Диференціальні рівняння в теперешній час дуже часто використовивають для моделювання руху в багатьох областях наук, в тому числі в моделюванні різних процесів економіки. Теорія диференціальних рівнянь є важливим інструмент економічного і інших видів аналізу, особливо після того, як комп'ютер став загальнодоступним. Для того, щоб розуміти багато процесів, які виникають в макроекономічних моделях, особливо важно знати основи якісної теорії, і такі сучасні поняття, як біфуркації і хаос.

Вважають, що якісна теорія і пов’язана з нею теорія біфуркацій виникла десь на початку XIX століття. Анрі Пуанкаре, як вважають засновник цієї теорії запропонував, як можливо подати всі якісні особливості поведінки розв’язків диференціаль/них рівнянь, не розв’язуючи його. З виходом докторської дисертації А.М. Ляпунова теорія стійкості, якісний аналіз та теорія біфуркацій одержали важливий імпульс для розвитку.

В даній роботі розглядаються основні аспекти теорії теорії біфуркацій в рівняннях та системах, причому особливу увагу приділяють тим змінами, які відбуваються в структурі розв’язків диференціальних рівнянь при різних значеннях параметрів. В роботі наведені основні аспекти теорії біфуркацій і теорії хаосу динамічних систем, вивчаются картинки якісного розбиття фазового простору залежно від зміни параметра або декількох параметрів, також застосування цього апарату у вивченні економічних моделей. Дослідження можливості прогнозування при розгляді моделей в такому ключі.

Тема 1. Основні відомості з теорії динамічних систем.

§1.1. Відомості з теорії динамічних систем: положення рівноваги, периодичні розв’язки, цикли, хаос.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1.1}$$

Означення. Система звичайних диференціальних рівнянь (1.1) називається *динамічною* або *автономною*, якщо незалежна змінна явно не входить до диференціальної системи.

В нормальній формі Коші динамічну систему можливо записати:

$$x'(t) = f(x)$$

де t – незалежна змінна розміру один; x - n- мірна вектор- функція від t, $x=x(t)$; f –*деяка* відома вектор-функція своїх аргументів;

$$f: D \to R^n, \mathrm{D} \subseteq R^n, f' \in C'(D), t \in I \subseteq R.$$

Зауваження. Всі означення, які сформульовані для неавтономних систем, також справедливі і для автономних. Кожну неавтономну диференціальну систему можливо привести до автономної, якщо збільшити кількість змінних на одиницю.

Дійсно, запишемо неавтономну диференціальну систему в скалярній формі:

$$\begin{cases} \dot{x_k}' = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \\ k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{1.2}$$

В диференціальній системі (1.2) введемо нову змінну $x_{n+1} = t$, одержимо автономну диференціальну систему вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x'}_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \\ k = \overline{1, n} \\ \mathrm{x}'_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на деякій відкритій множині D змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умові Ліпшиця у

будь-якій замкнутій обмеженій множині, що цілком міститься в D, тоді при виконанні теорем існування і єдиності, для кожного дійсного числа t_0 і для будь-якої точки $x_0 \in D$ існуватиме єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$ системи (1.6), що задовольняють умові $\varphi(t_0) = x_0$.

Графік функції $x = \varphi(t)$, $t \in I \subseteq R$ будемо називати *фазовою траєкторією* системи (1.1), яка проходить через точку x_0.

Дослідження питань про властивості динамічних систем містить такі поняття, як положення рівноваги, періодичні розв'язки, квазіперіодичні розв'язки, точки біфуркації і стійкість.

Означення. Будемо називати точку $x^* \in R^n$ *особливою точкою* або *точкою рівноваги* автономної диференціальної системи (1.1), якщо виконується рівність $f(x^*) = 0$.

Означення. Будемо казати, що особлива точка x^*є *ізольованою особливою точкою,* якщо існує такий окіл особливої точки x^*, у якому немає іншої особливої точки, ніж x^* .

Зауваження. Особлива точка може не існувати.

Означення. Будемо казати, що розв'язок x^* є *періодичним розв'язком* для автономної диференціальної системи (1.1), якщо існує таке

$$\exists \mathrm{T} > 0, \text{що} \quad \text{для кожного} \forall t: \varphi(t, x^*) = \varphi(t + T, x^*).$$

Означення. Будемо казати, що розв'язок $x = x(t)$ є *квазіперіодичним розв'язком* для автономної диференціальної системи (1.1), якщо такий розв'язок можна подати у вигляді суми скінченної кількості періодичних функцій: $x(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)$,

де $\varphi_i(t)$ містить мінімальний період T_i і частоту $\beta_i = \frac{1}{T_i}$ та існує скінченний набір базових частот $\{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_p^*\}$ такий, що він є лінійно-незалежним.

Розрізняють різні види периодичних розв'язків. Періодичнй розвєязок нащивають *ізольованим*, якщо існує такий окіл, в якій не має іншого періодичного розв'язку. У випадку автономної динамічної системи періодичний розв'язок будемо називати *граничним циклом*.

