Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Р. В. Шанін

Теорія наближення функцій

Конспект лекцій

ОДЕСА
ОНУ
2023

Зміст

Тема 1. Задачі теорії наближення **3**

1.1 Попередні означення та теореми 3

1.2 Задачі теорії наближення 7

1.3 Наближення в метричних просторах 9

1.4 Наближення в лінійних нормованих просторах 10

1.5 Приклади 12

Тема 2. Наближення алгебраїчними поліномами в $C([a,b])$ **16**

2.1 Теорема Веєрштраса 16

2.2 Деякі властивості многочлена найкращого наближення 20

Список рекомендованої літератури **22**

Тема 1

Задачі теорії наближення

1.1 Попередні означення та теореми

Означення 1.1. Нехай X непорожня множина елементів довільної природи. Функція $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається *метрикою*, якщо виконуються наступні умови:

1) $d(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ для будь-яких x, $y \in X$ (симетричність);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$ (нерівність трикутника).

Пара (X, d), де d — метрика, називається *метричним простором*.

Нагадаємо деякі означення та теореми теорії метричних просторів.

Означення 1.2. Нехай (X, d) — довільний метричний простір.

- *Відкритою кулею* $B(x, \varepsilon)$ з центром в точці $x \in X$ і радіусу $\varepsilon > 0$ називається множина

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \colon d(x, y) < \varepsilon\}.$$

  $B(x, \varepsilon)$ також будемо називати *околом* точки x або ε-*околом* точки x.
- *Замкненою кулею* $\overline{B}(x, \varepsilon)$ з центром в точці $x \in X$ і радіусу $\varepsilon > 0$ називається множина

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \colon d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

- Точка $x \in X$ називається *внутрішньою точкою* множини E, якщо $B(x, \varepsilon) \subseteq E$ для деякого $\varepsilon > 0$.
- Точка $x \in X$ називається *граничною точкою* множини $E \subseteq X$, якщо в будь-якому її околі міститься хоча б одна точка із E, *відмінна* від x.
- Множина $G \subseteq X$ називається *відкритою*, якщо будь-яка її точка є внутрішньою.
- Множина $F \subseteq X$ називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

- Нехай $E \subseteq X$, $E_n \subseteq X$, $n \in I$, де I — деякий набір індексів (скінченний або нескінченний). Система множин $\{E_n\}_{n\in I}$ називається *покриттям* множини E, якщо
$$E \subseteq \bigcup_{n\in I} E_n.$$
Якщо множини E_n — відкриті, то систему $\{E_n\}$ називають *відкритим покриттям* множини E. Якщо I — скінчення множина, то систему $\{E_n\}$ називають *скінченним покриттям* множини E.
- Множина $K \subseteq X$ називається *компактною*, якщо будь-яке її відкрите покриття містить скінченне підпокриття.
- Множина $K \subseteq X$ називається *зліченно-компактною*, якщо кожна її нескінченна підмножина має хоча б одну граничну точку із K.
- Послідовність $\{x_n\}$, $x_n \in X$, називається *збіжною* до x при $n \to \infty$, якщо
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Теорема 1.3 ([1, с. 104])**.** *Нехай (X, d) — довільний метричний простір. Множина $K \subseteq X$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона зліченно-компактна.*

Означення 1.4. Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори. Відображення $\varphi\colon X \to Y$ називається *неперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in X$ таких, що $d_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність
$$d_Y(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon.$$
Відображення φ називається *неперервним на множині* X, якщо воно неперервне в кожній точці X.

Теорема 1.5. *Нехай дійсна функція φ неперервна на компактній множині K метричного простору (X, d). Тоді існують такі точки x^* і $x_* \in K$, що*
$$\varphi(x_*) = \inf\{\varphi(x)\colon x \in K\}, \quad \varphi(x^*) = \sup\{\varphi(x)\colon x \in K\}.$$

Доведення. Нехай функція φ — неперервна на компактній множині K. Позначимо
$$m = \inf\{\varphi(x)\colon x \in K\}.$$

Тоді з означення нижньої грані множини випливає, що існує така послідовність $\{x_n\} \subseteq K$, що $\varphi(x_n) \to m$ при $n \to \infty$. В силу компактності множини K і теореми 1.3, мы можем вважати, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до деякої точки $x_* \in K$. В силу неперервності функції φ це означає, що $\varphi(x_*) = m$. Доведення для верхньої грані випливає з доведеного вище та рівності

$$\sup\{\varphi(x)\colon x \in K\} = -\inf\{-\varphi(x)\colon x \in K\}. \qquad \square$$

