t^2-3}{4(1+t)}; \\ dx = \dfrac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}dt; \sqrt{4x^2+4x+3} = t - \dfrac{2\left(t^2-3\right)}{4\,(1+t)} = \dfrac{t^2+2t+3}{2\,(1+t)} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}dt}{\dfrac{t^2-3}{4(1+t)}\cdot\dfrac{t^2+2t+3}{2(1+t)}} = 2\int\frac{dt}{t^2-3} = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}} + c$$

Зауваження 9. Треба мати на увазі, що підстановки 1) – 3) часто приводять до громіздких обчислювань.

в) Інтеграли виду $\int x^m\,(ax^n+b)^p\,dx$, де $a,b \in \mathbb{R}; m,n,p \in \mathbb{Q}$, причому $a \neq 0, b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$, називають інтегралами від диференціального біному. Цей інтеграл зводиться до інтегралу від раціальної функції у наступних трьох випадках:

$$1)\, p \in \mathbb{Z};\ 2)\,\frac{m+1}{n};\ 3)\,\frac{m+1}{n}+p,\ p \in \mathbb{Z}$$

У першому випадку застосовують підстановку $x = q^t$, де q – спільний знаменник дробів m і n, у другому і третьому випадках – відповідно підстановки $ax^n + b = t^s$ і $a + bx^{-n} = t^s$, де s – знаменник дробу p. ***Зауваження 10***.Ці випадки були відомі ще Ньютону, але лише у середині 19 сторіччя П.Л. Чебишев довів, що інтеграли виду $\int x^m (ax^n + b)^p \, dx$ у інших випадках не можна зобразити через елементарні функції.

Приклад. Знайти $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. Це дифференціальний біном, де $m = 0$, $p = -\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} + p = 0$. Покладаючи $t^4 = 1 + x^{-4}$, отримаємо: $4t^3 dt = -4x^{-5}dx$, $x^4 = \frac{1}{t^4 - 1}$. Отже, $I = \int \frac{x^4 dx}{x^5 \sqrt[4]{1+x^{-4}}} = \int \frac{1}{t\left(t^4-1\right)}\left(-t^3\right) dt = \int \frac{t^2 dt}{1-t^4} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{1}{4} ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$

7 Інтегрування тригонометричніх функцій.

а) Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, де $R(u,v)$ – раціональна функція від u і vб можна звести до інтегралу від раціонального дробу за дпомогою універсальної підстановки: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$, оскільки $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

б) В нижче наведених окремих випадках доцільно застостосовувати вказані підстановки:

1) якщо $R = (-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, $t = \cos x$, $x \in (0; \pi)$;

2) якщо $R = (\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, $t = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) якщо $R = (-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то, $t = \operatorname{tg} x$,

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, або, $t = \operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi)$.

Приклад. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \begin{bmatrix} R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x) \\ t = \operatorname{ctg} x \end{bmatrix} =$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)} = -\int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\operatorname{ctg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + C.$

в) У застосуваннях часто зустрічаются інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$. При обчислюванні таких інтегралів можна керуватися наступними правилами:

А) якщо $m+n$ – парне число, то застосовують підстановку $t = \operatorname{tg} x$, або $t = \cos 2x$;

Б) якщо $m+n$ – непарне число, то застосовують підстановку $t = \sin x$, або $t = \cos x$;

Приклади.

1. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \begin{bmatrix} m = 0,\ n = -6,\ t = \operatorname{tg} x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt,\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2 \end{bmatrix} = \int \left(1+t^2\right)^2 dt =$
$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$

2. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \begin{bmatrix} m = 3;\ n = 4 \\ t = \cos x \end{bmatrix} = \int \left(\cos^2 x - 1\right)\cos^4 x d\cos x =$
$= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

3. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \begin{bmatrix} \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{bmatrix} =$
$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x =$
$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x} +$
$+ \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

5. $\int \sin x \sin 3x dx = \left[\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)\right] =$
$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

г) Інтеграл виду $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, де $R(u,v)$ –раціональна функція від u і vб зводиться до інтегралу від раціональноного дробу за допомогою підстановки $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$, при цьому $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$. Іноді більш ефективними при обчислювані такого інтегралу можуть виявитися підстановки $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x\, t = \operatorname{th} x$, $t = \operatorname{ch} 2x$.

Приклад.

$$\int \operatorname{ch}^5 x \operatorname{sh}^4 x dx = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x dx = d(\operatorname{sh} x) \\ \operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x,\ t = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} =$$

$$= \int \left(1+t^2\right)^2 t^4 dt = \frac{t^5}{5} + \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + \frac{2\operatorname{sh}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{sh}^9 x}{9} + C.$$

8 Завдання для самостійного розв'язування

I варіант

1. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;
3. $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx$;
4. $\displaystyle\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$;
8. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}dx$;
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}$;
10. $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 5x dx$.

II варіант

1. $\displaystyle\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$;
2. $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$;
4. $\displaystyle\int e^{2x}\sin^2 x dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$;
6. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)}\sin x$;
9. $\displaystyle\int \sin^4 x dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}$.

III варіант

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

3. $\int \sin x \ln(\cos x)\, dx;$

4. $\int e^{-4x} x^3 dx;$

5. $\int \frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2} dx;$

6. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx;$

7. $\int \frac{(x-1)\, dx}{\left(x^2+2x\right)\sqrt{x^2+2x}};$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}};$

9. $\int \cos^6 3x dx;$

10. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

IV варіант

1. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}};$

2. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)};$

3. $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx;$

4. $\int x^5 \sin 5x dx;$

5. $\int \frac{x^2+1}{\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right) dx};$

6. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$

7. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}};$

8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x};$

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$

10. $\int \cos 2x \sin 4x dx.$

V варіант

1. $\int e^{2x^2+\ln x} dx;$

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}};$

3. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx;$

4. $\int \frac{x \arccos \frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$

5. $\int \frac{x^3+5}{\left(x^2+4\right)(x-1)};$

6. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x^3}};$

7. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

8. $\int \sqrt{1+\sin x}dx$;

9. $\int \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x}dx$;

10. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$.

VI варіант

1. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

2. $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$;

3. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

4. $\int e^{8x}\sin 3x dx$;

5. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$;

6. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

7. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

8. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$;

10. $\int \cos^6 x\sin^2 x dx$.

Зміст

1 Означення й властивості невизначеного інтеграла 3

2 Таблиця основних інтегралів 6

3 Метод заміни змінної (метод підстановки). 8

4 Метод інтегрування частинами. 11

5 Інтегрування раціональних функцій. 13

6 Інтегрування ірраціональних функцій. 16

7 Інтегрування тригонометричніх функцій. 18

8 Завдання для самостійного розв'язування 21

Склали: Лисенко Зоя Михайлівна
Шанін Руслан Васильович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язування задач
з математичного аналізу
на тему:
"Невизначений інтеграл"