Кічмаренко Ольга Дмитрівна

Вибрані лекції до курсу "Асимптотичний аналіз задач оптимального керування функціонально-диференціальними системами"

для здобувачів третього

освітньо-наукового рівня вищої освіти
за спеціальністю 113 - прикладна математика

Розділ 1 Схеми усереднення в задачах оптимального керування функціонально-диференціальною системою

Обгрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь із запізненням було запропоновано в [7], а також [8, 9], для диференціальних рівнянь із максимумом [10, 11, 12, 13]. Узагальнення методу усереднення на функціонально-диференціальні рівняння можна знайти, наприклад, в роботах J. Hale [14, 15] та B.Lehman, S.Weibel [16].

Застосування методу усереднення до функціонально-диференціальних систем з асимптотично сталим керуванням було запропоновано в [19]. А в роботі [31] було запропоновано схеми повного усереднення функціонально-диференціальних систем на скінченному проміжку без умови асимптотичної сталості керування.

Мета даного розділу - довести можливість застосування різних схем методу усереднення на скінченому проміжку та на півосі для функціонально-диференціальних систем з малим параметром та з керуванням, яке входить нелінійно та без умови асимптотичної сталості керування, при цьому розробити алгоритми побудови відповідних керувань вихідної та усередненої задач.

Представлені тут результати опубліковані в [32],.

1.1 Схема повного усереднення функціонально-диференціальних рівнянь з функціональними параметрами на скінченому інтервалі

Розглянемо задачу оптимального керування системою, яка описується функціонально-диференціальним рівнянням наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left[f(t, x_t) + A(x(t))\psi(t, u) \right], \quad x(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0] \tag{1.1}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \Phi(x(L\varepsilon^{-1}, u)) \to \inf, \tag{1.2}$$

де $t \geq 0$, x – n-вимірний фазовий вектор, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\psi : \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^m$, вектор керування $u(t) \in U$, $U \in comp\,(\mathbb{R}^r)$, $L > 0$ – деяка константа.

Керування $u(t)$ вважається допустимим для задачі (1.1)-(1.2), якщо виконується наступне:

A1) функція $u(t)$ є локально інтегровною при $t \geq 0$;

A2) $u(t) \in U$ для $t \geq 0$.

Через $x(t, u)$ позначимо розв'язок рівняння (1.1) при фіксованому допустимому керуванні $u(t)$.

Розв'язком задачі (1.1)-(1.2) є пара $(x^*(t), u^*(t))$, якщо $u^*(t)$ - допустиме керування та $J_\varepsilon[u^*] = \inf\limits_{u\in U} J_\varepsilon[u]$, а $x^*(t)$ – траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (1.1), побудуємо у такий спосіб.

Для кожного елемента $\varphi \in C_n$ через $\bar{\varphi} \in C_n$ позначимо такий, що $\bar{\varphi}(t) = \varphi(0)$

при $t \in [-h, 0]$. За відображенням $f(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ будуємо відображення $\tilde{f}(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ наступним чином. Для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ розглянемо елемент $\varphi \in C_n$ такий, що $\varphi(0) = x$. Тоді $\tilde{f}(t, x) = f(t, \bar{\varphi})$. Очевидно, що $\tilde{f}$ є вже скінчено-вимірним відображенням.

Нехай виконана умова

B1) рівномірно за $x \in \mathbb{R}^n$ існує границя

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(t, x) dt = \overline{f}(x)\,, \tag{1.3}$$

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (1.1) поставимо у відповідність наступне усереднене рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \left[\, \overline{f}(y(t)) + A(y(t))v \right], \quad y(0) = \varphi(0), \tag{1.4}$$

де

$$v \in V = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t, U) dt, \tag{1.5}$$

v – новий вектор керування, $\varphi(t, U)$— багатозначне відображення, побудоване по всім однозначним гілкам $u(t) \in U$, інтеграл в (1.5) розуміємо в сенсі Аумана [21] збіжність в сенсі метрики Хаусдорфа.

Для системи (1.4) розглянемо задачу оптимального керування з критерієм якості

$$\bar{J}_\varepsilon[v] = \Phi(y(L\varepsilon^{-1}, v)) \to \inf\,. \tag{1.6}$$

Керування $v(t)$ вважається допустимим для задачі (1.4)-(1.6), якщо виконується наступне:

A3) функція $v(t)$ є локально інтегровною при $t \geq 0$;

A4) $v(t) \in V$ для $t \geq 0$.

Через $y(t,v)$ позначимо розв'язок рівняння (1.4) при фіксованому допустимому керуванні $v(t)$.

Аналогічно будемо розуміти $(y^*(t), v^*(t))$ як розв'язок задачі (1.4)-(1.6), якщо $v^*(t)$ - допустиме керування та $\bar{J}_\varepsilon[v^*] = \inf\limits_{v\in V} J_\varepsilon[v]$, а $y^*(t)$ – траєкторія, що відповідає керуванню $v^*(t)$.

Зауважимо, що (1.4) – це звичайне диференціальне рівняння при допустимому керуванні $v(t)$.

Основним результатом даного підрозділу є обгрунтування чисельно-асимптотичного методу розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою (1.1), (1.2) шляхом розв'язання усередненої задачі оптимального керування системою, яка описується звичайними диференціальними рівняннями (1.4), (1.6).

Нехай далі виконані наступні умови:

B2) відображення $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ неперервне за сукупністю змінних;

B3) відображення $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ задовольняює умову Ліпшиця по φ з константою λ, тобто існує константа $\lambda > 0$ така, що для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in C_n$ виконується нерівність

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \le \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C;$$

B4) існує константа $M > 0$ така, що $|f(t,0)| \le M$;

B5) матричнозначна функція $A(x)$ рівномірно обмежена константою M, задовольняє умову Ліпшиця з константою λ;

B6) функція $\psi(t,u)$ неперервна по t і u і обмежена константою M_1.

Встановимо відповідність між функціями керування $u(t) \in U$ точної задачі (1.1) та функціями керування $v(t) \in V$ усредненої задачі (1.4) за **алгоритмом**:

1) Кожному допустимосму керуванню $v(t) \in V$ поставимо у відповідність керування $u(t) \in U$ наступним чином:

   (a) обчислюємо точки $v_i = \frac{1}{T_1}\int_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(t)dt$, де T_1 – довільна константа,

   (b) будуємо керування $u(t) = \{u_i(t), iT_1 \leq t < (i+1)T_1, i = 0, 1, \ldots\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови:

$$\min_{u \in U} \left\| \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} \psi\left(t, u\right) dt - v_i \right\| = \left\| \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} \psi\left(t, u_i\right) dt - v_i \right\|. \tag{1.7}$$

2) Керуванню $u(t) \in U$ ставимо у відповідність $v(t) \in V$ у такий спосіб:

   (a) обчислюємо $w_i = \frac{1}{T_1}\int_{iT_1}^{(i+1)T_1} \psi\left(t, u_i(t)\right) dt$;

   (b) будуємо керування $v(t) = \{v_i, iT_1 \leq t < (i+1)T_1, i = 0, 1, \ldots\}$, де v_i находимо з умови

$$\min_{v \in V} \|w_i - v\| = \|w_i - v_i\|. \tag{1.8}$$

Знаходження керування $u_i(t)$ у (1.7) можливе не завжди, але умова рівномірної обмеженості функції $\psi(t, u)$ гарантує існування розв'язку задачі мінімізації (1.7). Дійсно, із рівномірної обмеженості функції $\psi(t, u)$ випливає інтегральна обмеженість відображення $\psi(t, U)$, а тому опуклість і компактність множини точок $\left\{ \frac{1}{T_1} \int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1} \psi(t, u_i)dt \,\middle|\, u_i \in U \right\}$, що є наслідоком узагальнення теореми Ляпунова [20]. Отже, існує точка цієї множини, найближча до v_i, тобто існує керування $u_i(t)$ в (1.7).

Таким чином, для будь-якого допустимого керування $v(t) \in V$ усередненої системи існує ступінчасте керування $u(t)$ вихідної системи і, навпаки, для будь-якого допустимого керування $u(t) \in U$ вихідної системи існує ступінчасте керуавння усередненої системи $v(t) \in V$.

Наступна теорема узагальнює метод усереднення для функціонально-диференціальних рівнянь, коли їх права частина залежить від функціональних параметрів.

Теорема 1.1. *Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови B1)-B6).*

Тоді для довільного $\eta > 0$ *і довільного* $L > 0$ *існує* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ *таке, що для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і для будь-якого* $t \in \left[0,\, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливими є наступні твердження :*

1) *Розв'язки* $x(t, u)$ *і* $y(t, v)$ *задач* (1.1) *і* (1.4) *визначені на* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

2) *Для будь-якого допустимого керування* $u\,(t) \in U$ *системи* (1.1) *існує керування* $v\,(\varepsilon t)$ *системи* (1.4) *таке, що*

$$|x\,(t) - y\,(t)| \leq \eta, \tag{1.9}$$

де $x\,(t)$ *– розв'язок системи* (1.1) *з керуванням* $u\,(t)$, $y\,(t)$ *– розв'язок системи* (1.4) *з керуванням* $v\,(t)$ *і* $x\,(0) = y\,(0) = \varphi(0)$.

3) *Для будь-якого допустимого керування* $v\,(t) \in V$ *системи* (1.4) *існує керування* $u\,(t)$ *системи* (1.1) *таке, що справедливою є оцінка* (1.9).

Доведення. Для доведення першого твердження теореми зауважимо, що за умовами B2)-B4) функція правої частини вихідного рівняння (1.1) є неперервною за сукупністю змінних, задовольня є умову Ліпшиця та обмежена, а значить і функція правої частини усередненої системи (1.4) є обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця і умову лінійного росту, а тому при фіксованих допустимомих керуваннях $u(t)$ і $v(t)$ розв'язки задач (1.1) і (1.4) існують, єдині і необмежено продовжувані вправо.

Перейдемо до доведення твердження 2. Нехай $u(t)$ – деяке допустиме керування системи (1.1), а $x(t)$ – відповідна йому траекторія, яка визначена для всіх $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, $v(t)$ – керування усередненої системи (1.4), побудоване за алгоритмом (1.8), а $y(t)$ – відповідна йому траєкторія.

Переходячи від (1.1) і (1.4) до відповідних інтегральних зображень на $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, отримаємо

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \left| \int_0^t [f(s, x_s) - f(s, y(s))]\, ds \right| +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \right] ds \right| + \varepsilon \int_0^t \|A(x(s)) - A(y(s))\| \, |\psi(s, u(s))| \, ds +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t A(y(s)) \left[\psi(s, u(s) - v(s) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int_0^t \|x_s - y(s)\|_C ds + \varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \right] ds \right| +$$

$$+\varepsilon\lambda M_1 \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(s)) \left[\psi(s, u(s) - v(s) \right] ds \right|. \tag{1.10}$$

За означенням

$$\|x_s - y(s)\|_{C_n} = \max_{\theta \in [-h;0]} |x(s+\theta) - y(s)| \leq \max_{\theta \in [-h;s]} |x(s+\theta) - y(s)| = \delta(s).$$

З (1.10), застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана, ми отримаємо наступну нерівність:

$$\delta(t) \leq \beta e^{\lambda(1+M_1)L}, \tag{1.11}$$

де

$$\beta = \varepsilon \left| \int_0^t \left[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \right] ds \right| + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(s)) \left[\psi(s, u(s) - v(s) \right] ds \right|. \tag{1.12}$$

Оцінимо перший доданок в (1.12). Для цього поділимо інтервал $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин точками $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$. Нехай $t \in [t_k, t_{k+1})$ для деякого $k \in [0, m-1]$.

$$\varepsilon \left| \int\limits_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \Big] ds \right| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \tilde{f}(s, y(s)) - \tilde{f}(s, y(t_i)) \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \overline{f}(y(s)) - \overline{f}(y(t_i)) \right| ds + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \tilde{f}(s, y(t_i)) - \overline{f}(y(t_i)) \right| ds \right] +$$

$$+\varepsilon \left[\int\limits_{t_k}^{t} \left| \tilde{f}(s, y(s)) - \tilde{f}(s, y(t_k)) \right| ds + \int\limits_{t_k}^{t} \left| \overline{f}(y(s)) - \overline{f}(y(t_k)) \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k}^{t} \left| \tilde{f}(s, y(t_k)) - \overline{f}(y(t_k)) \right| ds \right] \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left[2\lambda \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |y(s) - y(t_i)| \, ds + \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \right] +$$

$$+\varepsilon \left[2\lambda \int\limits_{t_k}^{t} |y(s) - y(t_k)| \, ds + \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \right] \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\lambda M(1 + M_1)L + LF\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + 2\lambda M(1 + M_1)\frac{L}{m} + \frac{L}{m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) \qquad (1.13)$$

Зауважимо, що для отримання оцінки (1.13) ми використали умову B3) і B4), причому ціж умови будуть виконуватися і для функції правої частини усередненої системи. Окрім того, так як в (1.3) збіжність рівномірна, то існує спадна функція $F(T)$, що $\lim\limits_{F(T)\to\infty} T = 0$, а тому наступного виду доданки можна

оцінити так:

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\tilde{f}(s, y(t_i)) - \overline{f}(y(t_i))\right| ds \leq \frac{L}{\varepsilon m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right)$$

Тепер оцінимо другий доданок в (1.12), скориставшись розбиттям інтервал $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин.

$$\varepsilon \left| \int\limits_0^t A(y(s)) \left[\psi(s, u(s)) - v(s)\right] ds \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left|A(y(s)) - A(y(t_i))\right| \left|\psi(s, u(s)) - v(s)\right| ds +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(y(t_i)) \left[\psi(s, u(s)) - v(s)\right] ds \right| +$$

$$+ \varepsilon \left| \int\limits_{t_k}^{t} A(y(s)) \left[\psi(s, u(s)) - v(s)\right] ds \right| \leq 2M_1 L \left(\lambda + M + \frac{M}{m}\right) \tag{1.14}$$

Тоді, в (1.12) і в (1.11) відповідно маємо:

$$\begin{aligned} \delta(t) \leq \Bigg[& 2\varepsilon\lambda M(1 + M_1)L + LF\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + 2\lambda M(1 + M_1)\frac{L}{m} + \\ & + \frac{L}{m} F\left(\frac{L}{\varepsilon m}\right) + 2M_1 L \left(\lambda + M + \frac{M}{m}\right)\Bigg] e^{\lambda(1+M_1)L} = \varsigma(m, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Відповідним вибором достатньо великого m і достатньо малого ε величина $\varsigma(m, \varepsilon)$ може бути зроблена як завгодно малою. Тому оцінка (1.9) є справедливою для довільного $\eta > 0$. Теорема доведена.

Зауважимо, що оцінка (1.9) є рівномірною за всіма u і v та $\varphi(0)$, тобто ε_0 не залежить від керувань u і v та від початкової функції.

1.2 Схеми ступінчастого усереднення функціонально-диференціальних рівнянь на скінченому інтервалі

В цій частині дисертаційної роботи поставимо мету - довести можливість застосування різних алгоритмів усереднення керованих функціонально-диференціальних систем, що грунтуються на схемі часткового ступінчастого усереднення на скінченому проміжку для функціонально-диференціальних систем з керуванням, яке входить нелінійно та без умови асимптотичної сталості керування, та запропонувати алгоритми побудови відповідних керувань точної та усередненої задач.

1.2.1 Постановка задачі.

Розглянемо задачу оптимального керування системою, яка описується функціонально-диференціальним рівнянням наступного вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon\left[f(t,x_t) + A(x(t))\psi(t,u)\right], \quad t > 0, \\ &x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0] \end{aligned} \tag{1.16}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \Phi(x(L\varepsilon^{-1}, u)) \to \inf, \tag{1.17}$$

де $t \geq 0$, x – n-вимірний фазовий вектор, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\psi : \mathbb{R}_+ \times U \to \mathbb{R}^m$, вектор керування $u(t) \in U$, $U \in comp\,(\mathbb{R}^r)$, $L > 0$ – деяка константа.

Керування $u(t)$ вважається допустимим для задачі (1.16)-(1.17), якщо виконується наступне:

A1) функція $u(t)$ є локально інтегровною

A2) $u(t) \in U$ для $t \geq 0$.

Через $x(t,u)$ позначимо розв'язок рівняння (1.16) при фіксованому допустимому керуванні $u(t)$.

Розв'язком задачі (1.16)-(1.17) є пара $(x^*(t), u^*(t))$, якщо $u^*(t)$ - допустиме керування та $J_\varepsilon[u^*] = \inf\limits_{u \in U} J_\varepsilon[u]$, а $x^*(t)$ – траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

При усередненні рівнянь керованого руху типу (1.16) виникає проблема з усередненням функції $\psi\left(t, u\left(t\right)\right)$, оскільки для довільного керування не можна передбачати існування середнього.

Один із підходів - це перехід до диференціальних включень та обгрунтування методу усереднення для диференціальних включень [29, 30]. Але такий підхід, по-перше, ставить у відповідність вихідній системі систему іншої природи - з множинно-значною правою частиною, і, по-друге, вимагає залучення нового математичного апарату - теорії диференціальних включень та множинно-значних рівнянь. Автори роботи [19] в аналогічній постановці обмежилися асимптотично сталим керуванням, що суттєво звужує вибір функції керування.

Ми пропонуємо різні алгоритми усереднення керованих функціонально-диференціальних систем, які грунтуються на схемі часткового ступінчастого усереднення функції $\psi\left(t, u\left(t\right)\right)$.

Нехай далі для (1.16) виконані наступні **умови**:

B1) відображення $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ неперервне за сукупністю змінних;

B2) відображення $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ задовольняює умову Ліпшиця по φ з константою λ, тобто існує константа $\lambda > 0$ така, що для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in C_n$

виконується нерівність

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \le \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C, \quad t \ge 0;$$

B3) існує константа $M > 0$ така, що $|f(t,0)| \le M$, $t \ge 0$;

B4) матричнозначна функція $A(x)$ рівномірно обмежена константою M, задовольняє умову Ліпшиця з константою λ;

B5) функція $\psi(t,u)$ неперервна по t і u і обмежена константою M_1.

Розглянемо періодичний та неперіодичний за часом випадки правої частини в (1.16), розробимо та обгрунтуємо наступні схеми усереднення.

1.2.2 Періодичний випадок

Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (1.16), побудуємо у такий спосіб.

Для кожного елемента $\varphi \in C_n$ через $\bar{\varphi} \in C_n$ позначимо такий, що $\bar{\varphi}(t) = \varphi(0)$ при $t \in [-h, 0]$. За відображенням $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ будуємо відображення $\tilde{f}(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ наступним чином. Для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ розглянемо елемент $\varphi \in C_n$ такий, що $\varphi(0) = x$. Тоді $\tilde{f}(t,x) = f(t,\bar{\varphi})$. Очевидно, що $\tilde{f}$ є вже скінчено-вимірним відображенням.

