МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І.І.МЕЧНИКОВА
Кафедра фізики та астрономії

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з науково-педагогічної роботи
Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
"____" _____ 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ОК 19 «Методи математичної фізики»

Рівень вищої освіти	**перший (освітньо-професійний)**
Галузь знань	**10 – Природничі науки**
Спеціальність	**104 - Фізика та астрономія**
Освітньо-професійна програма	**Фізика та астрономія**

ОНУ
Одеса
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Методи математичної фізики». – Одеса: ОНУ, 2022. – 18 с.

Розробники: Адамян Вадим Мовсесович, доктор фізико-математичних наук, професор; Сушко Мирослав Ярославович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та астрономії

Робочу програму затверджено на засіданні кафедри фізики та астрономії ФМФІТ

Протокол № 1 від «5» вересня 2022 р.
Завідувач кафедри _____ Володимир ГОЦУЛЬСЬКИЙ

Погоджено із гарантом ОПП «Фізика та астрономія» _____ Юрій НІЦУК

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 1 від «6» вересня 2022 р.

Голова НМК _____ Наталя МАСЛЄЄВА

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри фізики та астрономії

Протокол № ___від «___» _____20___ р.

Завідувач кафедри _____ (_____)

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри фізики та астрономії

Протокол № ___від «___» _____20___ р.

Завідувач кафедри _____ (_____)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, Спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		Очна (денна) форма навчання
Загальна кількість кредитів – 7 годин – 210 змістовних модулів – 6	Галузь знань 10 – Природничі науки Спеціальність: 104 – Фізика та астрономія Рівень вищої освіти: Перший (освітньо-професійний)	Обов'язкова дисципліна
		Рік підготовки:
		2-й, 3-й
		Семестр
		4-й, 5-й
		Лекції
		60 год.
		Практичні, семінарські
		44 год.
		Лабораторні
		0 год.
		Самостійна робота
		106 год.
		Форма підсумкового контролю: залік, іспит

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою навчальної дисципліни є підготовка фахівців, які володіють основами кількісного опису, моделювання та симуляції природних явищ і фізичних процесів, базових математичних методів сучасної фізики та їх застосувань при розробці проблем фізики, астрономії та прикладної фізики, здатні розв'язувати базові задачі і практичні проблеми, пов'язані з дослідженням фізичних об'єктів, а також формування у здобувачів здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі з організації освітнього процесу, які зумовлені закономірностями й особливостями сучасної теорії і методики навчання.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни є формування у студентів наступної системи компетентностей, що включають знання, розуміння, уміння та навички кількісного аналізу природних явищ та фізичних процесів з використанням математичних методів сучасної фізики:

Інтегральна компетентність – здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми з фізики та/або астрономії у професійній діяльності або у процесі подальшого навчання, що передбачає застосування певних теорій і методів фізики та/або астрономії і характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

Загальні компетентності:

К01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

К02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

К04. Здатність бути критичним і самокритичним.

К05. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

К08. Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.

Спеціальні (фахові) компетентності:

К16. Знання і розуміння теоретичного та експериментального базису сучасної фізики та астрономії.

К17. Здатність використовувати на практиці базові знання з математики як математичного апарату фізики і астрономії при вивченні та дослідженні фізичних та астрономічних явищ і процесів.

К18. Здатність оцінювати порядок величин у різних дослідженнях, так само як точності та значимості результатів.

К24. Здатність працювати з джерелами навчальної та наукової інформації.

Програмні результати навчання.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач вищої освіти повинен досягнути таких результатів:

ПР08. Мати базові навички самостійного навчання: вміти відшуковувати потрібну інформацію в друкованих та електронних джерелах, аналізувати, систематизувати, розуміти, тлумачити та використовувати її для вирішення наукових і прикладних завдань.

3. **Зміст навчальної дисципліни**

2-й рік, 4-й семестр

Змістовий модуль 1. Рівняння теплопровідності та дифузії

Тема 1. Процес теплопровідності. Температура, тепловий потік, теплові джерела (стоки). Рівняння теплового балансу в інтегральній та диференціальній формах. Закон Фур'є. Рівняння теплопровідності. Лінійне неоднорідне та однорідне рівняння теплопровідності. Крайові умови.

Тема 2. Задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності. Єдиність розв'язку. Лінійне рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами у тривимірному просторі. Функція Гріна. Розв'язок задачі Коші. Фізичний зміст функції Гріна рівняння теплопровідності.

Тема 3. Стаціонарна температура та теплові коливання. Ньютонівський тепловий потенціал. Рівняння Пуассона. Гармонічні функції та їх поведінка в обмежених областях. Єдиність спадного розв'язку рівняння Пуассона та умови, за яких він збігається з ньютонівським потенціалом. Усталені коливання під дією джерел, що змінюються з часом за гармонічним законом. Рівняння Гельмгольца. Сферичні теплові хвилі.