Означення 1.6. Непорожня множина X елементів довільної природи називається *лінійним простором* над полем $\mathbb{K}$, якщо виконуються наступні умови:

1) Для будь-яких x, $y \in X$ означена їх сума $x + y \in X$, що задовольняє наступні умови:
   1.1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ для будь-яких x, y, $z \in X$ (асоціативність);
   1.2) $x + y = y + x$ для будь-яких x, $y \in X$ (комутативність);
   1.3) існує такий елемент $0 \in X$ (нейтральний елемент), що $x+0 = 0+x = x$ для будь-якого $x \in X$;
   1.4) для будь-якого $x \in X$ існує такий елемент $-x \in X$ (протилежний елемент), що $x + (-x) = -x + x = 0$.
2) Для будь-яких $x \in X$ і $\alpha \in \mathbb{K}$ означено їх добуток $\alpha x \in X$, що задовольняє наступні умови:
   2.1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для всіх α, $\beta \in \mathbb{K}$ і для всіх $x \in X$ (асоціативність множення на скаляр);
   2.2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для всіх $\alpha \in \mathbb{K}$ і для всіх x, $y \in X$ (дистрибутивність множення вектора на скаляр відносно суми векторів);
   2.3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для всіх α, $\beta \in \mathbb{K}$ і для всіх $x \in X$ (дистрибутивність множення вектора на скаляр відносно суми скалярів);
   2.4) $1 \cdot x = x$ для всіх $x \in X$ (унітарність), де $1 \in \mathbb{K}$ — одиниця поля $\mathbb{K}$ (нейтральний елемент відносно множення в $\mathbb{K}$).

Надалі ми розглядаємо лінійні простори, що задані над полем $\mathbb{R}$.

Означення 1.7. Нехай X — лінійний простір над полем $\mathbb{R}$. Відображення

$$\|\cdot\| \colon X \to \mathbb{R}^+$$

називається *нормою*, якщо

1) $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ (нейтральний елемент відносно додавання в X);
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для всіх $\alpha \in \mathbb{K}$ и для всіх $x \in X$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всіх x, $y \in X$ (нерівність трикутника).

Лінійний простір X із заданою на ньому нормою $\|\cdot\|$ називається *лінійним нормованим простором*.

Зауваження 1.8. Відзначимо, що будь-який лінійний нормований простір X можна перетворити в метричний простір, якщо визначити метрику наступним чином: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Означення 1.9. Нехай $(X, +, \cdot)$ — лінійний простір.

1) Система векторів $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ називається *лінійно незалежною*, якщо із рівності

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

випливає, що $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

2) Множина $L \subseteq X$ називається *лінійним підпростором* простору X, якщо $(L, +, \cdot)$ — лінійний простір (з тими ж операціями, що і в X).
3) Система векторів $H = \{y_1, \ldots, y_n\}$ називається *базисом* простору X, якщо система H лінійно незалежна, а система $H \cup \{y\}$ — лінійно залежна для будь-якого $y \in X$.
4) Лінійний простір X називається *скінченновимірним*, якщо він має скінченний базис. Кількість векторів базису називається *розмірністю простору*.
5) Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ на лінійному просторі X називаються *еквівалентними*, якщо існують такі c_*, $c^* > 0$, що

$$c_* \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c^* \|x\|_1$$

для всіх $x \in X$.

Приклад 1.10. Приклади лінійних нормованих просторів.

1) Множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел з нормою $\|x\| = |x|$.
2) Множина $\mathbb{C}$ комплексних чисел з нормою $\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $z = x + iy$.
3) Множина $C([a, b])$ неперервних функцій, що означені на відрізку $[a, b]$, з нормою
$$\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$
4) Множина $L^p(E)$, $p \geq 1$, сумовних в p-тій степені функцій з нормою
$$\|x\| = \left(\int_E |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Теорема 1.11. *Нехай X лінійний нормований простір. Якщо Y — скінченновимірний підпростір простору X, то простір Y — замкнений.*

Теорема 1.12. *Нехай X скінченновимірний лінійний нормований простір. Множина $K \subseteq X$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена.*

1.2 Задачі теорії наближення

Нехай (X, d) — метричний простір. В теорії наближення виділяють три типа задач.