Що до безпосередньо означення хаосу, то хаос може бути визначений як поведінка обмеженого стійкого подоження, у якого немає рівноважної (особливої) точки, ані періодичного розв'язку. Ісходячи з деяких міркувань, хаос може бути названий "стохастичною поведінкою" в детермінованих системах. Спостережувану поведінку динамічної системи будемо називати *стохастичною*, якщо перехід системи з одного стану в інший може бути описаний тільки імовірним описом, як це буває у по-справжньому випадкових процесів. Хаотичний рух в тривалому часі динамічних систем можливо одержати, принаймні, виконуючи дослідження в тривимірному просторі.

Теорема 1.3. Нехай дана функція є неперевно-диференційованою $f \in C^1$в деякій області D та x^* - положення рівноваги системи (1.1), тобто $f(x^*) = 0$. Припустимо, що $f'(x^*) \neq 0$. Тоді положення рівноваги x^* системи (1.6) є асимптотично стійким за Ляпуновим в додатньому напрямку, якщо виконується умова $f'(x^*) < 0$ і є нестійким, якщо $f'(x^*) > 0$.

Д о в е д е н н я: Нехай x^*- положення рівноваги рівняння (1.1). Будемо розкладати $f(x)$ у ряд Тейлора в точці x^*:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2 + \cdots$$

Врахуємо, що $f(x^*) = 0$ за визначенням положення рівноваги.

Тоді відповідне лфнійне рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f'(x^*)(x - x^*).$$

Проінтегруємо:

$$x - x^* = cexp(\lambda t),$$

де $\lambda = f'(x^*)$, с – довільна стала. Позначимо $(x - x^*) = \bar{x}$.

Якщо $\lambda<0$, то при $t \to \infty, \bar{x} \to 0$ і, отже, первинне відхилення x від стану рівноваги з часом затухає. Враховуючи означення, одержуємо, що стан положення рівноваги є стійким.

Якщо $\lambda>0$, то при $t \to \infty, \bar{x} \to \infty$, і тоді стан положення рівноваги є нестійким.

Якщо $\lambda=0$, то рівняння першого наближення не може дати відповіді на питання про стійкість стану рівноваги системи. Необхідно розглядати члени більш високого порядку в розкладанні в ряд Тейлора.

Таким чином, стійкістьчи нестійкість положення рівноваги x^* диференціального рівняння (1.1) визначається знаком похідної правої частини в точці рівноваги.

Зауваження. Лінійне диференціальне рівняння $\dot{x}' = f'(x^*)x$ називається *лінійним рівнянням варіації* або *лінеаризацією векторного поля* $\dot{x}' = f(x)$ відносно своєї точки рівноваги x^*.

Означення. Точка рівноваги x^* називається *точкою гіперболічної рівноваги*, якщо $f'(x^*) \neq 0$.

Якщо $f'(x^*) = 0$, то x^* називається *негіперболічною* або *виродженою точкою рівноваги.*

Зауваження. Якщо виконується умова $f'(x^*)<0$, то точка рівноваги *x=0* диференіального рівняння $\dot{x} = f'(x^*)x$ є асимптотично стійкою, і якщо $f'(x^*)<0$ і нестійкою, то теорема 1.3. стверджує, що при $f'(x^*) \neq 0$, тип стійкості положення рівноваги x^* співпадає з видом стійкості рівняння (1.6) на початку його лінеаризованого векторного поля. Слід зазначити, що умова $f'(x^*) \neq 0$ є дуже важливою.

У випадку виродженого положення рівноваги, стійкість чи нестійкість визначається більш високими членами розкладання Тейлора функції *f (x)* при x^*.

§1.2. Приклади конкретних моделей.

Приклад 1. Розглянемо *монетарну модель гіперінфляції Кейгана, яка описується рівняннями* :

$$m(t) - p(t) = -\alpha\pi(t), \alpha > 0,$$
$$\dot{\pi} = \gamma\left(\dot{p} - \pi\right), \gamma > 0,$$

де m *– натуральний логарифм номінальної грошової маси (M);*p *– натуральний логарифм рівня цін (P);*π *– очікуваний рівень інфляції.*

Припустимо, що *виробництво* і *реальна процентна ставка* є фіксованими; ефект багатства ігнорується. Перше рівняння системи описує неперервну рівновагу на грошовому ринку, друге рівняння виражає форму адаптивної

гіпотези про очікуваний рівень інфляції. Коефіцієнт

$$\alpha = \frac{1}{M}\frac{dM}{d\pi}$$

інтерпретується як полуеластичність попиту, який вимірює процентну зміну попиту на гроші в процентних пунктах зміни очікуваного рівня інфляції. Будемо припускати, що номінальна грошова маса залишається сталою, тоді, що

$$[p = m + \alpha\pi]$$
$$\dot{p} = \alpha\dot{\pi}.$$

Якщо підставимо до другого рівняння, одержуємо

$$\dot{\pi} = \frac{\dot{p}}{\alpha};$$
$$\frac{\dot{p}}{\alpha} = \gamma\left(\dot{p} + \frac{m-p}{\alpha}\right);$$
$$\frac{\dot{p}(1-\alpha\gamma)}{\alpha} = \gamma\frac{m-p}{\alpha};$$
$$\dot{p} = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\gamma}\cdot\frac{m-p}{\alpha}$$

$$\dot{p} = \frac{\gamma}{1-\alpha\gamma}(m-p).$$

Звідси *висновок,* що модель цін стійка тоді і тільки тоді, коли $\alpha\gamma < 1$. Це співвідношення підкреслює компроміс між напівеластичністю попиту на гроші по відношенню до інфляційних очікувань і швидкістю адаптації інфляційних очікувань. *Висока чутливість попиту на грошову функцію сумісна із стійкістю, тільки якщо інфляційні очікування досить адаптуються до минулих темпів інфляції.*