Нехай додатково виконані умови:

B6) відображення $f(t,\varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ є 2π-періодичним по t,

B7) існує середнє

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(t,x)dt = \overline{f}(x), \tag{1.18}$$

B8) функція $\psi(t,u)$ є 2π-періодичною по t.

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (1.16) поставимо у відпо-

відність наступне усереднене рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \left[\overline{f}(y(t)) + A(y(t))v(t) \right], \quad y(0) = \varphi(0), \tag{1.19}$$

де $v(t)$ – новий вектор керування, який буде побудовано одним із алгоритмів, описаних нижче.

Алгоритм 1.

Означимо множину

$$V = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi\left(t, U\right) dt,$$

де інтеграл від множинно-значного відображення розуміємо в сенсі Аумана [21], тобто

$$V = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} z\left(t\right) dt,\ z\left(t\right) \in \psi\left(t, U\right) \right\}. \tag{1.20}$$

За лемою А.Ф. Філіппова [85], для довільної вимірної функції $z\left(t\right)$ існує вимірна функція $u(t)$ така, що $z\left(t\right) = \psi\left(t, u\left(t\right)\right)$ і для будь-якої вимірної функції $u\left(t\right)$ функція $z\left(t\right) = \psi\left(t, u\left(t\right)\right)$ вимірна.

Отже,

$$V = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi\left(t, u\left(t\right)\right) dt, \ \middle| \ u\left(t\right) \in U \right\}. \tag{1.21}$$

Оскільки функція $\psi\left(t, U\right)$ неперервна і обмежена константою M, то за теоремою А.А. Ляпунова [20] множина V є опуклою і компактною. Отже, для побудови множини V можна скористатися опорною функцією. Використовуючи властивості інтеграла від множинно-значного відображення, маємо:

$$C\left(V,z\right)=\max_{v\in V}\left(v,z\right)=\left(v_0\left(z\right),z\right)=$$
$$=C\left(\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,U\right)dt,\ z\right)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\left(\psi\left(t,U\right),z\right)dt=$$
$$=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max_{u\in U}\left(\psi\left(t,u\right),\ z\right)dt=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,p\left(t,z\right),\ z\right)dt=\chi\left(z\right).$$

Тоді

1. Кожному керуванню $v\left(t\right)$ ставимо у відповідність керування $u\left(t\right)$ наступним чином:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}v\left(t\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\psi\left(t,u\left(t,\varepsilon\right)\right)dt,\qquad i=0,1,... \tag{1.22}$$

Очевидно, що для заданого керування $v\left(t\right)\in V$ ми маємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}v\left(t\right)dt=v_i\in V. \tag{1.23}$$

У відповідності до (1.21) для довільного $v_i\in V$ існує $u\left(t,\varepsilon\right)\in U$ – вимірне керування таке, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\psi\left(t,u\left(t,\varepsilon\right)\right)dt=v_i.$$

2. Кожному керуванню $u\left(t\right)\in U$ ставимо у відповідність керування $v\left(t\right)$ за допомогою співвідношення (1.22).

Для заданого керування $u\left(t\right)\in U$ маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\psi\left(t,u\left(t\right)\right)dt=v_i\in V.$$

Керування $v\left(t\right)$ можна задати, наприклад, у вигляді ступінчастої функції:

$$v\left(t\right)=\left\{v_i,\ 2\pi i\leq t<2\pi\left(i+1\right),\ i=0,1,...\right\}. \tag{1.24}$$

Алгоритм 1 є ефективним, якщо перевірка $v \in V$ не викликає труднощів.

Теорема 1.2. *Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови B1)-B8).*

Тоді існують $\varepsilon_0(L) > 0$ *і* $C > 0$ *такі, що для будь-якого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і для будь-якого* $t \in \left[0,\, L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливими є наступні твердження :*

1) *Розв'язки* $x(t,u)$ *і* $y(t,v)$ *задач* (1.16) *і* (1.19) *визначені на* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

2) *Для будь-якого допустимого керування* $u\,(t) \in U$ *системи* (1.16) *існує керування* $v\,(t)$ *системи* (1.19) *таке, що*

$$|x\,(t) - y\,(t)| \leq C\varepsilon, \tag{1.25}$$

де $x\,(t)$ *– розв'язок системи* (1.16) *з керуванням* $u\,(t)$, $y\,(t)$ *– розв'язок системи* (1.19) *з керуванням* $v\,(t)$ *і* $x\,(0) = y\,(0) = \varphi(0)$.

3) *Для будь-якого допустимого керування* $v\,(t) \in V$ *системи* (1.19) *існує керування* $u\,(t)$ *системи* (1.16) *таке, що справедливою є оцінка* (1.25).

Доведення. Для доведення першого твердження теореми зауважимо, що за умовами B1)-B5) функція правої частини вихідного рівняння (1.16) є неперервною за сукупністю змінних, задовольняє умову Ліпшиця та обмежена, а значить і функція правої частини усередненої системи (1.19) є обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця і умову лінійного росту, а тому при фіксованих допустимомих керуваннях $u(t)$ і $v(t)$ розв'язки задач (1.16) і (1.19) існують, єдині і необмежено продовжувані вправо.

Тепер доведемо твердження 2. Нехай $u(t)$ – деяке допустиме керування системи (1.16), а $x(t)$ – відповідна йому траекторія, визначена для всіх $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$,

$v(t)$ – керування усередненої системи (1.19), побудоване за алгоритмом (1.22), а $y(t)$ – відповідна йому траєкторія.

На $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ перейдемо від (1.16) і (1.19) до відповідних інтегральних зображень, враховуючи, що $x(0) = y(0) = \varphi(0)$, отримаємо

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \left| \int_0^t [f(s, x_s) - f(s, y(s))]\, ds \right| +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \Big]\, ds \right| + \varepsilon \int_0^t \|A(x(s)) - A(y(s))\|\, |\psi(s, u(s))|\, ds +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda \int_0^t \|x_s - y(s)\|_{C_n} ds + \varepsilon \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \Big]\, ds \right| +$$

$$+\varepsilon\lambda M_1 \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right|. \tag{1.26}$$

За означенням

$$\|x_s - y(s)\|_{C_n} = \max_{\theta \in [-h;0]} |x(s+\theta) - y(s)| \leq \max_{\theta \in [-h;s]} |x(s+\theta) - y(s)| = \delta(s).$$

З (1.26), застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана, ми отримаємо наступну нерівність:

$$\delta(t) \leq \varepsilon\beta e^{\varepsilon\lambda(1+M_1)L}, \tag{1.27}$$

де

$$\beta = \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s)) \Big]\, ds \right| + \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right|. \tag{1.28}$$

Спочатку оцінимо другий доданок в (1.28) з урахуванням (1.22).

$$\left|\int\limits_0^t A(y(s))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| \leq$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} A(y(s))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| + \left|\int\limits_{2\pi k}^{t} A(y(s))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \left|A(y(s))-A(y(2\pi i))\right|\left|\psi(s,u(s))-v(s)\right|ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} A(y(2\pi i))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{2\pi k}^{t} A(y(s))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| \leq$$

$$\leq 2\lambda M_1 \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \left|y(s)-(y(2\pi i))\right|ds + 4\pi M M_1. \tag{1.29}$$

Оскільки

$$|y(s)-y(2\pi i)| \leq \varepsilon \int\limits_{2\pi i}^{s} \left|\overline{f}\left(y(s)\right)+A\left(y(s)\right)v(s)\right|ds \leq \varepsilon M(1+M_1)(s-2\pi i),$$

то

$$\left|\int\limits_0^t A(y(s))\left[\psi(s,u(s))-v(s)\right]ds\right| \leq \varepsilon 4\lambda M_1 M(M_1+1)L\pi + 4MM_1\pi.$$

Аналогічно

$$\varepsilon\left|\int\limits_0^t \Big[\tilde{f}(s,y(s))-\overline{f}(y(s))\Big]ds\right| \leq \varepsilon 4\pi M + 2\lambda M(M_1+1)L\pi.$$

Тоді

$$\beta \leq 2M(1+M_1)(2\pi + \lambda L(1+m_1)\pi). \tag{1.30}$$

При $C = \beta e^{\varepsilon\lambda(1+M_1)L}$ з (1.27) і (1.30) отримаємо твердження теореми.

Наслідок 1. *З умов теореми 1.2 безпосередньо випливає оцінка:*

$$h\left(K(T), K^0(T)\right) \leq C\varepsilon, \tag{1.31}$$

де $K(T)$ – замикання множини досяжності системи (1.16), $K^0(T)$ – множина досяжності системи (1.19), $T = L\varepsilon^{-1}$, $h(\cdot,\cdot)$ – відстань за Хаусдорфом між множинами.

Алгоритм 2.

При наближеному розв'язанні задачі оптимального керування можна обирати $v \in \partial V$ і, значить, задавати як нове керування опорний до множини V вектор $w(\tau) \in \mathrm{R}^m$ ($\|w(\tau)\| = 1$). Тоді

$$v_0(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t, p(t,w))dt, \tag{1.32}$$

де функція $p(t,w)$ визначається із умови:

$$(\psi(t, p(t,w)), w) = \max_{u\in U}(\psi(t,u), w). \tag{1.33}$$

Нехай, функція $p(t,w)$ визначається однозначно для будь-якого w і для майже всіх $t \in [0, 2\pi]$. При цьому множина V є строго опуклою.

Зауважимо, що інтеграли виду (1.32) і максимум функції (1.33) необхідно обчислювати і при усередненні крайових задач принципа максимума, при цьому також вважається, що функція $p(t,w)$ знаходиться однозначно.

Системі (1.16) поставимо у відповідність наступну частково усереднену систему:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \left[\bar{f}\left(y(t)\right) + A\left(y(t)\right) v_0\left(w\right) \right], \; y\left(0\right) = \varphi(0). \tag{1.34}$$

Установимо відповідність між керуваннями $u(t,\varepsilon)$ і $w(t)$.

1. Кожному керуванню $w(t)$ поставимо у відповідність керування $u(t,\varepsilon)$ наступним чином:

$$\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right) dt = \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w(t)\right) dt.$$

Оскільки $v_0\left(w(t)\right) \in \partial V$ і $V \in conv(R^n)$, то $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w(t)\right) dt = v_i \in V$. Значить, існує керування $u\left(t,\varepsilon\right) \in U$ таке, що $\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right) dt = 2\pi v_i$.

2. Кожному керуванню $u(t,\varepsilon)$ покладемо у відповідність керування $w(t)$ наступним чином:

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right) dt = v_i \in V, \tag{1.35}$$

то за теоремою Каратеодорі [6] існують $v_i^j \in \partial V$, $\lambda_i^j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j = 1$, $r \leq m+1$ такі, що $v_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j v_i^j = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j v_0(w_i^j)$.

Задамо

$$w(t) = \left\{ w_i^j \;\middle|\; \tau_i^{j-1} \leq t < \tau_i^j, \quad \tau_i^0 = 2\pi i, \quad \tau_i^j - \tau_i^{j-1} = 2\pi \lambda_i^j, \quad j = \overline{1,r}, \right.$$

$$\left. t \in \left[2\pi i, 2\pi\left(i+1\right)\right), \quad i = 0, 1, ... \right\}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w\left(t\right)\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j} v_0\left(w_i^j\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j} v_i^j dt = \sum_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_i^j = v_i.$$

Зауваження. Аналогічна теорема справедлива для схеми ступінчастого усереднення за алгоритмом 2, її доведення теореми проводиться аналогічно, доведенню теореми 1.2.

1.2.3 Неперіодичний випадок

Тепер нехай права частина функціонально-диференціального рівняння (1.16) не є періодичною за часом. Аналогічно до періодичного випадку будуємо відображення $\tilde{f}(t,x)$.

Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (1.16), побудуємо у такий спосіб.

Нехай виконана умова

B9) рівномірно за $x \in \mathbb{R}^n$ існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t,x)dt = \overline{f}(x). \tag{1.36}$$

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (1.16) покладемоо у відповідність наступне усереднене рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\ \overline{f}(y(t)) + A(y(t))v(t)\right], \quad y(0) = \varphi(0), \tag{1.37}$$

де v – новий вектор керування, який буде побудовано одним із описаних нижче алгоритмів.

Зауважимо, що (1.37) – це звичайне диференціальне рівняння при допустимому керуванні $v(t)$.

Алгоритм 3.

Відповідність між керуванням $u(t) \in U$ і керуванням $v(t)$ встановимо з урахуванням

$$v \in V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \psi(s, U)\, ds. \tag{1.38}$$

В (1.38) інтеграл від множинно-значного відображення розуміємо в сенсі Аумана [23], а збіжність в сенсі метрики Хаусдорфа.

Нехай збіжність в (1.38) рівномірна відносно часу.

Встановимо відповідність між керуваннями $u(t, \varepsilon)$ і $v(t)$.

1. Керуванню $v(t) \in V$ покладемо у відповідність керування $u(t) \in U$ наступним чином:

а) обчислимо значення $v_i = \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} v(t)dt \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$ (тут T_0 – довільно обрана константа);

б) будуємо керування $u(t) = \{u_i(t),\ iT_0 \le t < (i+1)T_0\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови:

$$\min_{u(t)\in U} \left\| \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \psi(t, u(t))\, dt - v_i \right\| = \left\| \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \psi(t, u_i(t))\, dt - v_i \right\|. \tag{1.39}$$

Множина точок

$$V_{T_0}^i = \left\{ \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \psi(t, u_i(t))dt \,\middle|\, u_i(t) \in U \right\},$$

за теоремою Ляпунова [20], є опуклим компактом, і $\lim\limits_{T\to\infty} h\left(V_{T_0}^i, V\right) = 0$, (згідно з (1.38)) отже, існує точка цієї множини $\bar{v}_i \in V_{T_0}^i$, найближча до v_i, тобто, існує

керування $u_i(t)$ в (1.39) таке, що

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi(t,u_i(t))dt=\bar{v}_i. \tag{1.40}$$

Керування $u(t)$ із (1.40) взагалі визначається неоднозначно.

2. Керуванню $u(t)\in U$ поставимо у відповідність $v(t)\in V$ наступним чином:

а) обчислюємо $w_i=\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\varphi\left(t,u_i(t)\right)dt,\quad i=0,1,2,\ldots.$

б) будуємо керування $v(t)=\{v_i,\ iT_0\leq t<(i+1)T_0,\ i=0,1,\ldots\}$, де v_i знаходимо із умови

$$\min_{v\in V}\|w_i-v\|=\|w_i-v_i\|. \tag{1.41}$$

Знаходження керування $u_i(t)$ у (1.39) можливе не завжди, але умова рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ гарантує існування розв'язку задачі мінімізації (1.41). Дійсно, із рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ випливає інтегральна обмеженість відображення $\psi(t,U)$, а тому опуклість і компактність множини точок $\left\{\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t,u_i)dt\,\middle|\,u_i\in U\right\}$, що є наслідком узагальнення теореми Ляпунова [20]. Отже, існує точка цієї множини, найближча до v_i, тобто існує керування $u_i(t)$ в (1.39).

Теорема 1.3. *Нехай в області* $Q=\{t\geq 0,\varphi\in C_n,x\in\mathbb{R}^n,u\in U\subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови B1)-B5)і B9).*

Тоді для довільного $\eta>0$ *і довільного* $L>0$ *існує* $\varepsilon_0(\eta,L)>0$ *таке, що для будь-якого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *і для будь-якого* $t\in\left[0,\ L\varepsilon^{-1}\right]$ *справедливими є наступні твердження :*

1) *Розв'язки* $x(t,u)$ *і* $y(t,v)$ *задач* (1.16) *і* (1.37) *визначені на* $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$.

2) *Для будь-якого допустимого керування* $u(t) \in U$ *системи* (1.16) *існує керування* $v(t)$ *системи* (1.37) *таке, що*

$$|x(t) - y(t)| \leq \eta, \tag{1.42}$$

де $x(t)$ *– розв'язок системи* (1.16) *з керуванням* $u(t)$, $y(t)$ *– розв'язок системи* (1.37) *з керуванням* $v(t)$ *і* $x(0) = y(0) = \varphi(0)$.

3) *Для будь-якого допустимого керування* $v(t) \in V$ *системи* (1.37) *існує керування* $u(t)$ *системи* (1.16) *таке, що справедливою є оцінка* (1.42).

Доведення теореми є аналогічним до доведення теореми 1.1

Зауважимо, що оцінки (1.25) і (1.42) є рівномірними за всіма u і v та $\varphi(0)$, тобто ε_0 не залежить від керувань u і v та від початкової функції.

Наслідок 2. *При виконанні умов теореми 1.3 безпосередньо випливає оцінка:*

$$h\left(K(T), K^0(T)\right) \leq C\varepsilon, \tag{1.43}$$

де $K(T)$ – замикання множини досяжності системи (1.16), $K^0(T)$ – множина досяжності системи (1.37), $T = L\varepsilon^{-1}$.

Побудуємо алгоритм, коли керування усередненої системи обиратиметься з границі множини V тобто $v \in \partial V$. Точку на границі множини V визначає опорний вектор $w(t) \in R^m, (\|w(t)\| = 1)$. Системі (1.16) поставимо у відповідність наступну частково усереднену систему:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\bar{f}\left(y(t)\right) + A\left(y(t)\right)v_0\left(w\right)\right], \; y(0) = \varphi(0), \tag{1.44}$$

де $\bar{f}$ визначається з (1.18).

Алгоритм 4.

Встановимо відповідність між керуваннями $u(t,\varepsilon)$ и $w\,(t)$.

1. Кожному керуванню $w\,(t)$ покладемо у відповідність керування $u(t,\varepsilon)$ наступним чином:

а) зафіксуємо $T_0{>}0$. Розіб'ємо інтервал $\left[0,\, L\varepsilon^{-1}\right]$ точками $t_i = iT_0, \quad i = 0,1,...;$

б) обчислюємо $v_i = \frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v_0(w(t))dt \quad v_i \in V_{T_0}^i, \quad \lim\limits_{T_0\to\infty} V_{T_0}^i = V.$

в) будуємо керування $u(\varepsilon,t) = \{u_i(t),\ t_i{\le}t{<}t_{i+1},\ i = 0,1,\ldots\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови

$$\min_{u(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\psi\left(t,u\left(t\right)\right)dt - v_i\right\| = \left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\psi\left(t,u_i\left(t\right)\right)dt - v_i\right\|.$$

2. Кожному керуванню $u(t,\varepsilon)$ покладемо у відповідність керування $w(t)$ наступним чином:

$v_i = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\psi(t,u(t,\varepsilon))dt, \quad v_i \in V_{T_0}^i = \frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi(t,U)dt;$

б) знайдемо $\tilde{v}_i \in V$ із умови:

$$\min_{v\in V}\|v - v_i\| = \|\widetilde{v}_i - v_i\|\,.$$

За теоремою Каратеодорі [6] існують $v_i^j \in \partial V,\ \ \lambda_i^j \ge 0,\ \ \sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j = 1,\ \ r \le m{+}1$ такі, що $\widetilde{v}_i = \sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_i^j = \sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_0(w_i^j)$.