Задача 1.1. *Наближення елемента $x \in X$ множиною $S \subset X$.*

В цій задачі мірою наближення є величина
$$E(x, S) := \inf_{y \in S} d(x, y), \tag{1.1}$$
що називається *найкращим наближенням елемента x множиною S*. Якщо існує такий елемент $y^* \in S$, що
$$d(x, y^*) = E(x, S),$$
то y^* називається *елементом найкращого наближення* для x в множині S (або найближчим до x елементом в S).

При розв'язанні Задачі 1.1 виникають наступні питання:

1) Чи для кожного елемента $x \in X$ в множині S існує елемент найкращого наближення?
2) Якщо для кожного $x \in X$ в множині S існує елемент найкращого наближення, то чи буде він єдиним?
3) Які необхідні та достатні умови визначають елемент найкращого наближення?

Якщо для кожного $x \in X$ в множині S існує елемент найкращого наближення, то S називають *множиною існування*.

Відзначимо, що задача знаходження необхідних та достатніх умов, що визначають елемент найкращого наближення є більш складною, ніж питання існування та єдиності. Отримання зручних для практичного застосування критеріїв потребує врахування специфіки простору X і множини наближення S.

Задача 1.2. *Наближення множини $M \subset X$ множиною $S \subset X$.*

В цій задачі мірою наближення є величина

$$E(M, S) := \sup_{x \in M} E(x, S) = \sup_{x \in M} \inf_{y \in S} d(x, y). \tag{1.2}$$

Означення 1.13. Якщо для деякого $x^* \in M$ виконується рівність

$$E(x^*, S) = E(M, S),$$

то елемент x^* називають *екстремальним* елементом в M відносно S.

В конкретних випадках Задача 1.2 може полягати в оцінці або точному зображенні величини (1.2) через характеристики, за допомогою яких задана множина M. Практичне значення Задачі 1.2 полягає в тому, що знання величини (1.2) дозволяє вказати мінімальну гарантовану оцінку похибки наближення будь-якого елемента з M за допомогою множини S.

Задача 1.3. *Найкраще наближення множини $M \subset X$ заданою системою множин $\{S\}$ із X.*

Для Задачі 1.3 ми обмежимося лише одним прикладом її можливої реалізації. Більш детальну інформацію можна знайти в [2].

Приклад 1.14. Нехай X — лінійний нормований простір. В 1936 році А. Н. Колмогоров поставив задачу обчислення величини

$$d_n(M, X) = \inf_{S_n} E(M, S_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

де нижня грань береться по всім підпросторам S_n розмірності n. Якщо множина M така, що із $x \in M$ випливає, що $-x \in M$ (такі множини називають *центрально–симетричними*), то величину $d_n(M, X)$ називають *n–вимірним поперечником по Колмогорову* множини M в просторі X.

1.3 Наближення в метричних просторах

В наступній теоремі отримані достатні умови на множину наближення при яких існує елемент найкращого наближення.

Теорема 1.15 (Про існування найкращого наближення). *Нехай K — компактна множина в метричному просторі X. Тоді для кожного $x \in X$ існує елемент найкращого наближення, тобто такий елемент $y^* \in S$, що*

$$d(x, y^*) = E(x, S). \tag{1.4}$$

Доведення. З означення нижньої грані випливає, що існує така послідовність $\{y_n\} \subseteq S$, що

$$\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = E(x, S).$$

Так як S — компактна множина, то, застосовуючи теорему 1.3, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що послідовність $\{y_n\}$ збігається до $y^* \in S$. Звідси, скориставшись нерівністю трикутника, отримаємо

$$d(x, y^*) \leq d(x, y_n) + d(y_n, y^*).$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$d(x, y^*) \leq E(x, S).$$

З іншої сторони, оскільки $y^* \in S$, то $d(x, y^*) \geq E(x, S)$. Рівність (1.4) доведена.

□

Вправа 1.16. Доведіть, що $d(x, y)$ при фіксованому x неперервна функція змінної y в метричному просторі (X, d). Застосовуючи цей факт та теорему 1.5 дайте інше доведення теореми 1.15.

Зауваження 1.17. Застосування теореми 1.15 пов'язано зі значними труднощами, так як питання компактності множини в довільному метричному просторі є складним. Тому в подальшому, опираючись на цю теорему, ми отримаємо теореми існування найкращого наближення множиною S на конкретних класах множин S.