Приклад 2. *Пастка бідності, яка згенерована в моделі Солоу.*

Нехай дана функція споживання вигляду

$$c(t) = (y_0 - \delta_k k_0) + \bar{\xi}(y(t) - c_0), \qquad (1.3)$$

де $c(t)$ і $y(t)$ відповідно споживання на душу населення і доход на душу населення в момент часу t; y_0 – прожитковий мінімум на душу населення;

k_0 – співвідношення капіталу і праці у відповідність з рівнем прожиткового мінімуму; δ_k – норма амортизації капіталу; $\bar{\xi}(0<\bar{\xi}<1)$ – схильність до споживання без урахування прожиткового мінімуму.

Коли доход на одного робітника на рівні прожиткового мінімуму, він дорівнює амортизації основного капіталу, тобто

$$y_0 - c = \delta_0 k_0.$$

Відповідна норма заощаджень – це

$$s(t) = \frac{y(t)-c(t)}{y(t)} = \hat{s}_0 - \frac{\delta^*}{y(t)}, \qquad (1.4)$$

де $\hat{s}_0 \equiv 1 - \bar{\xi} > 0, \delta^* \equiv \hat{s}_0 y_0 - \delta_k k_0, \hat{s}_0$ – схильність до заощаджень не з прожиткового мінімуму.

У відповідносты до позначень, параметр δ^* може бути додатнім або від'ємним. Якщо $\hat{s}_0 y_0 > \delta_k k_0, \delta^*$, що означає, що у міру зростання доходів збереження зменшуються. Заощадження є нелінійною функцією від рівня доходів на душу населення. Норма заощаджень буде зростати разом з прибутком на душу населення, якщо гранична схильність до споживання без урахування прожиткового мінімуму менше, ніж середня схильність до

споживання з урахуванням прожиткового мінімуму.

Таким чином, норма заощаджень має тенденцію падати у міру збільшення доходу вище за прожитковий мінімум. Якщо підставити рівняння (1.4) в основне рівняння, маємо

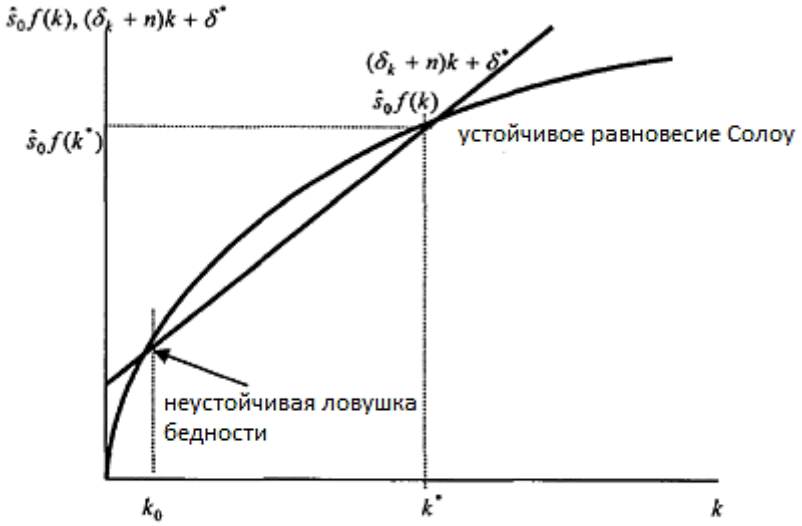
$$\dot{k} = s(t)y(t) - (n + \delta_k)k(t),$$

$$\left[\begin{array}{c} s(t)y(t) = y(t) - c(t) = \left(\hat{s}_0 - \dfrac{\delta^*}{y(t)}\right)y(t); \\ \dot{k} = \hat{s}_0 y(t) - \delta^* - (n + \delta_k)k(t) \end{array}\right]$$

яке по *k* дає

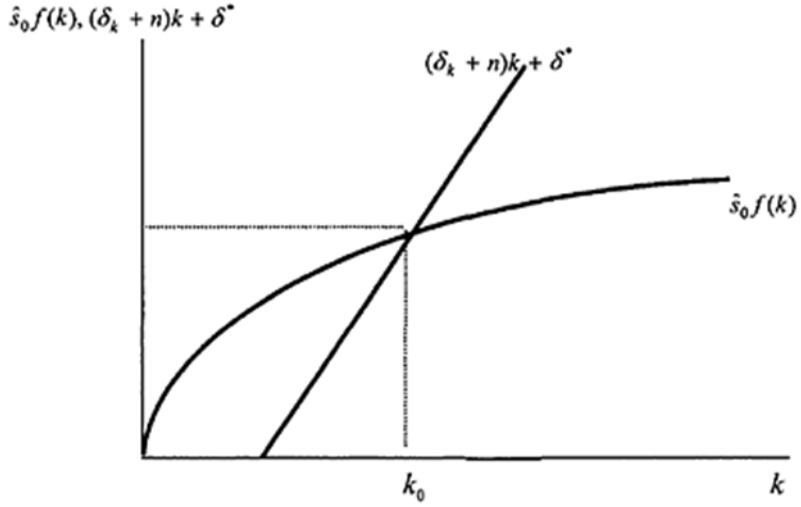
$$\dot{k} = \hat{s}_0 f(k) - (n + \delta_k)k - \delta^*, \qquad (1.5)$$

у якому *n* – фіксований приріст населення.ВТаким чином,описана модель називається *узагальненою моделлю Солоу з пастками бідності.*Ця модель дає дві точки рівноваги, як показано на малюнку 1.5 при $\delta^* > 0$.