Тема 4. Процес дифузії. Закон збереження кількості частинок в інтегральній та диференціальній формах. Закон Фіка. Рівняння дифузії. Фізичний зміст функції Гріна рівняння дифузії. Дифузія як стохастичний процес. Рівняння Чепмена-Колмогорова та Фоккера-Планка.

Змістовий модуль 2. Додаткові розділи аналізу

Тема 1. Узагальнені функції. Лінійний простір інтегровних функцій. Лінійні функціонали. Узагальнена функція як границя послідовності звичайних інтегровних функцій. Дельта-функція Дірака. Властивості складеної дельта-функції. Диференціювання узагальнених функцій. Похідні дельта-функції, східчастої функції Хевісайда та знакової функції. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь. Узагальнені розв'язки рівнянь Лапласа та Гельмгольца.

Тема 2. Інтегральне перетворення Фур'є. Метод відокремлення змінних. Плоскі хвилі. Принцип суперпозиції. Перетворення Фур'є. Властивості Фур'є-образів, формула обернення. Згортка інтегровних функцій. Рівність Парсеваля–Планшереля.

Змістовий модуль 3. Задачі для хвильового рівняння

Тема 1. Малі коливання рідин і газів. Рівняння руху ідеальної рідини. Рівняння неперервності. Рівняння стану. Лінеаризовані рівняння гідродинаміки. Потенціальні течії рідини в полі потенціальної об'ємної сили. Потенціал швидкості, знаходження полів швидкості і тиску через потенціал швидкості. Хвильове рівняння.

Тема 2. Задача Коші для однорідного хвильового рівняння. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння у тривимірному просторі на основі методу Фур'є. Перехід до сферичних середніх від початкових функцій. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса. Одновимірна та двовимірна задачі Коші для хвильового рівняння.

Тема 3. Неоднорідне хвильове рівняння. Побудова розв'язку неоднорідного хвильового рівняння у вигляді загаювального потенціалу. Усталені коливання під дією джерел, що змінюються з часом за гармонічним законом. Амплітуда усталених коливань. Розбіжні та збіжні сферичні хвилі. Умова випромінювання Зоммерфельда.

3-й рік, 5-й семестр

Змістовий модуль 4. Варіаційне числення

Тема 1. Поняття функціонала. Функціонали найпростішого вигляду. Основна задача варіаційного числення. Необхідна умова існування екстремуму функціонала найпростішого типу. Теорема Ейлера–Лагранжа. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера–Лагранжа. Задачі про брахістохрону, Плато, поширення світла в неоднорідному середовищі. Екстремальні принципи у фізиці. Достатня умова екстремуму для функціонала найпростішого типу.

Тема 2. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення. Задачі для кривих із рухомими кінцями. Модифікована задача про брахістохрону. Умови трансверсальності. Задача Больца. Функціонали, що залежать від декількох функцій. Узагальнення найпростішої варіаційної задачі на випадок, коли функціонал залежить від функції та її вищих похідних. Рівняння Ейлера–Пуассона. Ізопериметричні задачі. Задачі про ланцюгову лінію і про максимальну площу, обмежену гладкою кривою.

Тема 3. Функціонали, що залежать від функцій декількох змінних. Необхідна умова існування екстремуму. Рівняння Ейлера–Остроградського. Крайові умови. Рівняння Лапласа для електростатичного поля. Функція Лагранжа натягненої струни і рівняння малих поперечних коливань струни. Функція Лагранжа, рівняння малих поздовжніх коливань стержня і крайові умови для різних типів закріплення кінців стержня. Рівняння і крайові умови для малих згинальних коливань стержня.

Змістовий модуль 5. Коливання, теплопровідність та дифузія в однорідних системах

Тема 1. Коливання натягненої струни. Закон збереження енергії та єдиність розв'язку крайових задач про вільні коливання. Хвильове рівняння на прямій. Формули Д'Аламбера. Метод продовжень і формули Д'Аламбера для півпрямої та відрізка. Коливання обмеженої однорідної струни. Розв'язок задачі Коші для коливань однорідної струни (стержня) у вигляді ряду Фур'є. Струна як механічна система. Власні частоти та власні коливання. Нормальні координати. Енергія струни та її розподіл між власними коливаннями. Коливання за наявності тертя та зовнішніх сил. Часова функція Гріна. Усталені коливання, спричинені гармонічною силою. Частотна функція Гріна. Метод обчислення і фізичний зміст частотної функції Гріна.

Тема 2. Рівняння теплопровідності та дифузії на відрізку. Задача Коші для рівнянь теплопровідності та дифузії на відрізку. Застосування методу Фур'є. Вплив джерел (поглиначів) тепла та частинок. Тепловий вибух провідників. Редукція крайових задач з неоднорідними крайовими умовами. Стаціонарні стани.