3. Задамо керування:

$$w(t) = \Big\{w_i^j \ \Big|\ \tau_i^{j-1} \le t \le \tau_i^j,\ \tau_i^0 = iT_0,\ \tau_i^j{-}\tau_i^{j-1} = T_0\lambda_i^j,\ j = \overline{1,r},$$

$$t \in \left[iT_0,(i{+}1)\,T_0\right),\ i = 0,1,....\}$$

Тоді

$$\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} v_0\left(w\left(t\right)\right)dt = \frac{1}{T_0}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j} v_0\left(w_i^j\right)dt = \frac{1}{T_0}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j} v_i^j dt = \sum_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_i^j = \tilde{v}_i.$$

Аналогічна до теореми 1.3, теорема справедлива для схеми ступінчастого усереднення за алгоритмом 4. обгрунтування алгоритму 4 проводиться аналогічно до алгоритму 3.

Зауваження 1. Побудова керування $v(t)$ за керуванням $u(t)$ у 2-му і 4-му алгоритмах не є конструктивною. Фактично стверджується тільки факт існування за теоремою Каратеодорі такого керування. Однак, такі побудови необхідні лише для доведення теореми, яка обгрунтовує метод усереднення. Для практичного застосування алгоритма необхідно за знайденим керуванням $v(t)$ спрощеної задачі будувати керування $u(t)$ вихідної задачі. Ця частина алгоритмів у всіх випадках є конструктивною.

Зауваження 2. Випадок неоднозначності $v^0(z)$ можливий та відповідає особливим керуванням. Тому цей випадок розглядається окремо.

1.2.4 Приклади

Приклад 3.3.5.1.Нехай $\psi(t,u) = A(t)u$, де

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}sin(t) & a_{12}cos(t) \\ a_{21}cos(t) & a_{22}sin(t) \end{pmatrix}, \quad u \in U = S_1(0).$$

Тоді

$$C\left(V,z\right) = C\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A(t)S_1(0)dt, z\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C\left(A(t)S_1(0), z\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} C\left(S_1(0), A^T(t)z\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[|a_{11}z_1 sin(t) + a_{21}z_2 cos(t)| + |a_{12}z_1 cos(t) + a_{22}z_2 sin(t)|\right]dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{{a_{11}}^2{z_1}^2 + {a_{21}}^2 z_2)^2} + \sqrt{{a_{12}}^2{z_1}^2 + {a_{22}}^2{z_2}^2}\right].$$

При цьому

$$u_1^*(t,z) = \text{sign}\left[a_{11}z_1 sin(t) + a_{21}z_2 cos(t)\right]$$

$$u_2^*(t,z) = \text{sign}\left[a_{12}z_1 cos(t) + a_{22}z_2 sin(t)\right].$$

Якщо $|a_{11}| = |a_{21}|$ і $|a_{12}| = |a_{22}|$, то $C\left(V, z\right) = \frac{2}{\pi}\big(|a_{11}| + |a_{12}|\big)\sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$, тобто $V = S_r(0),\ r = \frac{2}{\pi}\big(|a_{11}| + |a_{12}|\big)$

Якщо $a_{21} = a_{12} = 0$, то $C(V,z) = \frac{2}{\pi}(|a_{11}z_1| + |a_{22}z_2|)$, тобто $V = \{|v_1| \leq \frac{2}{\pi}|a_{11}|,\ \ |v_2| \leq \frac{2}{\pi}|a_{22}|\}$.

В цьому випадку зручно скористатися першим алгоритмом.

В загальному випадку перевірка $v \in V$ є важкою, тому скористаємося другим алгоритмом. У цьому випадку

$$v_1^0(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[a_{11}sin(t)u_1^*(t,z) + a_{12}cos(t)|u_2^*(t,z)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{{a_{11}}^2 z_1}{\sqrt{{a_{11}}^2{z_1}^2 + {a_{21}}^2 z_2)^2}} + \frac{{a_{12}}^2 z_1}{\sqrt{{a_{12}}^2{z_1}^2 + {a_{22}}^2 z_2)^2}}\right],$$

$$v_2^0(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[a_{21}cos(t)u_1^*(t,z) + a_{22}sin(t)|u_2^*(t,z)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a_{21}^2 z_2}{z a_{11}^2 z_1^2 + a_{21}^2 z_2^2} + \frac{a_{22}^2 z_2}{\sqrt{a_{12}^2 z_1^2 + a_{22}^2 z_2^2}}\right]$$

У випадку $a_{21} = a_{12} = 0$ при $z_1 = 0$ і $z_2 = 0$ значення $u_1^*(t,z), \quad u_2^*(t,z)$, визначаються із умов

$$(a_{11}z_1\sin(t) + a_{21}z_2\cos(t))u_1^*(t,z) = \max_{u\in U}(a_{11}z_1\sin(t) + a_{21}z_2\cos(t))u_1$$

$$(a_{12}z_1\cos(t) + a_{22}z_2\sin(t))u_2^*(t,z) = \max_{u\in U}(a_{12}z_1\cos(t) + a_{22}z_2\sin(t))u_1$$

Отже, неоднозначно визначається функція $v^0(z)$.

Приклад 3.3.5.2. Нехай $\psi(t,u) = A(t)u$, де

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix}, \quad u \in U = S_1(0), \quad f(t) = f^0 + \exp(-t), \quad f^0 > 0.$$

Тоді

$$V_t^{t+T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t)U\ dt \in conv(R^2),$$

$$C(V_t^{t+T}, z) = C\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t)U\ dt, z\right) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} C(U, A^T z)\ dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sqrt{f(t)^2 z_1^2 + f(t)^2 z_2^2}\ dt = ||z||\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)\ dt =$$

$$= ||z||\left(f^0 + \frac{1}{T}(\exp(-t) - \exp(-t-T))\right).$$

Отже,

$$V = \lim_{T\to\infty} V_t^{t+T} = S_{f^0}(0)$$

і

$$h(V_t^{t+T}, V) < \eta \quad \text{при} \quad T > \frac{1}{\eta}. \tag{1.45}$$

В данному випадку можна використати алгоритми 3 і 4, а крок ступінчастого розбиття T_0 обрати, використовуючи оцінку (1.45).

1.3 Близькість оптимальних значень критеріїв точної та усередненої задач

Розглянемо задачі оптимального керування (1.1),(1.2) і (1.4)(1.6) та задачу оптимального керування (1.16),(1.17) і відповідну задачу оптимального керування усередненою системою (1.19), яка побудована за алгоритмом 1 (або (1.34), яка побудована за алгоритмом 2, або (1.37), яка побудована за алгоритмом 3, або (1.44), яка побудована за алгоритмом 4) з критерієм якості (1.17) на траєкторіях відповідної усередненої системи.

Припустимо, що виконані умови:

C1) функція $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — задовольняє умову Ліпшиця з константою μ;

C2) задача (1.1),(1.2) (задача (1.16),(1.17)) має розв'язок, через u^* позначимо оптимальне керування цієї задачі.

Зауважимо, що множина (1.5) допустимих керувань вихідної системи (1.1) ((1.16)) є опуклим компактом, тоді і множина досяжності усередненої системи (1.4) (або (1.34), або (1.37), або (1.44)) є компактною [50], а значить задача (1.4),(1.6) (або кожна усереднена задача, побудована за алгоритмом 2, 3, 4) має розв'язок. Позначимо через v^* — оптимальне керування усередненої задачі (1.4),(1.6).

Близькість розв'язків вихідної функціонально-диференціальної системи і

усередненої, яка описується звичайними диференціальними рівняннями, встановлена у Теоремі 1.1. Використовуючи цей результат, оцінимо близькість значень термінальних критеріїв якості вихідної і усередненої задач на відповідних керуваннях.

Наступна теорема встановлює основний результат цього розділу — близькість значень термінальних критеріїв якості вихідної і усередненої задач на відповідних керуваннях.

Теорема 1.4. *Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови теореми 1 (або теореми 2), умови C1) і C2). Тоді для будь-яких* $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0\,(\eta, L) > 0$, *що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *і* $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *виконуються наступні нерівності:*

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \eta,$$

$$J\left[u_{v^*}\right] - J[u^*] < \eta,$$

$$\bar{J}\left[v_{u^*}\right] - \bar{J}[v^*] < \eta,$$

де u_{v^*} *— керування системи* (1.16), *побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню* v^* *усередненої задачі, а* v_{u^*} *— керування усередненої системи, побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню* u^* *задачі* (1.16), (1.17).

Спочатку доведемо наступні леми.

Лема 4.1. Нехай виконані умови C1), C2) і існує допустиме керування $v^0 \in V$ таке, що відповідна йому траєкторія $y(t)$ близька до оптимальної траєкторії $x^*(t)$ задачі (1.1),(1.2), а саме, для деякого малого $\eta_1 > 0$ при $t \in [t_0, T]$ виконується $|x^*(t) - y(t)| < \eta_1$.

Тоді $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_1$.

Доведення. Нехай, наприклад, $J[u^*] \leqslant \bar{J}[v^*]$. Із умови C1) і вибору керування v^0 маємо

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^0]\right| = |\Phi(x^*(T)) - \Phi(y(T))| \leqslant \mu|x^*(T) - y(T)| \leqslant \mu\eta_1,$$

тобто,

$$J[u^*] \geqslant \bar{J}[v^0] - \mu\eta_1. \tag{1.46}$$

Оскільки v^* — оптимальне керування задачі (1.4)(1.6), то

$$\bar{J}[v^*] \leqslant \bar{J}[v^0]. \tag{1.47}$$

Із (1.46) і (1.47) отримаємо: $\bar{J}[v^0] \geqslant \bar{J}[v^*] \geqslant J[u^*] \geqslant \bar{J}[v^0] - \mu\eta_1$ та, віднімаючи $\bar{J}[v^*]$ з останньої нерівності, маємо $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geqslant \bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] - \mu\eta_1$.

Тоді із (1.47) виконується неравівність $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \geqslant -\mu\eta_1$. Але за припущенням $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leqslant 0 < \mu\eta_1$. Отже, $-\mu\eta \leqslant J[u^*] - \bar{J}[v^*] < \mu\eta_1$, лема доведена.

Лемма 4.2. Нехай виконана умова C1) та існує таке керування u^0 для задачі (1.1),(1.2), що відповідна йому траекторія $x(t)$ є близькою до оптимальної траекторії $y^*(t)$ задачі (1.4),(1.6), тобто, для малого $\eta_2 > 0$ при $t \in [t_0, T]$ виконується $|x(t) - y^*(t)| < \eta_2$.

Тоді $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_2$.

Доведення. Нехай $J[u^*] > \bar{J}[v^*]$. Як і в доведенні леми 4.1, маємо

$$J[u^0] \geqslant J[u^*] > \bar{J}[v^*] \geqslant J[u^0] - \mu\eta_2.$$

Віднімаючи $J[u^*]$ із останньої нерівності, отримаємо

$$\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geqslant J[u^0] - J[u^*] - \mu\eta_2.$$

Тоді є справедливою нерівність $\bar{J}[v^*] - J[u^*] \geqslant -\mu\eta_2$, або $J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leqslant \mu\eta_2$. Але за умовою леми $J[u^*] - \bar{J}[v^*] > 0 > -\mu\eta_2$. Отже, $-\mu\eta < J[u^*] - \bar{J}[v^*] \leqslant \mu\eta_2$, і лема доведена.

Лемма 4.3 Нехай існують одночасно і u^0 — допустиме керування для задачі (1.1),(1.2), що відповідна йому траекторія $x(t)$ є близькою до оптимальної траекторії $y^*(t)$ задачі (1.4),(1.6), тобто, для малого $\eta_2 > 0$ при $t \in [t_0, T]$ виконується $|x(t) - y^*(t)| < \eta_2$. і v^0 — допустиме керування для задачі (1.4),(1.6), таке, що відповідна йому траекторія $y(t)$ близька до оптимальної траекторії $x^*(t)$ задачі (1.1),(1.2), а саме, для деякого малого $\eta_1 > 0$ $\forall t \in [t_0, T]$ виконується $|x^*(t) - y(t)| < \eta_1$,

Тоді

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_3,$$

$$J[u^0] - J[u^*] \leqslant \sigma\eta_3,$$

$$\bar{J}[v^0] - \bar{J}[v^*] \leqslant \sigma\eta_3,$$

де $\eta_3 = \max\{\eta_1, \eta_2\}$.

Доведення. З двох оптимальних значень функціоналів вихідної і усередненої задач $J[u^*]$ и $\bar{J}[v^*]$, одна обов'язково больша (або дорівнює) іншій, тому виконується або лема 4.1, або лема 4.2, та виконується нерівність $\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \mu\eta_3$. Тому

$$J[u^0] - J[u^*] = J[u^0] - \bar{J}[v^*] + \bar{J}[v^*] - J[u^*] \leqslant$$

$$\leqslant |J[u^0] - \bar{J}[v^*]| + |\bar{J}[v^*] - J[u^*]| \leqslant \mu\eta_2 + \mu\eta_3 < \sigma\eta_3,$$

де $\sigma = 2\mu$. Остання нерівнясть в лемі доводиться аналогічно. Лема доведена.

Наступна теорема доводить основний результат — близькість термінальних критеріїв якості вихідної і усередненої задач на відповідних керуваннях.

Теорема 3.5. Нехай в області $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$

виконані умови теореми 3.1, умови C1) і C2). Тоді для будь-яких $\eta > 0$ і $L > 0$ існує таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ виконуються наступні нерівності:

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \eta,$$

$$J\left[u_{v^*}\right] - J[u^*] < \eta,$$

$$\bar{J}\left[v_{u^*}\right] - \bar{J}[v^*] < \eta,$$

де u_{v^*} — керування системи (1.16), побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню v^* усередненої задачі, а v_{u^*} — керування усередненої системи, побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню u^* задачі (1.16), (1.17).

Доведення. Зауважимо, що алгоритм методу усереднення дозволяє побудувати у відповідність керуванню v^* задачі (1.4), (1.6) таке допустиме керування u_{v^*} задачі (1.1), (1.2), що відповідні траєкторії будуть близькими: $|x(t, u_{v^*}) - y^*(t, v^*)| < \eta$. Позначимо через ε_1 значення малого параметра ε_0, для якого за теоремою 3.1 виконується остання нервність. Цей же алгоритм дозволяє побудувати у відповідність керуванню u^* задачі (1.1), (1.2) таке допустиме керування v_{u^*} задачі (1.4), (1.6), що існує значення малого параметра ε_2 при якому відповідні траєкторії будуть близькими: $|x^*(t, u^*) - y(t, v_{u^*})| < \eta$. Застосовуючи лему 4.3, отримуємо нерівності теореми. Теорему доведено.

Отже, керування u_{v^*} є асимптотично оптимальним дляточної задачі (1.1), (1.2), а керування v_{u^*} є асимптотично оптимальним для усередненої задачі (1.4), (1.6).

Зауважимо, по-перше, що для періодичного випадку $\eta = \varepsilon C$, по-друге, що аналогічна теорема може бути доведена для усереднених задач, побудованих за алгоритмом 2 або 4.

1.4 Числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою

Таким чином, обгрунтовано **числово-асимптотичний метод** розв'язання задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою (1.1), (1.2), реалізація якого здійснюється наступним чином:

1. Для керованої функціонально-диференціальної системи (1.1) будуємо усереднену систему (1.4).

2. Будуємо множину допустимих керувань V усередненої системи (1.4) за формулою (1.5).

3. Розв'язуємо усереднену задачу оптимального керування (1.4),(1.6).

4. За оптимальним керуванням v^* усередненої задачі (1.4),(1.6) з використанням алгоритму відповідності керувань будуємо асимптотично оптимальне керування u_{v^*} вихідної системи (1.1), (1.2).

5. Будуємо траекторію $x(t, u_{v^*})$ вихідної системи (1.1), яка відповідає керуванню u_{v^*}.

6. Для асимптотично оптимального керування u_{v^*} знаходимо значення функціоналу якості (1.2), яке згідно з теоремою 4.1 відрізняється від оптимального значення на малу величину η.

Розділ 2 Збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій в методі усереднення задач оптимального керування

2.1 Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі

На можливість застосування методу усереднення до розв'язування задач оптимального керування на асимптотично великих часових інтервалах вперше звернув увагу М.М. Моісеєв ([42, 43]). Зокрема, для знаходження асимптотично оптимального керування він виділив два підходи:

1) усереднення крайової задачі принципа максимума Л. С. Понтрягіна;

2) безпосереднє усереднення рівнянь керованого руху.

При цьому основна увага акцентувалася на практичному застосуванні даних підходів для розв'язування конкретних прикладних задач.

В роботах В. О. Плотнікова та його школи (див., наприклад, [44]) дано строге обґрунтування застосування методу усереднення до задач керування. Але при цьому множина допустимих керувань усередненої системи будувалась спеціальним чином за множиною допустимих керувань вихідної системи, що технічно складно, оскільки для такої побудови необхідно розв'язувати деяке інтегральне рівняння.

Ще один підхід, розглянутий, наприклад, в [52, 53], пов'язаний з побудовою за вихідною задачею диференціального включення, яке потім досліджувалося

методом усереднення, тобто оригінальна задача керування системою звичайних диференціальних рівнянь замінювалася новим об'єктом більш складної природи – диференціальним включенням.

Підхід, відмінний від згаданих вище, розроблений в роботі [45]. А саме, спочатку проводилося усереднення правих частин системи за часом, який явно входить в праву частину, при цьому функція керування $u(t)$ вважалася параметром (за нею усереднення не проводилося). Такий підхід, на відміну від інших, згаданих вище, має свої переваги: по-перше, усереднений об'єкт будується досить просто (усередненням правих частин за часом, який входить явно); по-друге, множина допустимих керувань оригінальної та усередненої задач співпадає і не потребує, як в [44] ніяких додаткових конструкцій. Однак авторам довелося накласти на функції керування $u(t)$ умову асимптотичної сталості, а саме, для кожного керування $u(t) \in U$ існує стала u_0 така, що $|u\,(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$. При цьому $\varphi(t)$ не залежить від $u(t)$. Зауважимо, що подібна умова виникала і в [42, 43].

Основні труднощі, які виникають у згаданих вище підходах, – це довести близькість відповідних (з однаковими початковими умовами) розв'язків точної і усередненої системи на асимптотично великих (порядка ε^{-1}) інтервалах. Якщо така близькість отримана, то подальші роздуми більш-менш аналогічні.