Мал.1.5. Дві точки рівноваги при $\delta^* > 0$

У разі, коли $\delta^* > 0$, рівновага при високому рівні k схожа на стійке положення в моделі Солоу. Інше - на рівні прожиткового мінімуму. Економічно: система не залишатиметься там довгий час. Бідність не може бути стійкою при належних порушеннях, наприклад, зовнішній підтримці і торгівлі. Ця пастка відбувається тому, що при низькому рівні співвідношення капіталу і праці доход на душу населення навряд чи достатній і заощадження опускаються нижче амортизації. Якщо економіка переживає такий вид бідності, то легко почати швидкий розвиток, тому що одного разу співвідношення праці і капіталу стане вище, ніж рівень k_0, він швидко ростиме у напрямі стійкої рівноваги. Як тільки економіка досягає високого рівня життя, вона в пастці, тому що цей стабільний стан. В цьому випадку модель містить тільки одно умову рівноваги - стан нестійкої бідності, коли $\delta^* < 0$, тобто, $\hat{s}_0 y_0 < \delta_k k_0$. Така ситуація має місце, коли норма заощаджень є занадто низькою або коли прожитковий мінімум на душу є занадто низьким. Якщо економіка характеризується політичною і соціальною нестабільністю, то вона має низький рівень заощаджень. При таких обставинах, народ навряд чи може зробити який-небудь прогрес в економічному розвитку.



Мал. 1.6. Поодинока пастка бідності при $\delta^* < 0$.

§1.3. Відомості з теорії диференціальних систем рівнянь.

Розглянемо нелінійну автономну систему:

$$x'_j(t) = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \qquad (1.6)$$

Нехай x^* - деяка нерухома точка нелінійної системи (1.6). Будемо досліджувати поведінку розв'язків в околі стаціонарної точки x^*. Введемо вектор відхилень розв'язку від x^*: $\Delta x = x - x^*$.

Початкова нелінійна система рівнянь в околі точки апроксимується за допомогою розкладання функції правих частин диференціальної системи в ряд Тейлора

$$f_j(x) = f_j(x*) + \frac{df_j}{dx_1}(x*)x_1 + \frac{df_j}{dx_2}(x*)x_2, j = 1,2$$

$$f_j(x) = g_j(X), j = 1,2$$

де $g_j(X)$ вищий по порядку член розкладання, такий, що $\frac{g_j(X)}{\|x\|} \to 0$ при $\|X\| \to 0$, де $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Запишемо у векторній формі і збережемо члени ряду до першого порядку включно:

$$\frac{d(x_i + \Delta x_i)}{dt} = f_i(x + \Delta x), i = 1,2, \dots, n.$$

$$\frac{dx_i}{dt} + \frac{d(\Delta x)}{dt} \approx f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \Delta x_j.$$

Для стаціонарного розв'язку одержуємо $\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{x = x^*} = 0, f_i(x^*) = 0$

і з розкладання отримуємо:

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta x_j, i = 1,2, \dots, n$$

чи в матричному записі

$$\frac{d\Delta x}{dt} = J\Delta x$$

де J – матриця Якобі, причому значення усіх похідних беруться в точці x^*.

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Тоді рівняння (1) при $f(x^*) = 0$ може бути подано у векторній формі

$$X' = AX + g(X). \qquad (1.7)$$

Означення. Отримана система рівнянь (1.7) є лінійною системою рівнянь з сталими коефіцієнтами і називається *лінеаризацією нелінійної системи* (1.4) в точці x^*.

Оскільки нелінійний член g (X) є маленьким в порівнянні з лінійним AX при малому X, то припускаємо, що траєкторії лінеаризованої системи дуже наближені до таких з нелінійної системи, які близькі до початку координат.

Визначення 1.4.4. Будемо говорити, що стаціонарна точка є *простою* нерухомою точкою нелінійної системи (1.6), якщо відповідна лінеаризована система проста.

Таким чином, нехай нелінійна система має просту нерухому точку x^*. Тоді в околі цієї точки фазові портрети системи і її лінеаризації будуть якісно еквівалентні, якщо тільки нерухома точка лінеаризованої системи не є центром.

Відмітимо, що особливі точки типу вузол, фокус і сідло відносять до так званих грубих особливих точок: їх характер не змінюються при малих збуреннях правих частин початкової нелінійної системи. Особлива ж точка центр - негруба точка: характер фазових траєкторій в її околі змінюється вже при малих змінах правих частин системи диференціальних рівнянь. При цьому центр перетворюється на стійкий або в нестійкий фокус.

Треба відзначити, що навіть якщо критична точка того ж типу, що і точка з лінійної диференціальної системи, траєкторії майже лінійної системи можуть значно відрізнятися від таких з відповідної системи, окрім дуже близькій критичній точці (x^*).