Змістовий модуль 6. Теорія Штурма–Ліувілля. Неодновимірні системи: коливання, дифузія та теплопровідність

Тема 1. Коливання неоднорідних систем. Задача Коші для неоднорідної струни (неоднорідного стержня). Відокремлення змінних, Крайова задача Штурма–Ліувілля (КЗШЛ). Властивості послідовності власних значень та відповідних власних функцій КЗШЛ. Екстремальний зміст найменшого та вищих власних значень КЗШЛ. Теорема про міні-макс. Наслідки. Нулі власних функцій КЗШЛ. Повнота системи власних функцій КЗШЛ. Прямі варіаційні методи.

Тема 2. Крайові задачі для неодновимірних систем. Коливання прямокутної мембрани. Відокремлення змінних. Власні частоти та власні функції. Виродження власних значень. Розв'язок задачі Коші. Задачі з циліндричною і сферичною симетріями для рівнянь коливань, теплопровідності та дифузії. Циліндричні функції і сферичні функції Бесселя. Поліноми і приєднані поліноми Лежанжра. Критичні розміри реакторів.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви тем	**Кількість годин**				
	Очна денна форма				
	Усього	**Лек.**	**Пр.**	**Лаб.**	**СР**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Змістовий модуль 1. Рівняння теплопровідності та дифузії					
Тема 1. Процес теплопровідності.	8	4	2		2
Тема 2. Задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності.	12	4	4		4
Тема 3. Стаціонарна температура та теплові коливання.	14	4	4		6
Тема 4. Процес дифузії.	10	2	2		6
Змістовий модуль 2. Додаткові розділи аналізу					
Тема1. Узагальнені функції.	10	4	2		4
Тема 2. Інтегральне перетворення Фур'є.	12	4	4		4
Змістовий модуль 3. Задачі для хвильового рівняння					
Тема 1. Малі коливання рідин і газів.	4	2	–		2
Тема 2. Задача Коші для однорідного хвильового рівняння.	10	4	2		4
Тема 3. Неоднорідне хвильове рівняння.	10	2	2		6
Змістовий модуль 4. Варіаційне числення					

Тема 1. Поняття функціонала.	18	6	4		8
Тема 2. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення.	18	4	4		10
Тема 3. Функціонали, що залежать від функцій декількох змінних.	12	4	2		6
Змістовий модуль 5. Коливання, теплопровідність та дифузія в однорідних системах					
Тема 1. Коливання натягненої струни.	24	6	4		14
Тема 2. Рівняння теплопровідності та дифузії на відрізку.	14	2	2		10
Змістовий модуль 6. Теорія Штурма–Ліувілля. Неодновимірні системи: коливання, дифузія татеплопровідність					
Тема 1. Коливання неоднорідних систем.	12	4	2		6
Тема 2. Крайові задачі для неодновимірних систем.	22	4	4		14
Усього годин	210	60	44		106

5. Теми семінарських занять

Семінарські заняття не передбачені навчальним планом

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Інтеграл Пуассона. Функція Гріна рівняння теплопровідності та її властивості.	2
2	Задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності в однорідному середовищі. Фізичний зміст функції Гріна.	2
3	Задача Коші для рівняння теплопровідності в криволінійних координатах.	2
4	Стаціонарні розв’язки неоднорідного рівняння теплопровідності. Рівняння Пуассона.	2
5	Вимушені теплові коливання. Рівняння Гельмгольца.	2
6	Рівняння дифузії. Фізичний зміст функції Гріна.	2
7	Дельта-функція Дірака та її властивості.	2
8	Перетворення Фур’є. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь за його допомогою. Рівність Парсеваля–Планшереля.	2
9	Фундаментальний розв’язок оператора Лапласа. Функція Гріна та задача Коші для рівняння дифузії.	2
10	Формули Пуассона в одному та двох вимірах	2
11	Неоднорідне хвильове рівняння. Загаювальний потенціал.	2
12	Поняття функціонала. Необхідна умова існування екстремуму функціонала найпростішого типу. Рівняння Ейлера–Лагранжа.	2

13	Випадки повної інтегровності рівняння Ейлера–Лагранжа. Задача про брахістохрону. Задача Плато.	2
14	Крайові умови: екстремалі, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикалі. Умови трансверсальності. Задача Больца.	2
15	Ізопериметричні задачі. Функціонали від функції та її вищих похідних: рівняння Ейлера–Пуассона і типи крайових умов.	2
16	Рівняння малих коливань і крайові умови для систем з розподіленими параметрами.	2
17	Розв'язання хвильового рівняння для відрізка методом відокремлення змінних. Стоячі хвилі, власні функції і власні частоти.	2
18	Коливання одновимірних систем при наявності тертя та зовнішніх сил. Функція Гріна для хвильового рівняння на відрізку.	2
19	Одновимірні крайові задачі теплопровідності та дифузії.	2
20	Властивості власних значень і власних функцій КЗШЛ.	2
21	Малі коливання неоднорідних систем у двох та трьох вимірах	2
22	Дифузія та теплопровідність у трьох вимірах.	2