Мета цього розділу – обґрунтувати підхід роботи [45] до розв'язування задач оптимального керування, знявши при цьому умову асимптотичної сталості.

Для нелінійної задачі оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь зі швидко осцилюючими параметрами обґрунтоване застосування методу усереднення, згідно з яким швидкоколивні параметри замінюються на усереднені. Доведено, що оптимальне керування усередненої задачі

є "майже оптимальним"для точної задачі. Досліджена збіжність оптимальних розв'язків вихідної задачі до оптимальних розв'язків усередненої.

2.1.1 Постановка задачі

Розглянемо нелінійну задачу оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними:

$$\dot{x} = X\left(\frac{t}{\varepsilon},\ x,\ u\left(t\right)\right),\ x\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0 \tag{2.48}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^T L\left(t,\ x_\varepsilon\left(t\right),\ u\left(t\right)\right)dt + \Phi(x_\varepsilon\left(T\right)) \longrightarrow inf. \tag{2.49}$$

Тут $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$,

Тут $\varepsilon > 0$ малий параметр, $T > 0$ — задана стала, x — фазовий вектор в R^d, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який належить деякій функціональній множині.

Далі будемо позначати через $x(t, u)$ – розв'язок задачі Коші (2.48),(2.88), який відповідає керуванню $u(t)$. Якщо не буде двозначності, то залежність від u будемо опускати та писати $x(t)$.

При умові існування рівномірних за $x \in R^d$ середніх

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s X(t,\ x,\ u)dt = X_0(x,\ u) \tag{2.50}$$

задачі оптимального керування (2.48)-(2.49) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність на відрізку $[0,\ T]$ більш просту задачу оптимального керування

$$\dot{y} = X_0\left(y,\ u\left(t\right)\right),\ y\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0 \tag{2.51}$$

з критеріями якості

$$J_0\left[u\right] = \int_0^T L(t,\ y\left(t\right),\ u\left(t\right))dt + \Phi(y\left(T\right)) \to inf \tag{2.52}$$

Головний результат даної секції – це доведення збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точних задач (2.48)-(2.49) і (2.88)-(2.89) до оптимальних керувань і траєкторій усереднених задач. При цьому також встановлюється, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальне"для точної, тобто, з точністю до малого параметра ε реалізується мінімум критерія якості.

Далі в роботі будемо використовувати поняття інтегральної неперевності вектор-функції за параметром λ [57]. А саме, нехай $X(t,\ x,\ \mu)$ – d-вимірна вектор-функція, визначена в області $Q = \left\{[0, T] \subset R^1 \times D \subset R^d \times \mu \in \Lambda\right\}$.

Будемо говорити, що функція $X(t,\ x,\ \mu)$ інтегрально-неперервна в області Q за параметром λ в точці згущення $\lambda_0 \in \Lambda$, якщо для довільного $t \in [0,\ T]$ і $x \in D$ має місце граничне співвідношення:

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \int_0^t X(s,\ x,\ \mu)\ ds = \int_0^t X(s,\ x,\ \mu_0)ds \tag{2.53}$$

Добре відомо [ ], що існування границь (2.50) і (2.91) рівносильне інтегральній неперервності функцій $Y\left(t,\ x,\ u,\ \varepsilon\right) = X(\frac{t}{\varepsilon},\ x,\ u)$ і $Y_1\left(t,\ x,\ \varepsilon\right) = X(\frac{t}{\varepsilon},\ x)$ відповідно в точці $\varepsilon = 0$, якщо покласти $Y\left(t,\ x,\ u,\ 0\right) = X_0(x,\ u)$, а $Y_1\left(t,\ x,\ 0\right) = X_0(x)$.

Відносно інтегральної неперервності будемо використовувати наступну теорему.

Теорема 2.5 (Красносельського-Крейна)**.** *Нехай*

1) $X(t,\ x,\ \mu)$ *неперервна по* t *в* Q*;*

2) $X(t,\ x,\ \mu)$ *рівномірно неперервна за* x *в* Q*, рівномірно відносно* x, λ*;*

3) $X(t,\ x,\ \mu)$ *інтегрально-неперервна за* μ *в точці* $\mu = \mu_0$*.*

Тоді, якщо $x_\lambda(t)$ *– сім'я кусково-неперервних за* $t \in [0,\ T]$ *функцій із значеннями в* D*, рівномірно відносно* $t \in [0,\ T]$*, яке збігається при* $\mu \to \mu_0$ *до граничної функції* $x_{\mu_0}(t)$ *то*

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \int_0^t X(s,\ x_\mu\ (s)\,,\ \mu) ds = \int_0^t X(s,\ x_{\mu_0}(s)\,,\ \mu_0) ds \tag{2.54}$$

2.1.2 Умови збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій точної задачі до оптимальних керувань, траєкторії відповідних усереднених задач

Для задачі (2.48)-(2.49) будемо вважати, що виконуються наступні умови:

Умова 4.1.1. Допустимим керуванням є m-вимірні вектор-функції $u(\cdot)$ такі, що $u(\cdot) \in U$ – компактній множині в $L_2([0,\ T])$;

Умова 4.1.2. Функція $X(t,\ x,\ u)$ визначена і неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_0 = \{t \geq 0,\ x \in R^\alpha,\ u \in U\}$, і:

1) $X(t,\ x,\ u)$ задовольняє в Q умову лінійного росту зі сталою M, тобто

$$|X(t,\ x,\ u)| \leq M(1 + |x|)$$

для будь-якого $(t,\ x,\ u) \in Q_0$;

2) $X(t,\ x,\ u)$ задовольняє в Q_0 умову Ліпшиця за $x \in R^d$ і $u \in R^m$ зі сталою λ, тобто

$$|X\,(t,\ x,\ u) - X(t, x_1,\ u_1)| \leq \lambda(|x - x_1| + |u - u_1|)$$

для довільних $(t,\ x,\ u)$ і $(t,\ x_1,\ u_1)$ в Q_0;

Умова 4.1.3. Рівномірно відносно $x \in R^d$ і $u \in R^m$ існує границя (2.50).

Умова 4.1.4. Функція $L(t,\ x,\ u)$ визначена і неперервна за сукупністю аргументів в області $Q_1 = \left\{t \in [0,\ T]\,,\ x \in R^d,\ u \in R^m\right\}$, причому

1) $L(t,\ x,\ u)$ рівномірно відносно $t \in [0,\ T]$ і $u \in R^m$ неперервна за $x \in R^d$

2) $L(t,\ x,\ u)$ задовольняє за змінною u в області Q_1 умову Ліпшиця з константою $\lambda > 0$

3) функція $\Phi : R^\lambda \to R^1$ неперервна за x.

Відзначимо, що в силу умов 1), 2) із 4.1.2 за теоремою Каратеодорі маємо, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші $x(t, u)$ існує, єдиний на всьому відрізку $[0,\ T]$.

При цьому $x(t,\ u)$ – абсолютно неперервна функція. Із умови 4.1.3 також слідує, що функції X_0 і f_0 також задовольняють умову Ліпшиця за λ. Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (2.51), (2.92) $y(t,\ u)$ існує, єдиний на всьому відрізку $[0,\ T]$ і є абсолютно неперервними функціями.

Таким чином, критерії (2.49),(2.52) мають зміст при всіх допустимих керуваннях.

2.1.3 Збіжність оптимальних значень критерія якості точної задачі до оптимальних значень критерія якості відповідних усереднених задач

Наступна теорема грає гарантує близькість відповідних розв'язків задач Коші (2.48),(2.51) при малих ε на скінченному проміжку часу.

Відзначимо, що вона є узагальненням першої теореми М. Боголюбова та дає обґрунтування методу усереднення на випадок залежності правих частин від

функціональних параметрів.

Далі будемо вважати, що $T = 1$.

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 4.1.1-4.1.3. Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, x_0)$ таке, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для $x(t,u)$ і $y(t,u)$ розв'язків задач Коші(2.48) і (2.51) відповідно справедлива оцінка*

$$|x\,(t,\ u) - y(t,\ u)| < \eta \tag{2.55}$$

для всіх $t \in [0,\ T]$ і всіх допустимих керувань $u(t)$.

Доведення. Візьмемо довільне $\eta > 0$ і зафіксуємо його. Для довільних $\varepsilon > 0$ і довільного допустимого керування $u(t)$ оцінимо різницю між $x(t,u)$ і $y(t,u)$. Для простоти позначимо $x(t,u) = x(t)$, а $y(t,u) = y(t)$. Будемо також опускати залежність $x(t)$ від ε. Оскільки U – компакт в $L_2([0,1])$, то для даного η існує скінченна сітка $\frac{\eta e^{-\lambda}}{4\lambda} : u_1\,(t)\,, \ldots u_n(t)$, тут $N = N(\eta)$.

Тоді для обраного керування $u(t)$ існує представник $u_j(t)$ із сітки такий, що

$$\|u\,(\cdot) - u_j(\cdot)\|_{\alpha_2} < \frac{\eta}{4\lambda} e^{-\lambda} \tag{2.56}$$

Далі зауважимо, що використовуючи для $X(t,\ x,\ u)$ і $X_0(x,\ u)$ умову лінійного по $x(t)$ росту, нерівність Гронуолла для розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ на $[0,\ 1]$ легко отримати оцінки

$$|x(t)| \le C,\ |y(t)| \le C \tag{2.57}$$

де стала C залежить лише від M і x_0.

Використовуючи умову 2) із 4.1.2 ми маємо:

$$|x(t) - y(t)| \le \left| \int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x(s), u_j(s)\right)\right) - X_0\left(y\,(s)\,, u_j\,(s)\right) ds \right| +$$

$$+\int_0^t \left|X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\left(s\right), u\left(s\right)\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\left(s\right), u_j\left(s\right)\right)\right| ds+$$

$$+\int_0^t |X_0\left(y\left(s\right), u\left(s\right)\right) - X_0\left(y\left(s\right), u_j\left(s\right)\right)|ds \leq$$

$$\leq \left|\int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\left(s\right), u_j\left(s\right)\right)\right) - X_0\left(y\left(s\right), u_j\left(s\right)\right) ds\right| +$$

$$2\lambda \left(\int_0^1 |u\left(s\right) - u_j(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq I_1 + \frac{\eta}{2} e^{-\lambda} \tag{2.58}$$

Оцінимо тепер перший доданок I_1 в (2.58) і ми маємо:

$$J_1 \leq \lambda \int_0^t |x(s) - y(s)|ds+$$

$$+\left|\int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\left(s\right), u_j(s)\right) - X_0(y\left(s\right), u_j\left(s\right))ds\right)\right| \tag{2.59}$$

Оскільки кожну функцію із $L_2([0,1])$ можна апроксимувати в L_2-нормі неперервною функцією (наприклад, частковими сумами Фур'є за синусами і косинусами), а кожну неперервну на відрізку функцію можна апроксимувати кусково-сталою, то для $u_j(t)$ оберемо неперервну $u_c(t)$ і кусково-сталу $u_p(t)$ функції так, щоб виконувалися нерівності

$$\|u_j - u_c\|_{L_2} < \frac{\eta e^{-\lambda}}{16\lambda} \tag{2.60}$$

і

$$|u_e\left(t\right) - u_p(t)| < \frac{\eta}{16\lambda} e^{-\lambda} \tag{2.61}$$

при $t \in [0,\ 1]$.

Тоді із (4.1.3.4) - (4.1.3.6) ми маємо оцінку

$$J_1 \leq \lambda \int_0^t |x\left(s\right) - y\left(s\right)|ds+$$

$$+\left|\int_0^t \left(X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\left(s\right), u_p\left(s\right)\right) - X_0\left(y\left(s\right), u_p\left(s\right)\right)\right) ds\right| + \frac{\eta}{4}e^{-\lambda}. \tag{2.62}$$

За необхідності, поділивши відрізок $[0,1]$точками $\{t_k\}_0^R$ $(t_0 = 0,\ t_R = 1)$, можна вважати, що на кожному відрізку $[t_k, t_{k+1})$ всі компоненти вектор-функції $u_p(t)$ приймають сталі значення, тобто $u_p\left(t\right) = u_p(t_k)$ при $t \in [t_k,\ t_{k+1})$. Тут, звичайно, натуральне $R = R(\eta)$ і фіксоване при фіксованому виборі η.

Оберемо тепер натуральне n і розіб'ємо відрізок $[0,1]$ точками $t_i = \frac{i}{n}(i = \overline{0,\ n})$ на n рівних частин. Будемо вважати n настільки великим, щоб на кожному інтервалі $[t_k, t_{k+1})$ були точки t_i. В результаті ми матимемо n інтервалів виду $[t_i,\ t_{i+1})$. Якщо при цьому для деяких k і i $t_i < t_k < t_{i+1}$, то інтервал $[t_i, t_{i+1})$ розіб'ємо на два інтервала $[t_i, t_k)$ і $[t_k, t_{i+1})$. В результаті відрізок $[0,1]$ розіб'ється на не більше, ніж $n + R$ інтервалів, довжина кожного з яких не перевищує $\frac{1}{n}$. Точки розбиття знову позначимо t_i, а загальну кількість інтервалів $[t_i,\ t_{i+1})$ позначимо через $K = K(\eta)$. При цьому, очевидно, $K \leq n + R$, а також $u_p\left(t\right) = u_p(t_i)$ при $t \in [t_i,\ t_{i+1})$. Позначимо $y_i = y(t_i)$, а $u_p\left(t_i\right) = u_{pi}$.

Тоді

$$\int_0^t \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\left(s\right), u_p\left(s\right)\right) - X_0\left(y\left(s\right), u_p\left(s\right)\right)\right] ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{K} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y\left(s\right), u_{pi}\right) - X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y_i, u_{pi}\right)\right] ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{K} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X_0\left(y_i, u_{pi}\right) - X_0\left(y\left(s\right), u_{pi}\right)\right] ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{K} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X\left(\frac{s}{\varepsilon}, y_i, u_{pi}\right) - X_0\left(y_i, u_{pi}\right)\right] ds = J_2 + J_3 + J_4 \tag{2.63}$$

Оцінимо кожний доданок в (2.63). Використовуючи для $X(t,\ x,\ u)$ умову

лінійного росту і ліпшицевість, ми маємооцінку

$$J_2 \leq \sum_{i=0}^{K} \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} |y(s) - y_i| \tag{2.64}$$

Але

$$|y(s) - y_i| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |X_0(y(s),\ u(s))| ds \leq$$

$$\leq M \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 + |y(s)|) ds \leq \frac{M(1+C)}{n}.$$

в силу (2.57) і вибору довжини розбиття. Звідси і із (2.64) для J_2 ми маємо оцінку

$$J_2 \leq \sum_{i=0}^{K} \lambda \frac{M(1+C)}{n^2} \leq \lambda M(1+C) \frac{n+R}{n^2} \tag{2.65}$$

Аналогічно ми можемо оцінити J_3 в (2.63).

Тоді для обраного $\eta > 0$ можна вказати таке число n, що для всіх $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$J_2 + J_3 \leq \frac{\eta}{6} e^{-\lambda} \tag{2.66}$$

Тепер зафіксуємо n. Оцінимо J_4 в (2.63). За умови 4.1.3 функція $X(\frac{s}{\varepsilon},\ x,\ u)$ рівномірно відносно $x \in R^d,\ u \in R^m$ інтегрально неперервна в точці $\varepsilon = 0$. Тому існує ε_0 таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ і фіксованому n, величина J_4 задовольняє оцінку

$$J_4 \leq \frac{\theta}{12} e^{-\lambda} \tag{2.67}$$

Проведені вище викладки можна застосовувати до кожної функції $u_1(t)$,... $u_n(t)$ із побудованої сітки. В силу її скінченності ε_0 можна обрати універсальним для кожної із функцій із сітки. Тоді із (2.58), (2.62), (2.66), (2.67) для $\varepsilon < \varepsilon_0$ нерівність (2.55) виконується рівномірно за всіма допустимими керуваннями, що доводить теорему 4.1.2.1.

Зауваження 2.1. *Зазначимо, що ε_0 із теореми 4.2 не залежить від допустимих керувань тобто, оцінка (2.55) є рівномірною за всіма допустимими керуваннями.*

Зауваження 2.2. *Якщо в умовах теореми 4.2 функція $X(t,\ x,\ u)$ обмежена в Q, то $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ – залежить лише від η і не залежить від x_0. Таким чином, в цьому випадку оцінка (2.55) рівномірна і по $x_0 \in R^d$.*

Зауваження 2.3. *Твердження теореми 4.2 не є наслідком жодної із схем часткового усереднення із [50].*

Нехай

$$J_\varepsilon^* = \inf_{u(\cdot)\in U} J_\varepsilon\left[u\right] ,$$

$$J_0^* = inf J_0[u].$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями і критеріями якості точної (2.48)-(2.49) і усередненої (2.51)-(2.52) задач.

Теорема 2.7. *Нехай виконані умови 4.1.1-4.1.4. Тоді задачі (2.48)-(2.49) і (2.51)-(2.52) мають розв'язки $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$, $(y^*(t), u_*(t))$, відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$ при $\varepsilon \to 0$;

2)для довільного $\eta > 0$ існує ε_0 таке, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \eta \tag{2.68}$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$, *така що*

$$x^*_{\varepsilon_n}(t) \to y^*(t) \tag{2.69}$$

рівномірно на $[0,\ T]$, *а*

$$u^*_{\varepsilon_n}(t) \to u^*(t) \tag{2.70}$$

в $L_2([0,\ T])$.

Якщо при цьому усереднена задача (2.51),(2.52) має єдиний розв'язок, то збіжності (2.69) і (2.70) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведемо спочатку неперервність $J_\varepsilon(u)$ за $u \in L_2([0,\ 1])$ для кожного $\varepsilon > 0$. Нехай $u_1(t)$, $u_2(t)$ довільні допустимі керування для задачі (2.48), (2.49), а $x(t, u_1), x(t, u_2)$ відповідні траєкторії.

Використовуючи умову 2) із умови 4.1.2 і неперервність Гронуолла, маємо

$$\sup_{t\in[0,1]} |x(t,\ u_1) - x(t,\ u_2)| \le \lambda \|u_1 - u_2\|_{L_2} e^{\lambda}. \tag{2.71}$$

Отже,

$$|J_\varepsilon(u_1) - J_\varepsilon(u_2)| \le$$
$$\le \int_0^1 |L(t, x(t, u_1), u_1(t)) - L(t, x(t, u_2), u_2(t))| ds +$$
$$+ |\Phi(x(1, u_1)) - \Phi(x(1, u_2)|.$$

Використовуючи умову 4.1.4 ми маємо

$$|J_\varepsilon(u_1) - J_\varepsilon(u_2)| \le$$
$$\le \int_0^1 |L(t, x(t, u_1), u_1(t)) - L(t, x(t, u_2), u_1(t))| dt +$$

$$+\lambda\|u_1-u_2\|_{L_2}+|\Phi\left(x\left(1,\ u_1\right)\right)-\Phi(x\left(1,\ u_2\right)).| \tag{2.72}$$

Оцінка (2.57) є рівномірною за всіма допустимими $u(t)$. Тому із (2.57) маємо, що $x(t,u)$ не виходить із B_C-шара радіуса C з центром в нулі при $t\in[0,1]$. В силу умови 1) із 4.1.4 і теореми Кантора, функція $L(t,x,u)$ буде рівномірно неперервною за $x\in B_C$, рівномірно відносно $t\in[0,1]$ і $u\in R^m$. Тому із (2.71) і (2.72) слідує неперервність $J_\varepsilon(u)$ по L_2-нормі.