Якщо розглядати шляхи економічного розвитку, то це має на увазі, що траєкторії лінеаризованої системи повинні інтерпретуватися з великим застереженням, оскільки дійсність після нелінійної системи може бути далекою від рівноваги.

Тема 2. Основні види біфуркації для випадку одного рівняння.

В основі цієї теорії лежать можливі зміни в структурі розв’язків диференціального рівняння в залежності від параметрів. Фактично зміна якісних властивостей може означати зміну в стійкості чи нестійкості положення рівноваги початкової системи.

§2.1. Основні означення теорії біфуркацій. Гіперболічне і негіперболічне положення рівноваги

Означення. Значення параметра, для якого потік не має стійкої структури орбіти, називають *біфуркаційним значенням*, а точка, в якій система змінює свою якісну поведінку, будемо називати *точкою біфуркації*.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x}' = F(x, \lambda), \qquad (2.1)$$

де x визначено в деякому просторі, λ є вектор - параметр, а F - вектор-функція, який задовольняє деяким вимогам. Для диференціалного рівняння (2.1) можуть існувати різні типи розв'язків; такі як стаціонарні розв'язкі, субгармонійні розв'язкі, асимптотично квазіперіодичні розв'язкі, хаос, і інші.

Розглянемо окремо рівняння так званої рівноваги:

$F(x, \lambda) = 0$. Будемо вважати, що F має стільки похідних, скільки необхідно. Розглянемо рівноважні стану як функції від параметрів.

Наприклад, розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$x' = \lambda - x \qquad (2.2)$$

де λ – дійсний параметр. Тоді при $\lambda=0$ $\dot{x} = x \Rightarrow x(t) = ce^{-t}$,

*п*ри $\lambda \neq 0 \Rightarrow x(t) = ce^{-t} + \lambda$.

Одержуємо, що при усіх значеннях λ похідна дорівнює $F_x' = -1 \neq 0$,

тоді існує тільки одне гіперболічне положення рівноваги, яке є асимптотично стійким за теоремою 1. 3.

Таким чином, біфуркаційна задача фактично еквівалентна дослідженню

кривих рівняння $F(x,\lambda) = 0$ і їх особливих точок. Основним теоретичним фактом для доказу існування є теорема про неявну функцію, яка має місце для функцій з декількаами параметрами.

Нехай для (2.1) виконуються умови на праву частину $F \in C^1$,

$F(0) = 0, F'(0) \neq 0$. Згідно з теоремою 1.3. стійкість чи нестійкість положення рівноваги x=0 визначається лінійним наближенням векторного поля навколо нуля, тобто більш високий порядок членів розкладання в ряд Тейлора системи (2.1) не впливає на якісний склад потоку поблизу нуля.

Розглянемо диференціальне рівняння з параметром

$$\dot{x'} = F(x,\lambda),$$

где $F(x,0) = f(0), F_x(0,0) = f'(0) \neq 0.$

Нехай $x^* = 0$ є гіперболічною точкою рівноваги диференціального рівняння (2.1), то умови теореми про неявну функцію виконуються. Отже, рівняння $F(x,\lambda) = 0$ маэ бути розв'язане локально, залежно від параметрів $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Якщо виконуэться умова $F'_x(x(\lambda),\lambda) \neq 0$, то вид стійкості рівноваги $x(\lambda)$ буде таким, як і тип положення рівноваги $x^* = 0$ незбуреного рівняння, яке не містить параметру

$$x' = F(x).$$

Таким чином, *якісний склад потоку не змінюється поблизу положення рівноваги* $x^* = 0$. Отже, в околі такого положення рівноваги *немає біфуркацій*.

Висновок: *рух поблизу точки гіперболічної рівноваги нечутливо до малих збурень векторного поля.*

§2.2. Типи біфуркацій на площині

При дослідженні питання про якісну поведінку диференціальних рівнянь та систем, що виникають в рівняннях моделей, обов'язково виникають питання: чи є біфуркаційні діаграми випадковими? Скільки їх? Можливо визначити, в якій моделі можуть виникати подібні біфуркації? Роглянемо теорію.

Нехай маємо дві динамічні системи

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \alpha \in \mathrm{R}^m, \tag{2.3}$$

і

$$\dot{x} = f(x, \beta), \beta \in \mathrm{R}^m, \tag{2.4}$$

де функція *f неперервною*, містить однакову кількість змінних і параметрів.

Означення. Динамічну систему (2.3) будемо називати *типологічно еквівалентною* динамічною системі (2.4), якщо існує гомеоморфізм просторів параметрів :

$$\rho: \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n, \beta = \rho(\alpha);$$

та параметр - залежний гомеоморфізм фазових просторів

$$h_\alpha: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n, y = h_\alpha(x),$$

зображення кривих системи (2.3) при значеннях параметра α на орбіту системи (2.4) якщо $\beta = \rho(\alpha)$, причому напрям часу є збереженним.