1.4 Наближення в лінійних нормованих просторах

Нехай X — довільний лінійний нормований простір над полем $\mathbb{R}$. Для наближення в цьому просторі ми розглянемо в якості множини S скінченновимірний лінійний підпростір простору X.

Теорема 1.18. *Нехай X — довільний лінійний нормований простір и нехай S — скінченновимірний лінійний підпростір простору X. Тоді для будь-якого $x \in X$ існує елемент найкращого наближення, тобто, такий елемент $y^* \in S$, що*

$$\|x - y^*\| = E(x, S). \tag{1.5}$$

Доведення. Нехай $y \in S$ — довільний. Позначимо $r = \|x - y\| + 1 > 0$. Очевидно, що $E(x, S) < r$, тому

$$E(x, S) = \inf\big\{\|x - y\| \colon y \in S \cap \overline{B}(x, r)\big\}.$$

Множина $S \cap \overline{B}(x, r)$ — замкнена, як перетин двох замкнених множин, і обмежена. За теоремою 1.12 множина $S \cap \overline{B}(x, r)$ — компактна. Звідси, застосовуючи теорему 1.18, отримуємо, що існує $y^* \in S \cap \overline{B}(x, r)$ таке, що виконується (1.5). □

Розглянемо питання єдиності для кожного $x \in X$ елемента найкращого наближення y^*. Для того, щоб сформулювати достатню умову єдиності дамо наступне означення.

Означення 1.19. Лінійний нормований простір X називається *строго нормованим*, якщо

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

тоді і тільки тоді, коли $y = \alpha x$ при деякому $\alpha > 0$.

В наступній теоремі отримано достатню умову єдиності елемента найкращого наближення.

Теорема 1.20. *Нехай X — строго нормований лінійний простір і S — скінченновимірний лінійний підпростір простору X. Тоді для будь-якого $x \in X$ існує* ***єдиний*** *$y^* \in S$, такий, що*

$$\|x - y^*\| = E(x, S).$$

Доведення. Нехай X — строго нормований лінійний простір і нехай для деякого елемента $x \in X$ існують такі два різні $y_1 \in S$ і $y_2 \in S$, що

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = E(x, S).$$

Якщо $E(x, S) = 0$, то, за означенням норми, $x = y_1 = y_2$, що суперечить тому, що $y_1 \neq y_2$. Нехай $E(x, S) > 0$. Тоді

$$E(x, S) \leq \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \left(\|x - y_1\| + \|x - y_2\| \right) = E(x, S).$$

Звідси, в силу строгої нормованості простору,

$$x - y_1 = \alpha(x - y_2), \quad \alpha > 0.$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$x = \frac{1}{1-\alpha} y_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} y_2 \in S,$$

що суперечить нерівності $E(x, S) > 0$. Таким чином, $\alpha = 1$ и $y_1 = y_2$. $\square$

1.5 Приклади

Приклад 1.21. Розглянемо простір $L^p([a,b])$ з $p > 1$. Нерівність трикутника в цьому просторі — це загальновідома нерівність Мінковського,

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Якщо $x \not\equiv 0$ и $1 < p < \infty$, то рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $y = \alpha x$ при деякому $\alpha > 0$ (доведення дивись, наприклад, в [3]). Це означає, що $L^p([a,b])$ — строго нормований простір. Застосовуючи теорему 1.20 ми отримуємо, що для будь-якого скінченновимірного лінійного підпростору S простору $L^p([a,b])$ і для будь-якого $x \in L^p([a,b])$ існує єдиний елемент найкращого наближення.

Приклад 1.22. Простір $L([a,b])$ не є строго нормованим. Для доведення цього твердження достатньо зафіксувати довільне $t_0 \in (a,b)$ і покласти

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,t_0] \\ 0, & t \in (t_0,b], \end{cases} \qquad y(t) = 1 - x(t).$$

Тоді

$$\|x+y\| = \|1\| = \int_a^b dt = \int_a^{t_0} dt + \int_{t_0}^b dt = \|x\| + \|y\|.$$

Звідси отримуємо, що умови теореми 1.20 в просторі $L([a,b])$ не виконуються. Застосовуючи теорему 1.18 з $X = L([a,b])$ отримуємо, що для довільного скінченновимірного підпростору S простору $L([a,b])$ і для будь-якого $x \in L([a,b])$ існує елемент найкращого наближення $u^* \in S$.