Аналогічними розсудами встановлюємо неперервність по u і функціонала $J_0(u)$. Враховуючи тепер компактність множини допустимих керувань, встановлюємо існування $\left(x_\varepsilon^*\left(t\right),\ u_\varepsilon^*\left(t\right)\right)$, $\left(y^*\left(t\right),\ u^*\left(t\right)\right)$ – оптимальних розв'язків задач (2.48),(2.49) і (2.51),(2.52)

відповідно.

Доведемо тепер, що $J_\varepsilon^*\to J_0^*$ при $\varepsilon\to 0$. Оберемо довільне $\eta>0$ і зафіксуємо його.

Тоді

$$J_\varepsilon^*\le J_\varepsilon\left(u^*\right)=J_0^*+J_\varepsilon\left(u^*\right)-J_0(u^*). \tag{2.73}$$

Але

$$|J_\varepsilon\left(u^*\right)-J_0(u^*)|\le\int_0^1|L(t,x\left(t,u^*\right),u^*(t))-L(t,y(t),u^*(t))|dt+$$
$$+|\Phi(x\left(1,\ u^*\right)-\Phi(y\left(1\right))| \tag{2.74}$$

Із теореми 4.1.2.1 слідує, що

$$\max_{t\in[0,\ 1]}|x\left(t,\ u^*\right)-y^*(t)|\to 0,\ \varepsilon\to 0. \tag{2.75}$$

Враховуючи тепер рівномірну неперервність за $x\in B_C$ функції $L(t,\ x,\ u)$ рівномірно відносно $[t\in[0,\ 1]$ і $u\in R^m$ із (2.74), (2.75) і умови 4.1.4 слідує

існування $\varepsilon_0 > 0$ такого, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ ми маємо

$$|J_\varepsilon(u^*) - J_0| < \eta,$$

тому

$$J_\varepsilon^* < J_0^* + \eta. \tag{2.76}$$

З іншої сторони, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ ми маємо

$$J_0^* \leq J_0(u_\varepsilon^*) = J_\varepsilon^* + J_0(u_\varepsilon^*) - J_\varepsilon(u_\varepsilon^*) \tag{2.77}$$

Аналогічно до (2.74)-(2.76) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ ми маємо

$$|J_0(u_\varepsilon^*) - J_\varepsilon(u_\varepsilon^*)| < \eta$$

а, отже

$$J_0^* < J_\varepsilon^* + \eta \tag{2.78}$$

Із (2.76) і (2.78) слідує що

$$J_\varepsilon^* \to J_0^* \quad as \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.79}$$

Отже, твердження 1) теореми доведене.

Доведемо тепер твердження 2). Ми маємо

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_\varepsilon(u^*) - J_\varepsilon(u^*)|.$$

Це доводить твердження 2).

Доведемо твердження 3). Оскільки U – компакт в $L_2([0,1])$, то із сімейства u_ε^* можна виділити підпослідовність $u_{\varepsilon_n}^*$, яка сходиться в $L_2([0,1])$.

Нехай

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} u_{\varepsilon_n}^* = u_0 \tag{2.80}$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{z}_{\varepsilon_n} = X\left(\frac{s}{\varepsilon_n},\ z_{\varepsilon_n},\ u_0\right),\ z_{\varepsilon_n}(0) = x_0, \tag{2.81}$$

і

$$\dot{y} = X_0(y,\ u_0),\ y(0) = x_0. \tag{2.82}$$

Із (2.71) слідує що

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} \left|x^*_{\varepsilon_n}(t) - z_{\varepsilon_n}(t)\right| \to 0,\ \varepsilon_n \to 0. \tag{2.83}$$

А із теореми 4.1.2.1 слідує, що

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} \left|z_{\varepsilon_n}(t) - y(t)\right| \to 0,\ \varepsilon_n \to 0. \tag{2.84}$$

Тоді із(2.83) і (2.84) маємо

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} \left|x^*_{\varepsilon_n}(t) - y(t)\right| \to 0,\ \varepsilon_n \to 0 \tag{2.85}$$

Таким чином, ми маємо

$$J^*_{\varepsilon_n} = J_{\varepsilon_n}\left(u^*_{\varepsilon_n}\right) = \int_0^1 L(t,\ x^*_{\varepsilon_n}(t),\ u^*_{\varepsilon_n}(t))dt + \Phi(x^*_{\varepsilon_n}(1)) =$$

$$= \int_0^1 L(t,\ x^*_{\varepsilon_n}(t),\ u_0(t))dt + \Phi(x^*_{\varepsilon_n}(1)) +$$

$$+ \int_0^1 L(t,\ x^*_{\varepsilon_n}(t),\ u^*_{\varepsilon_n}(t)) - L(t,\ x^*_{\varepsilon_n}(t),\ u_0(t))]dt \tag{2.86}$$

Із умови 2) із 4.1.4 і із (2.80) слідує, що останній доданок в (2.86) прямує до нуля при $\varepsilon_n \to 0$. Переходячи до границі в рівності (2.86) при $\varepsilon_n \to 0$ з (4.1.3.21) і (4.1.3.27), ми маємо

$$J^*_0 = \int_0^1 L(t,\ y(t),\ u_0(t))dt + \Phi(y(1)) \tag{2.87}$$

Отже, $(y(t), u_0(y)$ – оптимальний розв'язок усередненої задачі (2.51) - (2.52), що доводить твердження 3) теореми.

Якщо задача (2.51), (2.52) має єдиний розв'язок, то з доведеного вище випливає, що довільна збіжна послідовність $(u^*_{\varepsilon_n}(t), x^*_{\varepsilon_n}(t)))$ збігається до однієї і тієї ж границі. Це доводить останнє твердження теореми 4.1.2.2.

2.2 Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для лінійних звичайних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі

2.2.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними, лінійну за керуванням

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon},\ x\right) + f_1\left(x\right)u\left(t\right),\ x\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0 \tag{2.88}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^T \left[A\left(t,\ x_\varepsilon\left(t\right)\right) + B\left(t,\ u\left(t\right)\right)\right]dt + \Phi(x_\varepsilon\left(T\right)) \longrightarrow inf. \tag{2.89}$$

Також для задачі (2.88) розглядатимемо квадратичний за керуванням критерій

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^T \left[A(t,\ x_\varepsilon(t)) + u^2(t)\right]dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \longrightarrow inf. \tag{2.90}$$

Тут $\varepsilon > 0$ малий параметр, $T > 0$ — задана стала, x — фазовий вектор в R^d, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який належить деякій функціональній

множині.

Далі будемо позначати через $x(t,u)$ – розв'язок задачі Коші (2.48),(2.88), який відповідає керуванню $u(t)$. Якщо не буде двозначності, то залежність від u будемо опускати та писати $x(t)$.

При умові існування рівномірного за $x \in R^d$ середнього

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t,\ x)dt = f_0(x) \tag{2.91}$$

задачі оптимального керування (2.88),(2.89) зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність на відрізку $[0,\ T]$ більш проста задача оптимального керування

$$\dot{y} = f_0\left(y\right) + f_1\left(y\right)u\left(t\right),\ y\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0, \tag{2.92}$$

з критеріями якості відповідно

$$J_0\left[u\right] = \int_0^T \left[A\left(t,\ y\left(t\right)\right) + B\left(t,\ u\left(t\right)\right)\right]dt + \Psi(y\left(T\right)) \to inf, \tag{2.93}$$

і

$$J_0\left[u\right] = \int_0^T \left[A\left(t,\ y\left(t\right)\right) + u^2\left(t\right)\right]dt + \Psi(y\left(T\right)) \to inf. \tag{2.94}$$

Головний результат даної секції – це доведення збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точних задач (2.88),(2.89) і (2.88),(2.90) до оптимальних керувань і траєкторій усереднених задач. При цьому також встановлюється, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальне" для точної, тобто, з точністю до малого параметра ε реалізується мінімум критерія якості.

Для задач (2.88),(2.89) будемо вважати, що виконані умови:

Умова 4.1.2.5. Допустимим керуванням є m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0,\ T]),\ p > 1$ які приймають значення в замкнутій, опуклій множині $V \subset R^m$;

Умова 4.1.2.6. Функція $f(t,\ x)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q_2 = \left\{t \geq 0,\ x \in R^d\right\}$, а $n \times m$-вимірна матриця визначена при $x \in R^d$ і виконані умови:

1) $f(t,\ x)$ в області Q_2 задовольняє умову лінійного за x росту із константою M, тобто $|f(t,\ x)| \leq M(1 + |x|)$, для довільних $(t,\ x) \in Q_2$;

2) $f(t,\ x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняє умову Ліпшиця за x із константою $\lambda > 0$;

Умова 4.1.2.7. Рівномірно за $x \in R^d$ існує границя (2.50)

Умова 4.1.2.8. Скалярні функції $A(t,\ x)$ і $B(t,\ u)$ визначені при $t \in [0,\ T]$, $x \in R^d,\ u \in U$ і неперервні за сукупністю змінних, причому:

1) $A(t,\ x) \geq 0, \quad B(t,\ u) \geq a|u|^p$ для деякої сталої $a > 0$ і для кожного $t \in [0,\ T]$ функція $B(t,\ u)$ опукла за $u \in V$;

2) функція $\Psi : R^d \to R^1$ неперервна за x та невід'ємна.

Для задачі (2.88),(2.90) допустимими керуваннями будемо вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,\ T])$, які приймають значення в замкненій, опуклій множині $U \subset R^m$.

При цьому також виконані умови 4.1.2.6 і 4.1.2.7.

Відзначимо, що в силу умови 4.1.2.6 за теоремою Каратеодорі маємо, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші $x(t, u)$ існує, єдиний на всьому відрізку $[0,\ T]$.

При цьому $x(t,\ u)$ – абсолютно неперервна функція. Із умов 4.1.2.3 і 4.1.2.7

також слідує, що функції X_0 і f_0 також задовольняють умову Ліпшиця за λ. Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (2.51), (2.92) $y(t,\ u)$ існує, єдиний на всьому відрізку $[0,\ T]$ і є абсолютно неперервними функціями.

Таким чином, критерії (2.89),(2.90),(2.93),(2.94) мають зміст при всіх допустимих керуваннях.

2.2.2 Збіжність оптимальних значень критерія якості точної задачі до оптимальних значень критерія якості відповідних усереднених задач

Звичайно, вимога компактності множини U є досить обмежуваною. Однак, якщо обмежитися класом задач (2.88)-(2.89), тобто задач лінійних за керуванням, то вимогу сильної компактності можна зняти, замінивши його слабкою компактністю. Зазначимо, що задачі типу (2.88)-(2.89) досить часто зустрічаються на практиці (наприклад, різного роду регулятори).

Спочатку наведемо результат про усереднення.

Теорема 2.8. *Нехай виконані умови 4.1.2.5-4.1.2.7. Тоді якщо послідовність* $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ *слабко в* $L_p([0,\ T])$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то розв'язок* $x_\varepsilon(t)$ *задачі Коші (2.88) з* $u\,(t) = u_\varepsilon(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,\ T]$ *до* $y(t)$ *– розв'язку відповідної задачі Коші (2.92) з керуванням* $u\,(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y(t), \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.95}$$

рівномірно по $t \in [0,\ T]$.

Доведення. Переписуючи рівняння (4.1.1.3) ми маємо

$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_0^t f(\frac{s}{\varepsilon},\ x_\varepsilon(s))ds + \int_0^t f_1((x_\varepsilon(s))u_\varepsilon(s)) \tag{2.96}$$

Із умов 4.1.2.6 ми маємо

$$|x_\varepsilon(t)| = |x_0| + \int_0^1 M(1 + |x_\varepsilon(s)|)\, ds + \int_0^1 (|f_1(0)| + \lambda |x_\varepsilon(s)|)\, |u_\varepsilon(s)| ds$$

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + \int_0^1 (M + |f_1(0)|\, |u_\varepsilon(s)|)ds + \int_0^1 (M + \lambda |u_\varepsilon(s)|)\, |x_\varepsilon(s)|\, ds \tag{2.97}$$

За нерівність Гронуолла ми маємо

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_0| + M + |f_1(0)|\, \|u_\varepsilon\|_{L_p}) e^{M + \lambda \|u_\varepsilon\|_{L_p}} \tag{2.98}$$

Із слабкої збіжності u_ε до u_0 слідує сильна обмеженість u_ε, тобто $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L_p} < \infty$, а тому із(2.97) слідує існування сталої $L > 0$ такої, що

$$|x_\varepsilon(t)| \leq L \tag{2.99}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, 1]$.

Далі, для довільних $t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in [0, 1]$, використовуючи (2.97) і (2.99), ми маємо

$$|x_\varepsilon(t_2) - (x_\varepsilon(t_1)| \leq$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} M(1 + L)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} (f_1(0) + \lambda L)\, |u_\varepsilon(s)| ds \leq$$

$$\leq M(1 + L)(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{\frac{1}{q}} (f_1(0) + \lambda L)^q \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Із останньої нерівності слідує рівноступенева неперервність сімейства $x_\varepsilon(y)$ на $[0, 1]$.

Нехай $x_\varepsilon(y)$ – послідовність, яка рівномірно за $t \in [0,1]$ збігається до деякої функції $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Із (2.96) ми маємо

$$x_{\varepsilon_n}(t) = x_0 + \int_0^t f(\frac{s}{\varepsilon_n},\ x_{\varepsilon_n}(s))ds + \int_0^t f_1\left((x_{\varepsilon_n}(s))\, u_{\varepsilon_n}(s)\right)ds =$$
$$= x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n},\ x_{\varepsilon_n}(s)\right)ds + \int_0^t f_1\left(x_0(s)\right)u_{\varepsilon_n}(s)\,ds +$$
$$+ \int_0^t f_1\left((x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s))\, u_{\varepsilon_n}(s)\,ds\right. \tag{2.100}$$

Із теореми Красносельського-Крейна маємо, що

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n},\ x_{\varepsilon_n}(s)\right)ds = \int_0^t f_0\left(x_0(s)\right)ds \tag{2.101}$$

Далі, в силу слабкої збіжності ми маємо

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^t f_1\left(x_0(s)\right)u_{\varepsilon_n}(s)\,ds = \int_0^t f_1\left(x_0(s)\right)u_0(s)\,ds \tag{2.102}$$

А за умовою 2) із 4.1.2.6 для останнього інтеграла в (2.100) ми маємо оцінку

$$\left|\int_0^t \left(f_1\left(x_{\varepsilon_n}s\right) - f_1(x_0(s))\right)u_{\varepsilon_n}(s)ds)\right| \leq$$
$$\leq \lambda \left(\int_0^t |x_{\varepsilon_n}(s) - x_0(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p} \tag{2.103}$$

Тепер, враховуючи рівномірну обмеженість $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p}$ із (2.103) маємо, що останній доданок в (2.100) прямує до нуля.

Переходячи тепер до границі в (2.100) при $\varepsilon \to 0$ і враховуючи (2.101) і (2.102), маємо

$$x_0(t) = x_0 + \int_0^t f_0\left(x_0(s)\right)ds + \int_0^t f_1\left(x_0(s)\right)u_0(s))ds$$

тобто, $x_0(t)$ – розв'язок задачі Коші (2.92), а тому, в силу єдиності, $x_0(t) \equiv y(t)$.

Тому $x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Отже, будь-яка збіжна послідовність функцій із сімейства збігається до однієї і тієї ж межі. Звідси слідує доведення теореми 4.1.2.3.

Використовуючи теорему 4.1.2.1, можна установити зв'язок між оптимальними керуваннями точної і усередненої задач.

Теорема 2.9. *Нехай виконані умови 4.1.2.5-4.1.2.8. Тоді задачі (2.88)-(2.89) і (2.92)-(2.93) мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t),\ u_\varepsilon^*(t))$ *і* $y^*(t),\ u^*(t))$ *відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*,\ \varepsilon \to 0$*;*

2) для-будь якого $\eta > 0$ *існує* ε_0*, таке, що для* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta; \tag{2.104}$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$*, така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows y(t) \tag{2.105}$$

рівномірно на $[0,\ T]$ *і*

$$u_{\varepsilon_n}^* \xrightarrow{w} u^* \tag{2.106}$$

слабко в $L_p([0,T])$.

Якщо при цьому усереднена задача (2.92)-(2.93) має єдиний розв'язок, то збіжності (2.104) і (2.105) мають місце для всіх $\varepsilon \to 0$.

Доведення.

Доведення існування оптимального розв'язку $(x_\varepsilon^*(t), u_2^*(t))$ для кожного $\varepsilon > 0$ здійснюється стандартним способом (див., наприклад, [15]) із виділенням слабко збіжної мінімізуючої послідовності $u_\varepsilon^{(n)}(t)$ до $u_\varepsilon^*(t)$ з наступним граничним пе-

реходом. При цьому використовується напівнеперервність знизу інтеграла $\int_0^1 B(t, u(t))d$ за u, яка випливає із опуклості $B(t, u)$.

Належність $u_\varepsilon^*(t)$ до множини V для кожного $t \in [0, 1]$ слідує із леми Мазура [79], а також із опуклості і замкненості множини V.

Існування оптимальної пари $(y^*(t), u^8(t))$ для задачі (4.1.1.8) - (4.1.1.10) доводиться аналогічно.

Отже,

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon\left(u_\varepsilon^*\right) = \int_0^1 \left[A(t,\, x_\varepsilon^*\left(t\right)) + B(t,\ u_\varepsilon^*\left(t\right))\right]dt + \Psi(x_\varepsilon^*(1)) \tag{2.107}$$

Нехай $\bar{u}$ – довільний сталий вектор із V. Очевидно, що керування $u(t) \equiv \bar{u}$ є допустиме для задачі (2.88) - (2.89). Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ ми маємо

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon\left(u_\varepsilon^*\right) \leq J_\varepsilon(\overline{u}) \tag{2.108}$$

Аналогічно до отримання оцінки (2.99) ми можемо показати існування сталої C_1, яка не залежить від ε, такої, що

$$|x_\varepsilon(t,\ \overline{u})| \leq C_1 \tag{2.109}$$

при $t \in [0, 1]$. Тоді із неперервності A, B, і Ψ слідує існування константи C_2, яка не залежить від ε і такої, що $J_\varepsilon^* \leq C_2$. Тому

$$J_\varepsilon^* \leq C_2 \tag{2.110}$$

для всіх позитивних ε. Із умов 4.1.2.8 і (4.1.2.41) слідує

$$\int_0^1 |u_\varepsilon^*(t)|^P \leq \frac{C_2}{a} \tag{2.111}$$

Тому множина u_ε^* є слабко компактною в $L_p[0,1]$. Нехай $u_\varepsilon^*(t)$ – послідовність оптимальних керувань, яка слабко збіжна до $u_0(t)$. Із леми Мазура [79] слідує, що $u_0(t) \in V$ при $t \in [0,1]$, а, отже, і те, що $u_0(t)$ – допустиме керування.