Теорема 2.1. Нехай диференціальне однопараметричне рівняння

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \tag{2.1}$$

містить положення рівноваги в точці x=0, причому виконуються умови $F'_x(0,0) = 0$. Тоді рівняння (2.1) локально типологічно еквівалентно одному з рівнянь вигляду

$$y' = \beta y^2.$$

Дослідимо на наявність біфуркацій кожного рівняння окремо.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = x^2 + \lambda, \qquad (2.5)$$

де $\lambda \in R$ – дійсний параметр, який є збуренням рівняння $\dot{x} = x^2$. Бачимо,що $x^* = 0$ *не є точкою гіперболічної* рівноваги при λ=0.

Будемо шукати положення рівноваги з рівняння, розв'яуючи відносно x:

$$x^2 + \lambda = 0$$

Знайдемо рух траєкторій рівняння при усіх λ. Розглянемо, які розв'язки можливо одержати в залежності від λ:

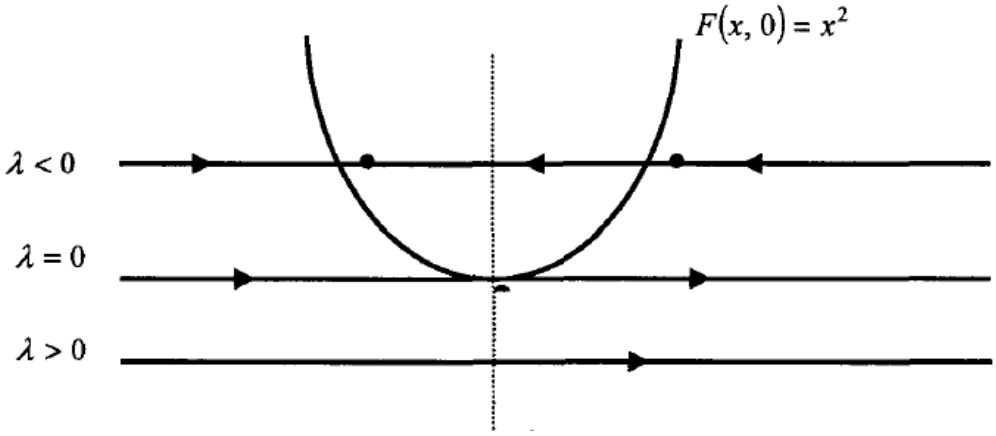
при λ=0, одержуємо $x = 0$ єдиний розв'язок;

при λ>0, тоді розв'язків немає;

при λ<0, тоді$x = \pm\sqrt{-\lambda}$ маємо два розв'язки.

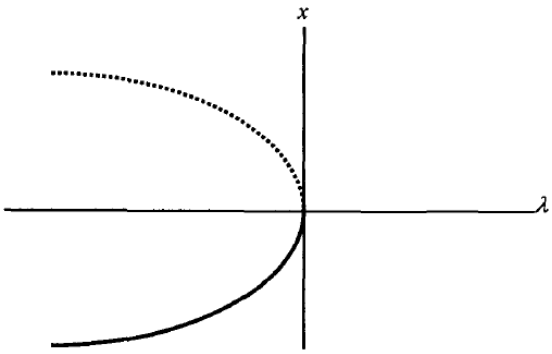
Розглянемо, як будуть вести розв'язки рівняння (2.3) при різних значеннях параметра λ, якщо будемо вважати криву $F(x, 0)$ фіксованою. Одержуємо малюнок 2.1. При кожному λ<0 рівняння містить дві точки рівноваги. Для λ=0 система (2.5) містить одну і тільки одну x=0. При кожному λ>0 (2.5) точок рівноваги не має. При зміні параметру λ одержуємо розташування точок рівноваги. Для λ=0 незалежно від розміру зміни параметру λ, кількість орбіт змінюється: два положення рівноваги при

кожному λ<0 і жодного при λ>0.



Мал.2.1. Фазовий портрет для $\dot{x} = x^2 + \lambda$ при різних значеннях λ

Фактично, диференціальне рівняння (2.5) містить деяку стійку структуру орбіти для кожного λ≠0. Тип біфуркації рівняння (2.5) будемо називати *седлоузловою біфуркацією,* а графік залежності змінної *x від* λ, будемо називати *біфуркаційним графіком*.



Мал. 2.2. Біфуркаційний графік для $\dot{x} = x^2 + \lambda$

Розглянемо другий випадок, тобто диференціальне рівняння вигляду

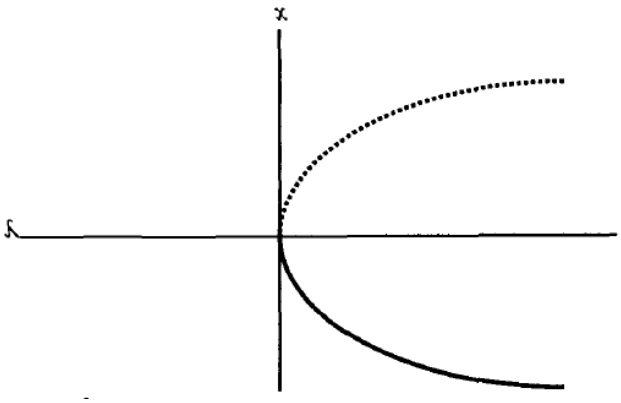
$$\dot{x} = \lambda - x^2, \lambda \epsilon R \qquad (2.6)$$

Розглянемо праву частину рівняння (2.6) і знайдемо положення рівноваги в залежності від параметра λ:

$$\lambda - x^2 = 0$$

Дослідимо рух розв'яків рівняння для кожного λ.