Приклад 1.23. Простір $C([a,b])$ не є строго нормованим. Для того, щоб це довести розглянемо дві лінійно незалежні функції $x, y \in C([a,b])$, модулі яких приймають свої максимальні значення в одній і тій же точці t_0, причому

$$\operatorname{sign} x(t_0) = \operatorname{sign} y(t_0).$$

Тоді,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Таким чином, теорему 1.20 не можна застосувати до простору $C([a,b])$. Застосовуючи теорему 1.18 з $X = C([a,b])$ отримуємо, що для довільного скінченновимірного лінійного підпростору S простору $C([a,b])$ і для будь-якого $x \in C([a,b])$ існує елемент найкращого наближення $y^* \in S$.

Приклад 1.24. Розглянемо множина $L^p([a,b])$ сумовних в p-ій степені на відрізку $[a,b]$ функцій при $0 < p < 1$. Означимо на цьому просторі метрику наступним чином

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt.$$

Виконання всіх умов означення 1.1 очевидне (доведення нерівності трикутника можна знайти, наприклад, в [4]). Застосовуючи теорему 1.15 з $X = L^p([a,b])$ отримуємо, що для будь-якої компактної множини S в $L^p([a,b])$ і для будь-якого $x \in L^p([a,b])$ існує елемент найкращого наближення $y^* \in S$.

Покажем, що для будь-якого скінченновимірного лінійного підпростору $S \subset L^p([a,b])$ і для будь-якого $x \in L^p([a,b])$ існує елемент найкращого наближення $y^* \in S$. Для цього покажемо, що S повне і множина $F \subset S$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена. Для цього розглянемо функцію

$$\varphi(y) = d(y,0), \quad y \in S.$$

Легко бачити, що $\varphi(y)$ має наступні властивості

1) $\varphi(y) \geq 0$ для всіх $y \in S$ і $\varphi(y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $y = 0$;
2) $\varphi(\alpha y) = |\alpha|^p \varphi(y)$ для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$ і $y \in S$;
3) $\varphi(y_1 + y_2) \leq \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$ для будь-яких $y_1, y_2 \in S$;
4) $|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq \varphi(y_1 - y_2)$ для будь-яких $y_1, y_2 \in S$.

Нехай $z_1, \ldots, z_n$ базис S і $y = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n$ довільний вектор із S. Означимо на S норму наступним чином

$$\|y\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}.$$

Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера з показниками $2/p$ і $2/(2-p)$, отримаємо

$$\varphi(y) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^p \varphi(z_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{i=1}^n \varphi^{2/(2-p)}(z_i) \right)^{1-p/2} = c_1 \|y\|^p.$$

Із останньої нерівності та 4 випливає, що

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| \leq \varphi(y - y_0) \leq c_1\|y - y_0\|^p.$$

З цієї нерівності легко випливає, що функція φ неперервна в $(S, \|\cdot\|)$.

Розглянемо функцію φ на сфері $\|y\| = 1$, $y \in S$. Сфера в просторі $(S, \|\cdot\|)$ є замкненою і обмеженою множиною, тобто компактом. За теоремою 1.5 існує такий y_*, $\|y_*\| = 1$, що

$$c_2 = \varphi(y_*) = \inf_{\|y\|=1} \varphi(y).$$

Так як $y_* \neq 0$, то $c_2 > 0$. Звідси слідує, що

$$\varphi(y) = \varphi\left(\frac{y}{\|y\|}\|y\|\right) = \|y\|^p\varphi\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \geq c_2\|y\|^p.$$

Таким чином, існують такі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$, що

$$c_2\|y\|^p \leq \varphi(y) \leq c_1\|y\|^p.$$

для всіх $y \in S$. Так як $\varphi(y_1 - y_2) = d(y_1 - y_2, 0) = d(y_1, y_2)$, то

$$c_2\|y_1 - y_2\|^p \leq d(y_1, y_2) \leq c_1\|y_1 - y_2\|^p.$$

Таким чином будь-яка послідовність із S збігається в метриці d тоді і тільки тоді, коли вона збігається в метриці, що породжена нормою $\|\cdot\|$ і також класи обмежених, відкритих і замкнених множин відносно цих метрик збігаються. Звідси випливає, що множина S повна в метриці d і будь-яка множина $F \subset S$ компактна відносно метрики d тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і обмежена відносно метрики d.