Нехай $x_0(t)$ – розв'язок задачі Коші (4.1.1.8) з $u(t) = u_0(t)$.

За теоремою 4.1.2.3 розв'язок $x_{\varepsilon_n}(t, u*)$ задачі Коші (2.88) рівномірно за $t \in [0,1]$ збігається до $y^*(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Тому

$$|J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int_0^1 |A(t, x_{\varepsilon_n}(t, u^*)) - A(t, y^*(t)\,|dt+$$

$$+|\Psi(x_{\varepsilon_n}(1,\ u^*)) - \Psi(y(1))\,| \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0$$

Отже, для довільного $\eta > 0$ існує $\bar{\varepsilon}$ таке, що якщо $\varepsilon_n < \bar{\varepsilon}$

$$|J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*)| < \eta \tag{2.112}$$

звідки із (4.1.3.43) ми маємо

$$J_{\varepsilon_n}^* \leq J_0^* + \eta \tag{2.113}$$

для $\varepsilon_n < \bar{\varepsilon}$. З іншого боку

$$J_0^* \leq J_0\left(u_{\varepsilon_n}^*\right) = J_{\varepsilon_n}^* + J_0\left(u_{\varepsilon_n}^*\right) - J_{\varepsilon_n}\left(u_{\varepsilon_n}^*\right) \tag{2.114}$$

Розглянемо допоміжну систему

$$z_n = f_0(\varepsilon_n) + f_1(\varepsilon_n)\, u_{\varepsilon_n}^* \tag{2.115}$$

і

$$x_0 = f_0(x_0) + f_1(x_0)\, u_0 \tag{2.116}$$

Застосовуючи теорему 2.8 до системи (2.115) і (2.116), маємо

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} |z_n(t) - x_0(t)| \to 0,\ n \to \infty$$

Звідки і із рівномірної збіжності $x^*_{\varepsilon_n}$ до x_0 ми маємо, що

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} \left|x^*_{\varepsilon_n}(t) - z_n(t)\right| \to 0,\ n \to \infty$$

тому

$$\left|J_{\varepsilon_n}\left(u^*_{\varepsilon_n}\right) - J_0\left(u^*_{\varepsilon_n}\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |A(t,\ x^*_\varepsilon(t)) - A(t,\ x_0(t))|dt + \int_0^1 |A(t,\ \varepsilon_n(t)) - A(t,\ x_0(t))|dt +$$

$$+ \left|\Psi\left(x^*_{\varepsilon_n}(1)\right) - \Psi\left(x_0(1)\right)\right| + \left|\Psi\left(\varepsilon_n(1)\right) - \Psi\left(x_0(1)\right)\right| \to 0,\ n \to \infty \qquad (2.117)$$

В силу рівномірної неперервності $A(t,x)$ на компакті множини очевидних оцінок

$$\sup_{t\in[0,\ 1]} \left|x^*_{\varepsilon_n}(t)\right| \leq C_3, \quad \sup_{t\in[0,\ 1]} \left|\varepsilon_n(t)\right| \leq C_3$$

для деякої сталої $C3 > 0$, яка не залежить від n.

Отже, для довільного $\eta > 0$ із (2.117) слідує існування $\bar{\varepsilon}$, такого, що при

$$\left|J_{\varepsilon_n}\left(u^*_{\varepsilon_n}\right) - J_0\left(u^*_{\varepsilon_n}\right)\right| < \eta$$

Отже, із (2.114) маємо

$$J^*_0 \leq J^*_{\varepsilon_n} + \eta \qquad (2.118)$$

для $\varepsilon_n < \bar{\varepsilon}_1$

Тоді, якщо $\varepsilon_n < min\{\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_1\}$ із (2.113) і (2.118) ми маємо

$$\left|J^*_{\varepsilon_n} - J^*_0\right| < \eta.$$

що означає

$$J^*_{\varepsilon_n} \to J^*_0,\ \varepsilon_n \to 0 \qquad (2.119)$$

Оскільки, із довільної послідовності сімейства керувань $\{u_\varepsilon^*\}$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{u_{\varepsilon_m}^*\}$ для якої аналогічно до вище викладеного справедливим є співвідношення (2.119), тоді

$$J_\varepsilon^* \to J_0^*, \ \varepsilon \to 0 \tag{2.120}$$

що доводить твердження 1) теореми.

Доведемо тепер твердження 2) теореми. Оскільки $x_\varepsilon(t, u*)$ збігається до $y^*(t)$ рівномірно за $t \in [0, 1]$ при $\varepsilon \to 0$, то викладками, аналогічними до отримання оцінки (2.112) можна встановити нерівність

$$|J_\varepsilon\,(u^*) - J_0\,(u^*)| < \eta \tag{2.121}$$

яка справедлива для довільного $\eta > 0$ при достатньо малих ε. Тому

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon\,(u^*)| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_\varepsilon\,(u^*) - J_0\,(u^*)|$$

Із (2.120) і (2.121) ми маємо твердження 2). Доведемо твердження 3). Для цього покажемо, що насправді $(x_0(t), u_0(t))$ – оптимальний розв'язок задачі (2.92) - (2.93).

Ми маємо

$$J_{\varepsilon_n}^* = \int_0^1 [A(t,\, x_{\varepsilon_n}^*\,(t)) + B(t,\ u_{\varepsilon_n}^*\,(t))]dt + \Psi(x_{\varepsilon_n}^*(1))$$

В цій рівності перейдемо до границі при $n \to \infty$. Із (2.120) і умови 4.1.2.8 маємо

$$J_0^* = \int_0^1 [A(t,\, x_0\,(t))dt + \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^1 B(t,\ u_{\varepsilon_n}^*\,(t)) + \Psi(x_0(1)) \ \geq$$

$$\geq \int_0^1 [A(t,\, x_0\,(t)) + B(t,\ u_0\,(t))]dt + \Psi(x_0(1)) \tag{2.122}$$

З чого слідує, що $(x_0(t), u_0(t))$ – оптимальна пара.

Останнє твердження теореми доводиться аналогічно до такого ж твердження теореми 2.7.

Для функціонала (2.90) твердження (2.106) можна посилити, замінивши слабку збіжність сильною.

Наслідок 2.1. *В умовах теореми 4.1.2.4 для задачі (2.88)-(2.90) справедливі всі твердження теореми 4.1.2.4 із заміною слабкої збіжності оптимальних керувань на сильну збіжність в* $L_2([0,T])$.

Доведення.

Нехай $J_\varepsilon(u)$ має вид (2.90). Для нього справедливі всі викладки в доведенні теореми 4.1.2.4. Тоді із (2.122) ми маємо

$$J_0^* = \int_0^1 [A(t,\, x_0\,(t))dt + \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^1 \left(u_{\varepsilon_n}^*(t)\right)^2 dt + \Psi(x_0(1)) \tag{2.123}$$

Очевидно, що границя (4.1.3.54) існує, а значить, співпадає зі своєю нижньою границею. Тому

$$J_0^* \geq \int_0^1 A(t,\, x_0\,(t))dt + \int_0^1 u_0^2\,(t)\,dt + \Psi(x_0(1))$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_0^1 \left(u_{\varepsilon_n}^*\,(t)\right)^2 dt = \int_0^1 u_0^2\,(t)\,dt$$

Значить, $u_{\varepsilon_n}^*(t)$ сильно в $L_2([0,1])$ збігається до $u_0(t)$.

2.3 Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на півосі

До різних задач прикладного характеру метод усереднення застосовувався ще Ньютоном у 1682 році, однак його строге обгрунтування було вперше отримано М. Боголюбовим в [39]. В подальшому даний метод узагальнювався й розвивався для різних класів диференціальних рівнянь, наприклад, імпульсних [40], функціонально-диференціальних [41] та інших.

Щодо застосування методу усереднення до задач оптимального керування, то вкажемо на роботи М. Мойсеєва [42, 43], де вперше на це зверталась увага. Однак, тут робився акцент на застосуванні усереднення до розв'язування конкретних прикладних задач, без достатнього математичного обгрунтування.

В роботах В. Плотнікова і його школи (див., наприклад, [44]) дано строге математичне обргунтування застосування методу усереднення до розв'язування задач керування. Однак, при цьому множина допустимих керувань усередненої задачі будувалась спеціальним чином за множиною допустимих керувань вихідної системи з використанням теорії багатозначних відображень, а також необхідно було розробити алгоритм відповідності керувань вихідної та початкової систем.

В роботі [45] запропоновано інший підхід до дослідження задач оптимального керування методом усередненя. А саме , спочатку проводилося усереднення за часом, що явно входить у систему, при цьому функція керування $u(t)$ вважалась параметром і по ній усереднення не проводилося. Даний підхід має низку переваг: по-перше, усереднений об'єкт будувався досить просто усередненням правих частин за часом; по-друге, множина допустимих керувань вихідної та усереднених задач співпадала і не потрібно було, як в [44], будувати ніяких додаткових конструкцій. Однак авторам прийшлося накласти на функції керування $u(t)$ умову асимптотичної сталості в тому сенсі що для кожного керування $u(t)$

існує стала u_0 така, що $|u(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$, і $\varphi(t)$ не залежить від $u(t)$.

У роботі [46] застосовано підхід роботи [45] до розв'язування задач оптимального керування, однак при цьому знята досить жорстка умова асимптотичний сталості. Тут дослідження проведене на скінченному часовому інтервалі.

Мета даної частини роботи — отримати подібні результати на півосі.

2.3.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування на півосі з малими параметром і швидко осцилюючими коефіцієнтами, нелінійну за керуванням:

$$\dot{x} = X\left(\frac{t}{\varepsilon},\ x,\ u(t)\right),\ x(0,\ u(0)) = x_0 \tag{2.124}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^\infty e^{-jt} L(t,\ x_\varepsilon(t),\ u(t))\, dt \longrightarrow inf, \tag{2.125}$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ та застосуємо для її розв'зання метод усереднення.

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з R^d, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $U \subset R^m$.

В подальшому через $x(t, u)$ будемо позначати розв'язок задачі Коші (2.124), який відповідає керуванню $u(t)$. Якщо не буде двозначності у трактовці, то залежність від u будемо опускати і будемо писати $x(t)$.

Нехай існує рівномірно за $x \in R^d$ і $u \in R^m$ середнє

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int_0^s X(t,\ x,\ u)dt = X_0(x,\ u). \tag{2.126}$$

Тоді задачі оптимального керування на півосі (2.124)-(2.125) зі швидко осцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність більш проста (зглажена) усереднена задача керування:

$$\dot{y} = X_0\left(y,\ u\left(t\right)\right),\ y\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0 \tag{2.127}$$

з критеріями якості відповідно:

$$J_0\left[u\right] = \int_0^\infty e^{-jt} L(t,\ y\left(t\right),\ u\left(t\right))dt \to inf \tag{2.128}$$

2.3.2 Умови збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій точної задачі до оптимальних керувань, траєкторії відповідних усереднених задач

Через $|\cdot|$ будемо позначати евклідову норму вектора в R^d, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Для задачі (2.124), (2.125) та відповідної їй усередненої задачі (2.127), (2.128) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 4.3.1. Допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u(t)$, що майже для всіх $t \geq 0$ приймають значення в деякому компакті $U \subset R^m$, і $u(\cdot)$ для кожного $T > 0$ належить компакту $\mathcal{U}_T$ в $L_p([0,T])$ для деякого $p > 1$;

Умова 4.3.2. Функція $X(t,x,u)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q = \{t \geq 0, x \in R^d, u \in U\}$ та виконані умови:

1) існує $M > 0$, така, що $|X(t,\ x,\ u)| \leq M$ для кожних $(t,\ x,\ u) \in Q$;

2) $X(t,\ x,\ u)$ задовольняє в Q умову Ліпшиця за змінними $x,\ u$, тобто існує стала $K > 0$ така, що для довільних $(t,\ x,\ u)$ і $(t,\ x_1,\ u_1) \in Q$ виконується

нерівність:

$$|X\,(t,\ x,\ u) - X(t, x_1,\ u_1)| \leq K(|x - x_1| + |u - u_1|);$$

Умова 4.3.3. Рівномірно за $x \in R^d$ і $u \in U$ існує границя (2.126);

Умова 4.3.4. Скалярна функція $L(t,\ x,\ u)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q = \left\{t \geq 0,\ x \in R^d,\ u \in U\right\}$, задовольняє в області Q за змінними x і u умову лінійного росту зі сталою M, тобто $|L(t,\ x,\ u)| \leq M(1 + |x| + |u|)$.

Відзначимо, що в силу умов 1), 2) із 4.3.2 і 4.3.1 із теореми Каратеодорі випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (2.124) існує, єдиний на $[0, \infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. При цьому для розв'язку задачі (2.124) справедлива оцінка

$$|x\,(t)| \leq |x_0| + Mt, \tag{2.129}$$

А тому для критерія якості (2.125) з урахуванням (2.129) і умови 4.3.1 отримуємо

$$|J_\varepsilon\,[u]| \leq \int_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x(t)| + |u(t)|)dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-jt} M(1 + |x_0| + Mt)dt + C\int_0^\infty e^{-jt}dt < \infty$$

для деякої сталої $C > 0$.

Таким чином, критерій (2.125) має сенс для всіх допустимих керувань. Із умови 4.3.3 випливає, що аналогічні висновки спраедливі і для усередненої задачі.

Перша теорема гарантує збіжність розв'язків точної системи (2.124) до відповідних розв'язків усерединеної системи (2.127) на півосі.

Теорема 2.10. *Нехай виконані умови 4.3.2 і 4.3.3. Тоді, якщо* $u_{\varepsilon_0} \to u_o$, $\varepsilon_0 \to 0$ *за нормою простору* $L_p([0,T])$ *для* $T > 0$, *то розв'язок задачі Коші (2.124)*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y_0(t), \ \varepsilon \to 0 \tag{2.130}$$

на $[0,T]$, *де* $y_0(t)$ *— розв'язок задачі Коші (2.127) при* $u = u_0$.

Доведення. Окрім систем (2.124) і (2.127) розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z}_\varepsilon = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, z_\varepsilon, u_0\right), \quad z_\varepsilon(0, u_0(0)) = x_0 \tag{2.131}$$

Тоді

$$\left|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)\right| \leq \int_0^t \left|X\left(\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), z_\varepsilon(s), u_0(s)\right) - X\left(\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)\right)\right| ds \leq$$

$$\leq K\int_0^t |z_\varepsilon(s) - x_\varepsilon(s)|\, ds + K\int_0^T |u_\varepsilon(s) - u_0(s)|\, ds$$

Звідки у випадку $p = 1$ маємо оцінку

$$|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| \leq e^{KT} K \left\|u_\varepsilon - u_0\right\|_{L_1}, \tag{2.132}$$

а у випадку $p > 1$ відповідно

$$|z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| \leq K T^{\frac{1}{q}} \left\|u_\varepsilon - u_0\right\|_{L_p}, \tag{2.133}$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отже, $z_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t) \rightrightarrows 0, \ \varepsilon \to 0$ на $[0,T]$.

Далі із роботи [46] випливає рівномірна на $[0,T]$ збіжність $z_\varepsilon(t)$ до $y_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$, якщо помітити, що заміна класу $L_2\big([0,T]\big)$ на клас $L_p\big([0,T]\big)$ не приводить до змін у доведенні, оскільки довільну функцію із $L_p\big([0,T]\big), p \geq 1$ можна також апроксимувати кусково сталими функціями [49]. Останнє доводить теорему.

Зауваження 2.4. *Із даної теореми випливає, що якщо* $u_\varepsilon \to u_0(t),\ \varepsilon \to 0$ *за нормою* $L_p([0,T])$ *для кожного* $T > 0$, *то* $x_\varepsilon(t)$ *збігається до* $y(t)$ *рівномірно на кожному відрізку* $[0,T]$, *а тому* $x_\varepsilon(t) \to y_0(t),\ \varepsilon \to 0$ *для будь-якого* $t \geq 0$. *Отже, в цьому випадку маємо поточкову збіжність розв'язків вихідної задачі до відповідних розв'язків усередненої. На відміну наприклад від роботи [47, 48] тут не гарантується рівномірна збіжність на півосі, але і ситуація тут більш загальна, а умови слабші у порівнянні з [47]. Відзначимо, однак, що для задач оптимального керування поточкової збіжності буде достатньо.*

2.3.3 Збіжність оптимальних значень критерія якості точної задачі до оптимальних значень критерія якості відповідних усереднених задач

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями і критеріями якості точної (2.124) і (2.125) та усередненої (2.127), (2.128) задач.

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керувуваннях.

Теорема 2.11. *Нехай виконані умови 4.3.1-4.3.4 . і існує* $\varepsilon_0 > 0$, *що при всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *задачі (2.124), (2.125) і (2.127), (2.128) мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$, $(y^*(t), u_*(t))$ *відповідно.*

Тоді

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) для кожного $\eta > 0$ *існує* ε_0 *таке, що при* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(u^*)| < \eta \tag{2.134}$$

тобто оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної;

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$ *така, що*

$$x^*_{\varepsilon_n}(t) \to y^*(t) \tag{2.135}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0,\ T], T > 0$, *а*

$$u^*_{\varepsilon_n}(t) \to u^*(t) \tag{2.136}$$

майже скрізь на $[0,\ \infty)$ *і* $u^*_{\varepsilon_n}(\cdot)$ *збігається до* $u^*(\cdot)$ *за нормою* $L_p([0,\ T])$. *для кожного* $T > 0$.

Якщо при цьому усереднена задача (2.127), (2.128) має єдиний розв'язок, то збіжності у (2.135), (2.136) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Візьмемо довільну послідовність $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, що $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$. За умовами теореми існує $n_0 \in \mathbb{N}$, що при $n \geq n_0$ задача (2.124), (2.125) має розв'язок $\big(x^*_{\varepsilon_n}(t), u^*_{\varepsilon_n}(t)\big)$.

Із умов 4.3.1 випливає існування на $\big[0,1\big]$ збіжної в $L_p\big(\big[0,1\big]\big)$ підпослідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(\cdot)$ послідовності $u^+_{\varepsilon_n}(\cdot)$. Нехай $u_1(\cdot)$ — її L_p-границя. Тоді існує підпослідовність послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(t)$ (позначимо знову $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(t)$), що збігається поточково до $u_1(t)$ всюди на $[0,1]$, за виключенням, можливо, множини A_1 нульової лебегової міри.