Якщо λ=0, $x = 0$ один роз в'язок; якщо λ>0, $x = \pm\sqrt{-\lambda}$ рівняння містить два розв'язка; якщо λ<0 розв'язків немає. Одержуємо біфуркаційний графік (мал.2.3).



Мал. 2.3. Біфуркаційний графік для $\dot{x} = \lambda - x^2$

***Приклад*:** *Дослідження моделі динаміки ринку праці.*

Розглянемо модель ринку праці. Нехай $l^s(w)$ і $l^d(w)$ - попит і пропозиція відповідно,кожне з яких залежить від реальної заробітної плати w. Зміна реальної заробітної плати, передбачається, залежить від надмірного попиту на роботу на цьому ринку, тобто

$$w = \beta\Big(l^d(w) - l^s(w)\Big), \beta > 0.$$

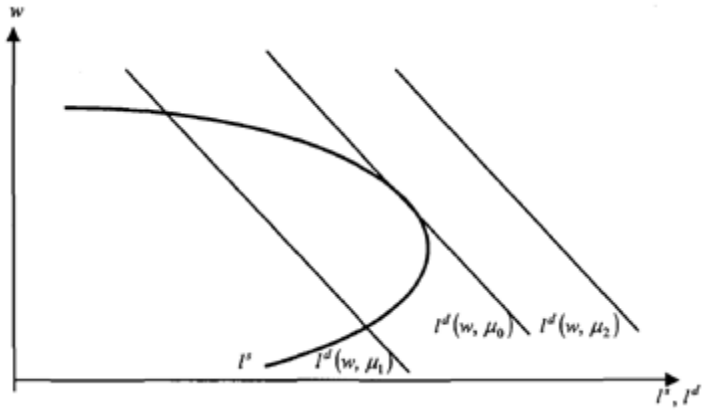
Нехай функція попиту можливо записати в вигляді

$$l^d(w, \mu) = \mu - bw, b > 0.$$

Припустимо, що $d^2 l^s(w) / dw^2 > 0$ для будь-кого $w>0$ і

$dl^s(w)/_{dw} < 0$ для w, що перевищує значення w_0.

Розглянемо $f(w,\mu) = l^d(w,\mu) - l^s(w)$. Нехай μ_0 таке, що $f(w_0,\mu_0) = 0$ і $\partial f/_{\partial\mu(w_0,\mu_0)} = 0$. Тоді при μ_0 функції попиту і пропозиції дотикаються, одержуємо , що положення рівноваги цієї моделі є точкою седловузлової біфуркації.



Мал.2.4. Модель попиту і пропозиції робочої сили

§2.3. Біфуркаціїї у диференціальних рівнянь з більш складною правою частиною.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$x' = \lambda x + x^2 \tag{2.7}$$

Дослідимо рух траєкторій диференціального рівняння рівняння (2.7) , для цього знайдемо положення рівноваги при усіх λ

$$x^2 + \lambda x = 0$$

$$x(\lambda + x) = 0$$

При $x = 0$ розв'язок при λ э асимптотично стійким.

При $x = -\lambda$, проведемо допоміжні дослідження, для цього знайдемо похідну по x

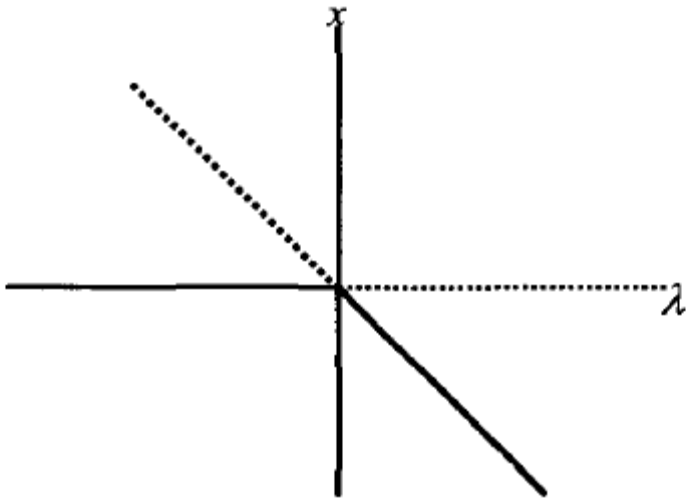
$$F_x^{'}(x, \lambda) = \lambda + 2x.$$

Тоді при *λ>0,* $x = -\lambda$ маємо стійкий розв'язок; при *λ<0,* $x = -\lambda$ розв'язок за теоремо. 1.3 є нестійким.

Положення рівноваги для усіх значень λ - початок координат. При дослідженні параметра λ , ми одержуємо, що положення, при якому дві рівноваги зливаються і не є нестійкою негіперболічною точкою рівноваги, це λ=0. При λ>0 початок координат нестійкий і точка рівноваги $x = -\lambda$,яка є стійкою.

При λ<0 початок координат асимптотично стійкий, існує інша положення

$x = -\lambda$, яке є нестійким. Біфуркація, яку ми одержали в рівнянні (2.7), будемо називати *транскритичноою біфуркацією(*графіку 2.5).