Перейдемо до доведення існування елемента найкращого наближення. Зафіксуємо довільний $x \in L^p([a, b])$ і нехай $S \subset L^p([a, b])$ скінченновимірний лінійний підпростір. Розглянемо довільний елемент $y \in S$. Якщо $d(x, y) = E(x, S)$, то твердження доведено. Нехай $d(x, y) > E(x, S)$. Позначимо $r = d(x, y) > 0$ і розглянемо замкнену кулю $\overline{B}(x, r)$. Множина $S \cap \overline{B}(x, r)$ обмежена і замкнена і, таким чином, компактна. Застосовуючи теорему 1.15 до множини $S \cap \overline{B}(x, r)$ знаходимо $y^* \in S$ такий, що

$$d(x, y^*) = E(x, S).$$

Зауваження 1.25. Із прикладу 1.24 видно, що безпосереднє застосування теореми 1.15 представляє відомі труднощі, пов’язані з вивченням властивості компактності множин в метричних просторах.

Зауваження 1.26. В прикладі 1.24 мы, по суті, повторили з елементарними змінами доведення того факту, що всі норми в скінченновимірних лінійних просторах еквівалентні.

Тема 2

Наближення алгебраїчними поліномами в $C([a,b])$

Розглянемо питання наближення в просторі $C([a,b])$ неперервних на відрізку функцій алгебраїчними многочленами.

2.1 Теорема Веєрштраса

В курсі аналізу була доведена теорема Веєрштраса про наближення неперервної функції алгебраїчними многочленами (див., наприклад, [5, с. 152]). Нагадаємо її формулювання.

Теорема 2.1 (Теорема Веєрштраса)**.** *Нехай $f \in C([a,b])$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться алгебраїчний многочлен P, такий, що*

$$\|f - P\|_C = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Ця теорема вперше була доведена Веєрштрасом у 1885 році. В курсі аналізу вона була доведена за допомогою використання теорії рядів Фур'є. Ми приведемо безпосереднє доведення цієї теореми, запропоноване свого часу С. Н. Бернштейном. Перед тим, як ми отримаємо можливість привести це доведення, нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 2.2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $t \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце наступні тотожності*

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = 1, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i - nt)^2 C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = nt(1-t). \tag{2.2}$$

Доведення. Нагадаємо, що для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}$ і для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ має місце біноміальна формула Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}. \tag{2.3}$$

Поклавши в цій формулі $a = t$, $b = 1 - t$ отримаємо тотожність (2.1).

Для доведення тотожності (2.2) відзначимо, що для будь-яких натуральних i, n, $1 \leqslant i \leqslant n$, маємо

$$C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i} = C_n^i, \quad nC_{n-1}^{i-1} = iC_n^i. \tag{2.4}$$

Дійсно, для першої рівності маємо

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i} &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!}\,(i + (n-i)) = \frac{n!}{i!(n-i)!} = C_n^i. \end{aligned}$$

Для другої рівності маємо

$$\begin{aligned} iC_{n-1}^{i} &= \frac{i(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i-1)!} \\ &= \frac{(n-i)(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = (n-i)C_{n-1}^{i-1}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$nC_{n-1}^{i-1} = i(C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^{i}) = iC_n^i.$$

Покладемо в формулі Ньютона (2.3) $a = 1$, $b = u$. Отримаємо

$$(1+u)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^i. \tag{2.5}$$

Доведемо тепер, що

$$\sum_{i=0}^{n} iC_n^i u^i = nu(1+u)^{n-1} \tag{2.6}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Для $n = 1$ ця рівність очевидна. Використовуючи другу рівність в (2.4), для $n \geqslant 2$ отримаємо

$$nu(1+u)^{n-1} = u\sum_{i=1}^{n} nC_{n-1}^{i-1}u^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} iC_n^i u^i = \sum_{i=0}^{n} iC_n^i u^i.$$

Тотожність (2.6) доведено.

Доведемо тепер тотожність

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i u^i = nu(1+nu)(1+u)^{n-2}. \tag{2.7}$$

Для $n = 1$ ця рівність очевидна. Використовуючи другу рівність в (2.4) і тотожність (2.6), для $n \geqslant 2$ отримаємо

$$n(n-1)u^2(1+u)^{n-2} = u\sum_{i=1}^{n}(i-1)nC_{n-1}^{i-1}u^{i-1} = \sum_{i=1}^{n}(i-1)iC_n^iu^i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}i^2C_n^iu^i - \sum_{i=1}^{n}iC_n^iu^i = \sum_{i=1}^{n}i^2C_n^iu^i - nu(1+u)^{n-1}.$$

Тотожність (2.7) доведено.