Аналогічними міркуваннями із послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_1}}(\cdot)$ виділяється на $[0,2]$ збіжна за нормою $L_p\big(\big[0,2\big]\big)$ послідовність $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(\cdot)$. Нехай $u_2(\cdot)$ —її L_p-границя. Тоді існує підпослідовність послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(t)$ (позначимо знову $u^*_{\varepsilon_{n_2}}(t)$), що збігається поточково до $u_2(t)$ всюди на $[0,2]$ за виключенням, можливо, деякої множини A_2 нульової лебегової міри.

Очевидно що $u_1(t) = u_2(t)$ на множині $[0,1]\,/(A_1 \cup A_2)$.

Продовжуючи дану процедуру на $[0,k]\,,\ k \in \mathbb{N}$, можна побудувати підпослідовність $u^*_{\varepsilon_{n_k}}(\cdot)$ послідовності $u^*_{\varepsilon_{n_{k-1}}}(\cdot)$, що збігається до деякої функції $u_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k$ за нормою $L_p\big([0,k]\big)$. Із неї також виділяється збіжна поточково, за виключенням, можливо, множини $A_k \subset [0,k]$ нульової міри, підпослідовність, позначена знову через $u^*_{\varepsilon_{n_k}}$. Очевидно, що $u_k(t) = u_{k-1}(t)$ на множині $[0,k-1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$
.

Позначимо $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Очевидно що множина B має нульову лебегову міру. Побудуємо функцію $u_0(t)$, що $u_0(t) = u_k(t)$ при $t \in [0,k]$. За своєю побудовою вона має властивості:

а) $u_0(t)$ визначена на $[0,\infty) \setminus B$, тобто майже скрізь;

б) $u_0(t) \in U$; для всіх $[0,\infty) \setminus B$;

в) $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_T$ для кожного $T > 0$.

Отже, $u_0(t)$ є допустимим керуванням для задачі (2.124), (2.125).

Використовуючи тепер діагональний метод Кантора, можна побудувати підпослідовність $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ вихідної послідовності $u^*_{\varepsilon_n}(\cdot)$, що має властивості:

а) $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ збігається за нормою $L_p\big([0,T]\big)$ для кожного $T > 0$ до $u_0(\cdot)$ при $n \to \infty$;

б) $u^*_{\varepsilon_{n_n}}$ збігається до $u_0(t)$ для всіх $t \in [0,\infty) \setminus B$.

Далі позначимо $u^*_{\varepsilon_{n_n}}(\cdot)$ через $u^*_{\varepsilon_m}$.

Тоді $x^*_{\varepsilon_m}(t)$ — оптимальна траєкторія задачі (2.124), (2.125). Через $y_0(t)$ позначимо розв'язок усереднений задачі (2.127) що відповідає керуванню $u_0(t)$.

Із теореми 2.10 тоді випливає рівномірна на кожному відрізку $[0,T]$ поточкова на $[0,\infty)$ збіжність $x^*_{\varepsilon_m}(t)$ до $y_0(t)$ при $m \to \infty$.

Оскільки $u^*_{\varepsilon_m}(t)$— оптимальне керування, а $x^*_{\varepsilon_m}(t)$— оптимальна траєкторія

для задачі (2.124), (2.125), то

$$J^*_{\varepsilon_m} \leq J^*_{\varepsilon_m}(u^*) = J^*_0 + J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*) \tag{2.137}$$

Але

$$|J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int_0^\infty e^{-jt} \left| L\left(t, x_{\varepsilon_m}(t), u^*(t)\right) - L\left(t, y^*(t), u^*(t)\right)\right| dt \tag{2.138}$$

Застосувавши знову теорему 2.10 до системи

$$\dot{x}_{\varepsilon_m} = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_{\varepsilon_m}, u^*\right)$$

і

$$\dot{y}^* = X_0\left(y^*, u^*\right),$$

отримаємо поточкову, для кожного $t > 0$ збіжність $x_{\varepsilon_m}(t)$ до $y^*(t)$ при $\varepsilon_m \to 0$.

Використавши за тим умову лінійного для L росту, оцінку (2.129) і умову 4.3.1 для підінтегрального виразу у (2.138), знаходимо інтегровну мажоранту

$$e^{-jt} M\left(1 + |x_0| + Mt + C\right), \tag{2.139}$$

де C — деяка стала, що характеризує обмеженість компакта U із умови 4.3.1.

Із неперервності функції L, в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність , в (2.138) тоді можливий граничний перехід, звідки отримуємо, що

$$J_{\varepsilon_m}(u^*) \to J_0(u^*), \varepsilon_m \to 0. \tag{2.140}$$

З іншої сторони, оскільки $u^*_{\varepsilon_m}$ — допустиме керування усередненої задачі, то

$$J^*_0 \leq J_0\left(u^*_{\varepsilon_m}\right) = J^*_{\varepsilon_m} + J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}). \tag{2.141}$$

Але

$$\left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m})\right| \leq$$

$$\leq \left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_0(u_0)\right| + \left|J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0)\right| + \left|J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0)\right| \tag{2.142}$$

Оскільки

$$\left|J_0(u^*_{\varepsilon_m}) - J_0(u_0)\right| = \int_0^\infty e^{-jt} \left|L\left(t, y_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) - L\left(t, y_0(t), u_0(t)\right)\right| dt,$$

де $y_{\varepsilon_m}(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{y}_{\varepsilon_m} = X_0\left(y_{\varepsilon_m}, u_{\varepsilon_m}\right), \quad y_{\varepsilon_m}\left(0, u_{\varepsilon_m}(0)\right) = x_0,$$

то аналогічно (2.140) отримуємо

$$J_0\left(u^*_{\varepsilon_m}\right) \to J_0(u_0), \quad \varepsilon_m \to 0 \tag{2.143}$$

Покажемо, що

$$J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0) \to 0 \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{2.144}$$

Дійсно,

$$\left|J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J_{\varepsilon_m}(u_0)\right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-jt} \left|L\left(t, x^*_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) - L\left(t, z_{\varepsilon_m}(t), u_0(t)\right)\right| dt, \tag{2.145}$$

тут z_{ε_m} — розв'язок задачі Коші (2.131) з $\varepsilon = \varepsilon_m$. Врахувавши тепер збіжність майже всюди $u^*_{\varepsilon_m}$ до $u_0(t)$ при ε_m міркуваннями, аналогічними до отримання (2.140), приходимо до (2.144). Очевидно також, що

$$J_{\varepsilon_m}(u_0) - J_0(u_0) \to 0 \quad \varepsilon_m \to 0 \tag{2.146}$$

Із (2.137),(2.140)-(2.144),(2.146) тоді маємо оцінки

$$J_{\varepsilon_m}(u^*_{\varepsilon_m}) - J^*_0 \leq J^*_{\varepsilon_m} - J^*_0 \leq J_{\varepsilon_m}(u^*) - J_0(u^*) \tag{2.147}$$

Звідки випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_m} \to J^*_0, \quad \varepsilon_m \to 0 \tag{2.148}$$

Таким чином, із довільної послідовності $J^*_{\varepsilon_n}$ виділилась збіжна до J^*_0 підпослідовність. Звідки випливає перше твердження теореми.

Покажемо що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі, а $y_0(t)$ — оптимальна траєкторія.

Аналогічно попередньому, в силу теореми Лебега, маємо

$$J^*_{\varepsilon_m} = \int_0^\infty e^{-jt} L\left(t, x^*_{\varepsilon_m}(t), u^*_{\varepsilon_m}(t)\right) dt \to \int_0^\infty e^{-jt} L\left(t, y_0(t), u_0(t)\right) dt,$$

звідси із (2.148) випливає оптимальність пари $(u_0(t), y_0(t))$, що і доводить твердження 3) теореми.

Для доведення твердження 2 відзначимо, що

$$|J^*_\varepsilon - J_\varepsilon(u_0)| \leq |J^*_\varepsilon - J^*_0| + |J_0(u_0) - J_\varepsilon(u_0)| \tag{2.149}$$

Із застосуванням теореми 2.10 до системи

$$\dot{x_\varepsilon} = X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon, u_0\right)$$

і

$$\dot{y_0} = X_0\left(y_0, u_0\right)$$

аналогічно до (2.140) отримаємо, що

$$J_0(u_0) - J_\varepsilon(u_0) \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

Звідки із твердження 1) теореми отримуємо твердження 2).

Якщо усереднена задача (2.127), (2.128) має єдиний розв'язок, то з вище наведеного випливає, що з довільної послідовності $\left(x^*_{\varepsilon_m}, u^*_{\varepsilon_m}\right)$ виділяється збіжна підпослідовність і всі такі підпослідовності збігаються до однієї і тієї ж границі, що і доводить останнє твердження теореми. Теорема доведена.

Зауваження 2.5. *Якщо в умовах теореми 2.11 $u(\cdot) \in U$ — компакту в $L_p([0,\infty))$, а L задовольняє по u області Q умову Ліпшиця з константою K, то задачі (2.124), (2.125) та (2.127), (2.128) мають розв'язки.*

Доведення. Покажемо неперервність $J_\varepsilon(u)$ для кожного $\varepsilon > 0$ по $u \in L_p([0,\infty))$. Використовуючи умову 2) із 4.3.2 і нерівність Гронуолла-Беллмана, аналогічно (2.132), (2.133) для розв'язків $x(t,u_n)$ і $x(t,u_0)$ задачі (2.124), що відповідають керуванням u_n і u_0, маємо оцінки для кожного $t \in [0,T]$ при $T > 0$

$$|x(t,u_n) - x(t,u_0)| \le Ke^{KT} \|u_n - u_0\|_{L_1}$$

у випадку $L_1([0,\infty))$, а у випадку $p > 1$

$$|x(t,u_n) - x(t,u_0)| \le KT^{\frac{1}{q}} \|u_n - u_0\|_{L_p}$$

з яких випливає поточкова при $t \ge 0$ збіжність $x(t,u_n)$ до $x(t,u_0)$ якщо u_n збігається до u_0 за L_p нормою.

Тоді

$$|J_\varepsilon(u_n) - J_\varepsilon(u_0)| \le \int_0^\infty e^{-jt} \left|L\left(t, x(t,u_n), u_0(t)\right) - L\left(t, x(t,u_0), u_0(t)\right)\right| dt +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-jt} K \left|u_n(t) - u_0(t)\right| dt \to 0, \quad n \to \infty$$

в силу теореми Лебега. Отже $J_\varepsilon(u)$ неперервна по u на компакті. Аналогічно отримується і неперервність $J_0(u)$. Звідки випливає доведення наслідку 2.5.

Таким чином, встановлено, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної, тобто з точністю до малого параметра ε реалізує мінімум критерія якості точної задачі.

2.4 Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для лінійних за керуванням звичайних диференціальних рівнянь на півосі

2.4.1 Постановка задачі

Тепер розглянемо задачу оптимального керування системою на півосі з малими параметром і швидко осцилюючими коефіцієнтами, яка є лінійною за керуванням

$$\dot{x} = f\left(\frac{t}{\varepsilon},\ x\right) + f_1\left(x\right)u\left(t\right),\ x\left(0,\ u\left(0\right)\right) = x_0 \tag{2.150}$$

з критерієм якості:

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^\infty \left[e^{-jt}A\left(t,\ x_\varepsilon\left(t\right)\right) + B\left(t,\ u\left(t\right)\right)\right]dt \longrightarrow inf \tag{2.151}$$

та застосуємо для її розв'зання метод усереднення.

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор з R^d, $u(t)$ — m-вимірний вектор керування, який приймає значення у деякій множині $U \subset R^m$.

Для задачі (2.150) також розглянемо квадратичний за керуванням критерій якості:

$$J_\varepsilon\left[u\right] = \int_0^\infty \left[e^{-jt}A(t,\ x_\varepsilon(t)) + u^2(t)\right]dt \longrightarrow inf. \tag{2.152}$$

Нехай існує рівномірно за $x \in R^d$ і $u \in R^m$ середнє

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s f(t,\ x)dt = f_0(x) \tag{2.153}$$

Тоді задачі оптимального керування на півосі (2.150)-(2.151) зі швидко осцилюючими коефіцієнтами ставиться у відповідність більш проста усереднена задача керування:

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(y)\,u(t)\,,\ y(0,\ u(0)) = x_0, \tag{2.154}$$

з критеріями якості :

$$J_0[u] = \int_0^\infty [e^{-jt}A(t,\ y(t)) + B(t,\ u(t))]dt \to inf, \tag{2.155}$$

або

$$J_0[u] = \int_0^\infty [e^{-jt}A(t,\ y(t)) + u^2(t)]dt \to inf. \tag{2.156}$$

2.4.2 Умови збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій точної задачі до оптимальних керувань, траєкторії відповідних усереднених задач

Для задачі (2.150), (2.151) і відповідної їй усереднененої задачі (2.154),(2.155) або (2.154), (2.156) будемо вважати виконаними умови:

Умова 4.4.1. Допустимими керування ми будемо вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,\infty))$, що приймають значення у замкнутій, опуклій множині $V \subset R^m$, вважаємо також, що $0 \in V$;

Умова 4.4.2. Функція $f(t,\ x)$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в області $Q_1 = \left\{t \geq 0,\ x \in R^d\right\}$, а $n \times m$-вимірна матриця $f_1(x)$ визначена для $x \in R^d$ і виконані умови:

1) $f(t,\ x)$ і $f_1(x)$ обмежені в областях визначення сталою $M > 0$;

2) $f(t,\ x)$ і $f_1(x)$ задовольняють в областях визначення умову Ліпшиця за зміною x зі сталою Ліпшиця $K > 0$;

Умова 4.4.3. Рівномірно за $x \in R^d$ існує границя (2.153);

Умова 4.4.4. Скалярні функції $A(t,\ x)$, $B(t,\ u)$ і $\frac{\partial B}{\partial u}(t,\ x)$ визначені при $t \geq 0, x \in R^d, u \in V$ і неперервні за сукупністю змінних, причому:

1) $A\,(t,\ x) \geq 0$ і задовольняє за $x \in R^d$ умову лінійного росту зі сталою M, тобто $|A(t,\ x)| \leq M(1 + |x|)$ для кожного $t \geq 0$ і $x \in R^d$;

2) $a_1|u| \geq B(t, u) \geq a|u|^2$ для деяких сталих $a > 0$ і $a_1 > 0$ для кожного $t \geq 0$ $B(t,\ u)$ опукла за $u \in V$ і існує $a_2 > 0$ така, що $\left|\frac{\partial B}{\partial u}(y, u)\right| \leq a_2|u|$.

Для задачі (2.150), (2.152) допустимими керування ми будемо також вважати m-вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0, \infty))$, що приймають значення у V. При цьому також виконані умови 4.4.2 і 4.4.3.

Із умов 4.4.2 і із теореми Каратеодорі випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (2.150) існує, єдиний на $[0, \infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. При цьому для розв'язку задачі (2.150), аналогічно до нелінійного випадка, маємо

$$|x\,(t)| \leq |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2}, \tag{2.157}$$

Тому для критерія якості (2.151), врахувавши (2.157) та умову 2) із 4.4.4, маємо

$$|J_\varepsilon\,[u]| \leq \int_0^\infty e^{-jt}M(1 + |x(t)|)dt + \int_0^\infty B(t, u(t))dt \leq$$
$$\leq \int_0^\infty e^{-jt}M(1 + |x_0| + Mt + Mt^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2})dt + a_1\|u\|^2_{L_2} < \infty$$

Таким чином, критерій якості (2.151) має сенс для всіх допустимих керувань.

Із умов 4.4.3 випливає, що аналогічні висновки справедливі і для усереднених задач.

Звичайно, вимога компактності множини $\mathcal{U}_T$ є досить жорсткою. Однак, якщо обмежитися класом задач типу (2.150), (2.151), що є досить важливим

для застосувань, то вимогу сильної компактності можна зняти, замінивши її слабкою компактністю

Для задач (2.150) і (2.154) можна довести теорему про збіжність розв'язків точної системи (2.150) до відповідних розв'язків усерединеної системи (2.154) на півосі, аналогічну до теореми 2.10.

2.4.3 Збіжність оптимальних значень критерія якості точної задачі до оптимальних значень критерія якості відповідних усереднених задач

Наступна теорема встановлює зв'язок між оптимальними керуваннями, оптимальними траєкторіями і критеріями якості точної (2.150),(2.151) та усередненої задачі (2.154),(2.128) або (2.154),(2.155) .

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_u J_\varepsilon[u]$, $J_0^* = \inf_u J_0[u]$, де інфімум береться по всіх допустимих керувуваннях.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.12. *Нехай виконані умови 4.4.1-4.4.4. Тоді задачі (2.150), (2.151) та (2.154), (2.155) мають відповідно розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ *і* $(y^*(t), u^*(t))$. *При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*,\ \varepsilon \to 0$;

2) для кожного $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[u^*]| < \eta; \tag{2.158}$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$ *так, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \to y(t) \tag{2.159}$$

рівномірно на кожному відрізку [0, T] для довільного $T > 0$, *а*

$$u^*_{\varepsilon_n} \xrightarrow{w} u^* \tag{2.160}$$

слабко в $L_2([0,\infty))$.

Якщо при цьому усереднена задача (2.154), (2.155) має єдиний розв'язок, то збіжності (2.159) і (2.160) мають місце при всіх $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведення існування для кожного ε оптимальної пари $(x^*_\varepsilon, u^*_\varepsilon)$ задачі (2.150), (2.151) проводиться за стандартною схемою (див., наприклад, [50]) із виділенням мінімізуючої послідовності, що слабко збігається до u^*_ε. Оптимальність u^*_ε встановлюється граничним переходом з використанням того факту, що якщо в умовах теореми $u_n \xrightarrow{\mathrm{w}} u_0$ в $L_2\left([0,\infty)\right)$, $\quad n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty B\left(t, u_n(t)\right) dt \geq \int_0^\infty B\left(t, u_0(t)\right) dt. \tag{2.161}$$

Останнє випливає із добре відомої для опуклих функцій нерівності

$$B\left(t, v\right) \geq B\left(t, u_0(t)\right) + \left(\frac{\partial B}{\partial u}\left(t, u_0(t)\right), v - u_0(t)\right) \tag{2.162}$$

Тут другий доданок — скалярний добуток векторів в $\mathbb{R}^m$. Взявши в (2.162) $v = u_n(t)$ матимемо

$$\int_0^\infty B\left(t, u_n(t)\right) dt \geq \int_0^\infty B\left(t, u_0(t)\right) dt + \int_0^\infty \left(\frac{\partial B}{\partial u}\left(t, u_0(t)\right), u_n(t) - u_0(t)\right) dt \tag{2.163}$$

Врахувавши тепер умову 2) із 4.4.4, отримаємо, що

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial B}{\partial u} B(t, u(t))\right|^2 dt \leq \int_0^\infty a_2 \left|u(t)\right|^2 dt \leq \infty$$

Отже, другий доданок у (2.163) прямує до нуля в силу слабкої збіжності $u_n(t)$ до u_o в $L_2\left([0,\infty]\right)$

Належність $u_\varepsilon^*(t)$ множині V для кожного $t \geq 0$ випливає із леми Мазура [79].