Мал. 2.5. Біфуркаційний графік для $\dot{x} = \lambda x + x^2$

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$x' = -x^3 + x + \lambda \qquad (2.8)$$

Знайдемо положення рівноваги $x(-x^2 + 1) = 0$

Дослідимо поведінку розв'язків при різних параметрах λ:

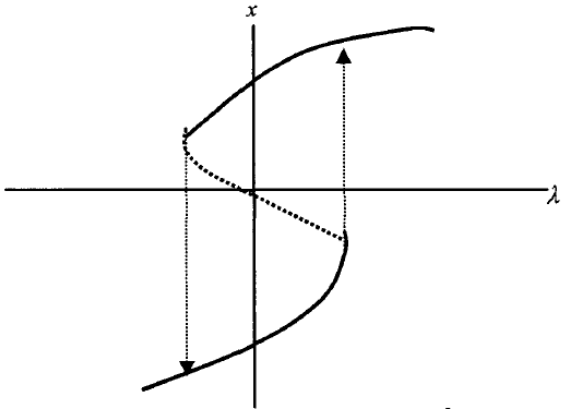
при λ=0 одержуємо $x_1 = \pm 1; x_2 = 0$, такоим чином, маємо три точки рівноваги - 1, 0, 1. Наступний крок, будемо шукати похідні від x:

$$F_x^{'}(x, \lambda) = -3x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Підставимо знайдені значення в рівняння:

$$F\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}; F\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Потік як і раніше має стійкою орбітальну структуру при досить малих значеннях параметра $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$, де $\lambda_0 = {}^{2}/_{3\sqrt{3}}$ – локальне максимальне значення і $-\lambda_0$ –локальне мінімальне значення $F(x, 0)$. Для $\lambda_0 = {}^{2}/_{3\sqrt{3}}$ і $\lambda_0 = -{}^{2}/_{3\sqrt{3}}$, рівняння містить точки біфуркації. (мал.2.6) Біфуркацію, яка виикає в диференціальному рівнянні (2.8), будемо називати *гістерезисом*. Дуже цікаво, щосистема робить стрибок при двох різних значеннях параметрів. Деяка начастина малюнку (2.6), яка зхожа на паралелограм, називається *петлею гістерезису*.



Мал. 2.6. Біфуркаційний графік для (2.8).

Розглянемо ще одне диференціальне рівняння вигляду

$$\dot{x} = -x^3 + \lambda x\,, \qquad (2.9)$$

для якого дослідимо рух траєкторії для кожного λ:

при λ=0, $x = 0$ одне розв'язок; при λ>0, $x = \pm\sqrt{\lambda}$ два розв'язку; при λ<0, розв'язків немає.

При λ=0 незбурена система $\dot{x} = -x^3$ при додатніх λ три положення рівноваги і три стійких орбітальних структури.

При λ=0, рівноваги збираються на початку координат, і система знаходиться в точці біфуркації. При усіх λ<0, рівняння має стабільну орбітальну структуру. Біфуркація, показана в рівнянні (2.9), називається *вилами біфуркації.*

Розглянемо диференціальне рівняння

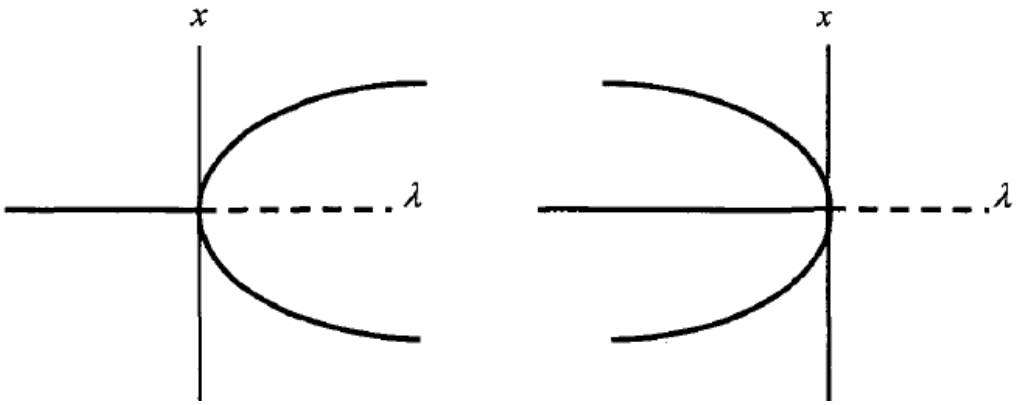
$$\dot{x} = x^3 + \lambda x \qquad (2.10)$$

Визначимо рух траєкторія рівняння при усіх λ

$$x(x^2 + \lambda) = 0$$

Дослідимо поведінку розв'язків при різних параметрах λ: якщо λ=0, $x = 0$ один розв'язок; якщо λ>0, $x = \pm\sqrt{-\lambda}$ розв'язків немає; при λ<0, два розв'язки.

Різновиди біфуркацій, які виникають у системі, будемо називати *післякриточною,* якщо додаткові положенняи рівновагимають місце для значень параметрів, в яких точка рівноваги нестійка (мал.2.4). В іншому випадку, при якому положення рівноваги стійке, біфуркацію називають *докритичною* *(мал.2.4.b).*



a) після критична біфрукація b) до критична біфрукація

Мал. 2.4. Біфуркація типу вили