Покладемо в тотожностях (2.5), (2.6) і (2.7)

$$u = \frac{t}{1-t}$$

і помножимо отримані рівності на $(1-t)^n$. Отримаємо

$$\sum_{i=0}^{n}C_n^it^i(1-t)^{n-i} = 1, \quad \sum_{i=0}^{n}iC_n^it^i(1-t)^{n-i} = nt,$$
$$\sum_{i=0}^{n}i^2C_n^it^i(1-t)^{n-i} = nt(nt+1-t). \tag{2.8}$$

Для завершення доведення достатньо в лівій частині рівності (2.2) розкрити дужки та скористатися рівностями (2.8). Маємо

$$\sum_{i=0}^{n}(i-nt)^2C_n^it^i(1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}i^2C_n^it^i(1-t)^{n-i}$$
$$- 2nt\sum_{i=0}^{n}iC_n^it^i(1-t)^{n-i} + n^2t^2\sum_{i=0}^{n}C_n^it^i(1-t)^{n-i}$$
$$= nt(nt+1-t) - 2n^2t^2 + n^2t^2 = nt(1-t).$$

Лема доведена. □

Лема 2.3. *Нехай* $t \in [0,1]$, $\delta > 0$ — *довільне додатне число і нехай*

$$\Delta_n(t) = \left\{ i \in \{1,\ldots,n\} \colon \left|\frac{i}{n} - t\right| \geqslant \delta \right\}.$$

Тоді

$$\sum_{i\in\Delta_n(t)} C_n^it^i(1-t)^{n-i} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Доведення. Якщо $i \in \Delta_n(t)$, то

$$\frac{(i-nt)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1.$$

Звідси, враховуючи, що $t(1-t) \leqslant 1/4$, отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Delta_n(t)} C_n^i t^i (1-t)^{n-i} &\leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{i\in\Delta_n(t)} (i-nt)^2 C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{i=1}^{n} (i-nt)^2 C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{nt(1-t)}{n^2\delta^2} \\ &\leqslant \frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Означення 2.4. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Многочленом Бернштейна від функції f називається многочлен $B_n = B_n(t) = B_n(f,t)$, визначений наступним чином

$$B_n(t) = B_n(f,t) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

Наступна теорема дозволить нам дати нове доведення теореми Веєрштраса.

Теорема 2.5. *Нехай функція $f \in C([0,1])$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n \geqslant N$ і для всіх $t \in [0,1]$ виконується нерівність*

$$|f(t) - B_n(f,t)| < \varepsilon,$$

тобто послідовність многочленів B_n рівномірно на $[0,1]$ прямує до функції f.

Доведення. Оскільки функція f неперервна на відрізку $[0,1]$, то вона обмежена на цьому відрізку і досягає своїх верхньої і нижньої граней. Позначимо

$$M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

□

2.2 Деякі властивості многочлена найкращого наближення

Позначимо через $\mathcal{P}_n$ лінійний простір алгебраїчних многочленів P_n степені $\leq n$,

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}.$$

Из теореми 2.1 легко отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.6. *Нехай $f \in C([a,b])$. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} E(f, \mathcal{P}_n) = 0.$$

Теорема 2.7. *Нехай $\mathcal{P}_n$ — множина многочленів степені не вище ніж n. Тоді для будь-якої функції $f \in C([a,b])$ в $\mathcal{P}_n$ існує многочлен P_n^* найкращого наближення.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{P}_n$ є скінченновимірним лінійним нормованим простором, то висновок теореми випливає з прикладу 1.23. □

Означення 2.8. Припустимо, що $f \in C([a,b])$ і поліном $P_n \in \mathcal{P}_n$. Позначимо $r_n = f - P_n$. Якщо в деякій точці $t_0 \in [a,b]$ виконується рівність

$$|r_n(t_0)| = \|r_n\|_C,$$

то точку t_0 називатимемо *точкою максимального відхилення* для різниці $r_n(t)$ або e-*точкою*. У цьому випадку, якщо

$$r_n(t_0) = \|r_n\|_C,$$

то точку t_0 будемо називати *точкою додатного відхилення* або $(+)$-*точкою*. У разі, якщо

$$r_n(t_0) = -\|r_n\|_C,$$

то точку t_0 будемо називати *точкою від'ємного відхилення* або $(-)$-*точкою*.