Аналогічно доводиться існування оптимальної пари (y^*, u^*) задачі (2.154), (2.155).

Далі для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon^*(u_\varepsilon^*) \leq J_\varepsilon(0) \tag{2.164}$$

При $u = 0$ для розв'язку $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (2.150) маємо, в силу першої умови з 4.4.2 оцінку

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + Mt, \quad t \geq 0 \tag{2.165}$$

а тому в силу 4.4.4

$$J_\varepsilon(0) = \int_0^\infty e^{-jt} A\left(t, x_\varepsilon(t)\right) dt \leq \int_0^\infty e^{-jt} M\left(1 + x_0 + Mt\right) dt \leq C_1, \tag{2.166}$$

де стала C_1 не залежить ні від ε ні від u. Тоді із умов 4.4.4, (2.164) і (2.166) маємо оцінку

$$\int_0^\infty |u_\varepsilon^*(t)|^2 \, dt \leq \frac{C_1}{a}. \tag{2.167}$$

Тому послідовність u_ε^* слабо компактна в $L_2\left([0, \infty)\right)$

Нехай $u_{\varepsilon_n}^*$ — слабко збіжна до u_0 послідовність оптимальних керувань. Очевидно, що u_0 допустиме керування. Нехай $x_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (2.154) з $u(t) = u_0(t)$.

Оскільки зі слабкою збіжності в $L_2\left([0, \infty)\right)$ випливає слабка збіжність в $L_2\left([0, T]\right)$ для довільного $T > 0$, то із теореми 2.3 [46] маємо тоді, що розв'язок $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ задачі Коші (2.150) рівномірно на $[0, T]$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. В силу довільності T звідси випливає поточкова збіжність $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ до $x_0(t)$ при кожному $t \geq 0$.

Аналогічний факт має місце і для розв'язків $x^*_{\varepsilon_n}(t,u^*)$ і $y^*(t)$ задач Коші (2.150) і (2.154) відповідно. Тоді

$$J^*_{\varepsilon_m} \leq J^*_0 + J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*) \tag{2.168}$$

Але

$$|J_{\varepsilon_n}(u^*) - J_0(u^*)| \leq \int_0^\infty e^{-jt}\,|A(t, x_{\varepsilon_n}(t,u^*) - A(t,y^*(t))|\,dt \to 0, \quad \varepsilon_n \to 0 \tag{2.169}$$

в силу теореми Лебега, оцінки (2.157) лінійного за x росту $A(t,x)$. З іншої сторони

$$J^*_0 \leq J^*_{\varepsilon_n} + J_0(u^*_{\varepsilon_n}) - J_{\varepsilon_n}(u^*_{\varepsilon_n}) \tag{2.170}$$

Розглянемо допоміжну систему

$$\dot{z_n} = f_0(z_n) + f_1(z_n)u^*_{\varepsilon_n} \tag{2.171}$$

і

$$\dot{x_0} = f_0(x_0) + f_1(x_0)u_0 \tag{2.172}$$

Застосувавши до них знову теорему 2.3 [46], матимемо, що $z_n(t)$ рівномірно на $[0,T]$ і поточково на півосі $t \geq 0$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$

Звідси і збіжності $x^*_{z_n}(t)$ до x_0. Отримаємо, що

$$x_{\varepsilon_n}(t)^* - z_n(t) \to 0, \quad z_n \to 0 \tag{2.173}$$

для кожного $t \geq 0$.

Тому

$$\left|J_{\varepsilon_n}(u^*_{\varepsilon_n}) - J_0(u^*_{\varepsilon_n})\right| \leq \int_0^\infty e^{-jt}\left|A\left(t, x^*_{\varepsilon_n}(t)\right) - A\left(t, x_0(t)\right)\right| dt +$$

$$+\int_0^\infty e^{-jt}\left|A\left(t,z_n(t)\right)-A\left(t,x_0(t)\right)\right|dt\to 0,\quad \varepsilon_n\to 0 \tag{2.174}$$

в силу теореми Лебега, оцінок (2.157), (2.167) і лінійного за x росту $A(t,x)$. Із (2.168)-(2.170), (2.173) тоді випливає, що

$$J^*_{\varepsilon_n}\to J^*_0,\quad \varepsilon_n\to 0.$$

Аналогічно пункту 4.3.3.1 тоді приходимо до висновку, що

$$J^*_{\varepsilon}\to J^*_0,\quad \varepsilon\to 0, \tag{2.175}$$

що й доводить твердження 1) теореми.

Покажемо, що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі. Дійсно

$$J^*_{\varepsilon_n}=\int_0^\infty e^{-jt}A\left(t,x^*_{\varepsilon_n}(t)\right)dt+\int_0^\infty B\left(t,u^*_{\varepsilon_n}(t)\right)dt \tag{2.176}$$

Враховуючи тепер умови 4.4.4, (2.175), (2.161), теорему Лебега і перейшовши до границі у (2.176) при $\varepsilon_n\to 0$, матимемо

$$J^*_0=\int_0^\infty e^{-jt}A\left(t,x_0(t)\right)dt+\lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_0^\infty B\left(t,u^*_{\varepsilon_n}(t)\right)dt\geq$$

$$\geq\int_0^\infty e^{-jt}A\left(t,x_0(t)\right)dt+\int_0^\infty B\left(t,u_0(t)\right)dt \tag{2.177}$$

Звідки випливає оптимальність пари (x_0,u_0) , що і доводить твердження 3).

Твердження 2) тепер доводиться аналогічно відповідному твердженню із теореми 2.11.

Останнє твердження теореми доводиться аналогічно такому ж твердженню теореми 2.11.

Для функціоналу якості (2.156) твердження (2.160) теореми 4.3.2.3 можна посилити, замінивши слабку збіжність на сильну.

Зауваження 2.6. *В умовах теореми 4.3.2.3 для задачі (2.127), (2.156) справедливі всі твердження даної теореми із заміною слабкої збіжності (2.160) оптимальних керувань на сильну збіжність в* $L_2([0,\infty))$

Доведення зауваження проводиться аналогічно відповідному факту для скінченного інтервалу із [46].

Таким чином, встановлено, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної, тобто з точністю до малого параметра ε реалізує мінімум критерія якості точної задачі.

Список використаних джерел

Література

1. М.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматулина. "Ведение в теорию функционально-дифференциальных уравнений М., Наука, 1991

2. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.

3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

4. Самойленко А.М., Мустафаев Х.З. О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – К.: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 104 – 107.

5. Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 160 с.

6. Хапаев М.М. О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 11, № 5. – С. 600 – 608.

7. Халанай А. Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pyres et appl. Acad. RpR. – 1959. – Vol. 4, № 3. – P. 467 – 483.

8. Фодчук В.И. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. Мат. Журн. – 1964. – Т. 16, № 2. – С. 273 – 279.

9. Фодчук В.И. О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром // Укр. мат. журн. – 1962. – Т. 14, № 4. – С. 435 – 440.

10. D. D. Bainov, S. G. Hristova, Differential equations with maxima, CRC Press Tylor and Francis Group, (2011) 291.

11. Plotnikov V.A., Kichmarenko O.D., A note on the averaging method for differential equations with maxima // Iranian Journal of optimization. – 2009. – V.1, № 2. – P. 132-140.

12. Kichmarenko O.D., Sapozhnikova K.Yu. Full averaging scheme for differential equation with maximum. // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. 2015. – Vol. 3, Iss. 1. P. 113-122.

13. S.Dashkovskiy, S.Hristova, O.Kichmarenko, K.Sapozhnikova Behavior of the solution to the systems with maximum *Proceedings: of 20th IFAC World Congress*, pages 13467-13472, 2017.

14. J. Hale. *Introduction to the functional differential equations.* Springer, 1966.

15. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, Averaging in infinite dimensions, J. Integral Equations Appl. 2 (1990), No. 4, 463-494.

16. B.Lehman, S.Weibel Fundamental theorems of averaging for functional differential equations. *J.Differ.Equ.*, 152, pages 160-190, 1999.

17. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: На-ука, 1981. – 400 с.

18. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.

19. Застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями / Кравець В.І., Ковальчук Т.В., Могильова В.В., Станжицький О.М. //Укр. мат. журн. – 2018. - Т.70, № 2. – С. 205–214.

20. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М., Наука, гл ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. - 85 с.

21. Aumann R.J. Integrals of Set-Valued Functions // J. Math. Analysis and Applic. – 1965. – Vol. 12, № 1. – P. 1 – 12.

22. Benjamin C. KuoDigital Control Systems (2nd ed.) – Oxford University Press, 1995. – 784 p.

23. G. D'Antona, A. Ferrero Digital Signal Processing for Measurement Systems: Theory and Applications. – Springer, 2006. – 268 p.

24. Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений // Украинский математический журнал. 1996. Т. 48, № 4. С. 464 – 475.

25. V. A. Plotnikov, L. I. Plotnikova, A. T. Yarovoi Averaging method for discrete systems and its application to control problems // Nonlinear Oscillations.– 2004.– V.7, Iss. 2.– P. 240 – 253.

26. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием // Научный вестник Ужгородского университета. Математика и информатика. 2012. Вып. 23, № 2. С. 76 – 85.

27. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени. // Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. 2012. Т.17, вып. 1–2. С. 54 – 69.

28. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. Усреднение дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах управления // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ–2014: Труды. [Электр. ресурс] М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. С. 1304–1316.

29. Плотников В.А. Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложения к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15, № 8. - С. 1427 - 1433.

30. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. - Одесса: Астропринт, 1999. - 356 с.].

31. Кічмаренко О.Д. Схеми повного усереднення в задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою //Нелінійні коливання. – 2018. - Т.21, № 3. – С. 358–367.

32. Кічмаренко О.Д. Ступінчасте усереднення керованих функціонально-диференціальних систем. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Математика та інформатика. - 2018. - Т. ?? – С. ??–??.

33. Белан Е.Л. (1967). О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений. *Украинский математический журнал,* 19(3), 85–90.

34. Мартынюк Д.И., Данилов В.И., Паньков В.Г. (1996). Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем разностных уравнений. *Украинский математический журнал,* 48(4), 464 – 475.

35. Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т. (2004). Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. *Нелинейные колебания,* 7(2), 241 – 254.

36. Кичмаренко О.Д., Карпычева М.Л. (2016). Общая схема усреднения систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием. *Нелинейные колебания,* 19(3), 376 – 389.

37. Плотніков В.О., Кічмаренко О. Д. (2002). Усереднення диференціальних рівнянь з максимумом. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика,* 78–82.

38. Апарцин А.С. (1999). *Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы.* Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние.

39. Боголюбов Н.Н., О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1945.

40. Самойленко А.М., Перестюк Н. А. Вторая теорема Н.Н. Боголюбова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, No. 11. – С. 2001-2010.

41. G. Hale, Theory of functional-differential equations, – New-York: Springer-Verlag, 1977, **doi:** 10.1007/978-1-4612-9892-2.

42. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальних систем – М.: Наука, 1975. – 528 с.

43. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики – М.: Наука, 1981. – 400 с.

44. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах оптимального управления – Киев – Одесса: Лыбедь, 1992. – 188 с.

45. Носенко Т.В., Станжицький О.М. Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, No.4. – С. 512–519.

46. Kichmarenko O. D. Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // Journal of Pure and Applied Mathematics/ 2017. – **115**, No. 1. – P. 93–114, **doi**: 10.12732/ijpam.v115i1.8.

47. Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале // Диффер. уравнения. – 2006. – **42**, No 4. – С. 476–482.

48. Станжицкий А.Н., Добродзий Т.В. Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения // Диффер. уравнения. – 2011. – **47**, No 2. – С. 264–277.

49. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 688 с.

50. Ли Е.Б. и Маркус Л., Основы теории оптимального управления. – Krieger Pub Co, 1986.

51. Yosida K., Functional analysis. – Berlin- New-York:Springer-Verlag, 1980.

52. V. Gaitsgory, Averaging and near viability of singularly perturbed control systems, *Journal of Convex Analysis*, **2**, No. 13 (2006), 329-352.

53. V.A.Plotnikov, A.V. Plotnikov, A.N.Vityuk, *Differential Equations with a Multivalued Right-Hand Side: Asymptotic Methods*, Odessa, Astroprint (1999) (in Russian).

54. G. Gramer, Averaging of multivalued differential equations, *Int. J. Math. Math. Sci*, **25**, (2003), 1015-1022.

55. T. Donchev, A. Donchev, Singular perturbations in infinite-dimensional control systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **5**, No. 42 (2003), 1795-1812, **doi:** 10.1137/S0363012902416080.

56. M. Nikol'skii, An optimal control problem with a small parameter, *Cybernetics and System Analysis*, **3**, No. 38 (2002), 439-443, **doi:** 10.1023/B:JOTH.0000023089.90150.78.

57. M.A.Krasnosel'skii, S.G. Krein, On the principle of averaging in nonlinear mechanics, *Usp.Mat.Nauk*, **3**, No. 65 (1955), 147-152 (in Russian).

58. A.N.Filatov, L.V.Sharova, *Integral Inequalities and theory of nonlinear Oscillations*, Moskow: Nauka (1976) (in Russian).

59. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. *Control of systems with after-effect.* **157**, Amer. Math. Society., Providence, 1992.

60. Angell, T.S. Existence theorems for optimal control problems involving functional differential equations. *Journ. of Optimiz. Theory and Applic.* **7** (3) (1971) 149–169.

61. Filippov, A.F. On certain questions in the theory of optimal control. *SIAM. Journal on Control* **1** (1) (1962) 76–84.

62. Cesari, L. Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints I and II. *Transactions of the American Math. Society* **124** (3) (1966) 369–430.

63. Banks, H.T. and Keut, G.A. Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in functional space *SIAM. Journ on Control* **10** (4) (1972) 567–593.

64. Guo-Ping, C., Jin-Zhi, H. and Simon, X. Y. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures* **81** (15) (2003) 1539 – 1546.

65. Carlier, G. and Taharoni, R. On some optimal control problems governed by a state equation with memory. *ESIAM Control, Optimization and Calculus of Variations* **14** (4) (2008) 725–743.

66. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi, F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints I: regularity of viscosity solutions. *SIAM. Journ. on Control and Optimiz* **48** (8) (2010) 4910–4937.

67. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi,F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints II: Verification and

optimal Feedbacks. *SIAM Journ. on Control and Optimiz.* **49** (6) (2011) 2378-–2414.

68. Hale, G. *Theory of functional-differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977.

69. Yosida, K. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.

70. Bainov, D.D. and Hristova, S.G. *Differential Equations with Maxima.* CRS Press Tylor and Francis Group, 2011.

71. Lavrova, O., Mogylova, V., Stanzhytskyi, O. and Misiats O. Approximation of the Optimal Control Problem on an Interval with a Family of Optimization Problems on Time Scales. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **17** (3) (2017) 303-–314.

72. Martynyuk, A.A. Analysis of a Set of Trajectories of Generalized Standard Systems: Averaging Technique. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **17** (1) (2017) 29-–41.

73. Kamaljeet and Bahuguna, D. Extremal Mild Solutions for Nonlocal Semilinear Differential Equations with Finite Delay in an Ordered Banach Space. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **16** (3) (2016) 300-–311.

74. Bryson, A.E., Ho, Y.C. *Applied optimal control:optimization, estimation, and control.* Waltham, MA: Blaisdell, 1969.

75. Beltrami, E.J. *An algorithmic approach to nonlinear analysis and optimization.* Math in Sci. and Engr., 63, Academic Press, 1970.

76. Hale, G. *Theory of functional-differential equations.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1977. DOI 10.1007/978-1-4615-9968-5

77. T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1966. DOI 10.1007/978-3-642-66282-9

78. Kichmarenko, O., Stanzhytsky, O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **18** (2) (2018) 196-–211.

79. Yosida, K. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980. DOI 10.1007/978-3-642-61859-8

80. Alekseev,V., Tikhomirov, V. and Fomin, S. *Optimal control.* Moscow, Science, Russia, 1979 (in Russian). DOI 10.1007/978-1-4615-7551-1

81. Asea, P.K., Zak, P.J. Time-to-build and cycles. *Journal of Economic Dynamics and Control* **23** (2) (1999) 1155-–1175. DOI: 10.3386/t0211

82. Bambi, M. Endogenous growth and time to build: the AK case *Journal of Economic Dynamics and Control* **32** (2008) 1015-–1040. DOI 10.1.1.582.8187

83. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. *Control of systems with after-effect.* **157**, Amer. Math. Society., Providence, 1992.

84. Angell, T.S. Existence theorems for optimal control problems involving functional differential equations. *Journ. of Optimiz. Theory and Applic.* **7** (3) (1971) 149–169. DOI: 10.1007/BF00932473

85. Guo-Ping, C., Jin-Zhi, H. and Simon, X. Y. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures* **81** (15) (2003) 1539 – 1546. DOI: 10.1016/S0045-7949(03)00146-9

86. Carlier, G. and Taharoni, R. On some optimal control problems governed by a state equation with memory. *ESIAM Control, Optimization and Calculus of Variations* **14** (4) (2008) 725–743. DOI:10.1051/cocv:2008005

87. Federico, S., Goldys, B. and Gozzi, F. HJB equations for the optimal control of differential equations with delays and state constraints I: regularity of viscosity solutions. *SIAM. Journ. on Control and Optimiz* **48** (8) (2010) 4910–4937. Doi:10.1137/09076742X

88. R.P.Agarwal, S.R.Grace, I.Kiguradze, D.O'Regan Oscillation of functional differential equations *Mathematical and Computer Modelling* **41** (4-5) (2005) 417–461. DOI: 10.1016/j.mcm.2004.06.018

89. S.Dashkovskiy, M.Kosmykov, A.Mironchenko, L.Naujok Stability of interconnected impulsive systems with and without time delays, using Lyapunov methods *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **6** (3) (2012) 899–915. DOI:10.1016/j.nahs.2012.02.001

90. A.Ashyralyev, D.Agirseven, B.Ceylan Bounded Solutions of Delay Nonlinear Evolutionary Equations *Journal of Computational and Applied Mathematics* **318** (2016) 69–78. DOI: 10.1016/j.cam.2016.11.046

91. А.Ф. Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования Вестник МГУ, сер. 1. Математика, механика, 1959, №2, 25–32