У наступній теоремі наведено необхідну умову того, що поліном є поліномом найкращого наближення.

Теорема 2.9. *Нехай* $f \in C([a,b])$, $P_n \in \mathcal{P}_n$ *і* $r_n = f - P_n$. *Тоді мають місце наступні твердження.*

1) *Якщо на відрізку* $[a,b]$ *не існує* $(+)$*-точок, то існує таке* $\delta > 0$, *що*

$$-\|r_n\|_C \le r_n(t) \le \|r_n\|_C - \delta \tag{2.9}$$

і існує такий поліном $Q_n \in \mathcal{P}_n$, *що*

$$\|f - Q_n\| \le \|f - P_n\| - \delta/2, \tag{2.10}$$

тобто, поліном P_n *не є поліномом найкращого наближення для* f.

2) *Якщо на відрізку* $[a,b]$ *не існує* $(-)$*-точок, то існує таке* $\delta > 0$, *що*

$$-\|r_n\|_C + \delta \le r_n(t) \le \|r_n\|_C \tag{2.11}$$

і існує такий поліном $Q_n \in \mathcal{P}_n$, *що*

$$\|f - Q_n\| \le \|f - P_n\| - \delta/2, \tag{2.12}$$

тобто, многочлен P_n *не є поліномом найкращого наближення для* f.

Доведення. 1). Нехай $f \in C([a,b])$ і $P_n \in \mathcal{P}_n$. Якщо на відрізку $[a,b]$ не існує $(+)$-точок, то найбільше значення функції r_n на $[a,b]$ менше, ніж $\|r_n\|_C$,

$$A := \sup_{t\in[a,b]} r_n(t) < \|r_n\|_C.$$

Звідси маємо, що

$$-\|r_n\|_C \le r_n(t) \le \|r_n\|_C - \delta \tag{2.13}$$

для будь-якого $0 < \delta < \|r_n\|_C - A$. Зафіксуємо довільне $0 < \delta < \|r_n\|_C - A$ і позначимо $Q_n(t) = P_n(t) - \delta/2$. Використовуючи нерівність (2.13), отримуємо

$$-\|r_n\|_C + \delta/2 \le f(t) - Q_n(t) \le \|r_n\|_C - \delta/2,$$

тобто $\|f - Q_n\| \le \|r_n\|_C - \delta/2 = \|f - P_n\| - \delta/2$.

2). Нехай $f \in C([a,b])$ і $P_n \in \mathcal{P}_n$. Якщо на відрізку $[a,b]$ не існує $(-)$-точок, то найменше значення на $[a,b]$ функції r_n більше $-\|r_n\|_C$,

$$A := \inf_{t\in[a,b]} r_n(t) > -\|r_n\|_C.$$

Звідси маємо, що

$$-\|r_n\|_C + \delta \leq r_n(t) \leq \|r_n\|_C \tag{2.14}$$

для будь-якого $0 < \delta < \|r_n\|_C + A$. Зафіксуємо довільне $0 < \delta < \|r_n\|_C + A$ і позначимо $Q_n(t) = P_n(t) - \delta/2$. Використовуючи нерівність (2.14), отримуємо

$$-\|r_n\|_C + \delta/2 \leq f(t) - Q_n(t) \leq \|r_n\|_C - \delta/2,$$

тобто $\|f - Q_n\| \leq \|r_n\|_C - \delta/2 = \|f - P_n\| - \delta/2$. $\square$

Список рекомендованої літератури

1. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1976.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — Москва : Наука, 1976.
3. *Либ Э.*, *Лосс М.* Анализ / за ред. Ю. Г. Решетняк. — Новосибирск : Научная книга, 1998.
4. *Харди Г. Г.*, *Литтльвуд Д. Е.*, *Полиа Г.* Неравенства: Пер. с англ. В. И. Левина; с доп. В. И. Левина и С. Б. Стечкина. — Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
5. *Коляда В. И.*, *Кореновский А. А.* Курс лекций по математическому анализу. В двух частях. Часть 2. — Одесса : Астропринт, 2009. — 292 с. — ISBN 9789661901741.