7. Теми лабораторних занять

заняття не передбачені навчальним планом

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми/Питання для підготовки, завдання	Кількість годин
1	Рівняння теплопровідності в одному, двох і трьох вимірах.	2
2	Функції Гріна і задачі Кощі для одновимірного та двовимірного рівнянь теплопровідності.	4
3	Рівняння Пуассона та Лапласа. Гармонічні функції.	3
4	Вимушені теплові коливання. Рівняння Гельмгольца.	3
5	Стохастичні процеси. Рівняння Чепмена-Колмогорова та Фоккера-Планка.	4
6	Рівняння дифузії. Функція Гріна.	2
7	Диференціювання узагальнених функцій. Похідні дельта-функції, східчастої функції Хевісайда і знакової функції.	2
8	Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь. Фундаментальні розв'язки рівнянь Лапласа та Гельмгольца.	2
9	Перетворення Фур'є узагальнених функцій.	2
10	Основні співвідношення для перетворень Фур'є функцій багатьох змінних. Перетворення Фур'є сферично-симетричних функцій.	2
11	Знаходження полів швидкості і тиску через потенціал швидкості. Постановка задач Коші для хвильового рівняння в різних вимірах.	2
12	Формули Пуассона і Д'Аламбера.	3
13	Принцип Гюйгенса.	1
14	Неоднорідне хвильове рівняння. Загаювальний потенціал.	2
15	Функція Гріна для рівняння Гельмгольца.	2
16	Точкові джерела. Розбіжні та збіжні сферичні хвилі. Умова випромінювання Зоммерфельда.	2
17	Задача про поширення світла в неоднорідному середовищі.	2
18	Екстремальні принципи у фізиці.	2
19	Достатня умова екстремуму для функціонала найпростішого типу.	4
20	Модифікована задача про брахістохрону.	2
21	Умови трансверсальності та ортогональності.	2

22	Профілі балки при різних навантаженнях та умовах закріплення на кінцях.	4
23	Задачі на умовний екстремум. Невизначені множники Лагранжа. Задача про максимальну площу, обмежену гладкою кривою.	2
24	Функція Лагранжа, рівняння і крайові умови для малих поздовжніх коливань стержня.	2
25	Функція Лагранжа, рівняння і крайові умови для малих згинальних коливань стержня.	4
26	Закон збереження енергії в задачах про вільні коливання струн та стержнів. Єдиність розв'язку крайових задач для хвильового рівняння.	2
27	Власні частоти і власні функції однорідної струни (однорідного стержня) для різних типів крайових умов.	6
28	Струна як механічна система. Нормальні координати. Енергія струни та її розподіл між власними коливаннями	2
29	Вплив тертя на коливання струни.	2
30	Частотна функція Гріна для коливань обмеженої струни	2
31	Крайові задачі для одновимірних рівнянь теплопровідності та дифузії.	6
32	Тепловий вибух провідників.	2
33	Редукція крайових задач з неоднорідними крайовими умовами. Стаціонарні стани.	2
34	Екстремальний зміст власних значень крайової задачі Штурма-Ліувілля.	4
35	Прямі варіаційні методи.	2
36	Коливання, дифузія і теплопровідність в областях з прямокутною симетрією.	4
37	Крайові задачі для областей з циліндричною симетрією. Циліндричні функції.	4
38	Крайові задачі для областей зі сферичною симетрією. Сферичні функції Бесселя. Поліноми і приєднані поліноми Лежанжра.	4
39	Критичні розміри реакторів.	2
РАЗОМ		**106**

9. Методи навчання

При викладанні дисципліни використовуються словесні інтерактивні та наочні методи навчання. Головними словесними методами навчання є лекції і практичні заняття. Під час проведення лекцій використовуються наступні методи навчання: пояснювально-ілюстративний метод; метод проблемного викладу; частково-пошуковий або евристичний метод. Під час практичних занять використовуються наступні методи навчання: частково-пошуковий, або евристичний метод; дискусійний метод; дослідницький метод. Під час самостійної роботи використовується дослідницький метод.

10. Форми контролю та методи оцінювання

Поточний контроль здійснюється за результатами аудиторного опитування і аудиторної активності студентів, виконання ними домашніх завдань, що включають теми практичних занять і теми для самостійної роботи, модульних контрольних робіт. Підсумковий семестровий контроль (іспит) додатково враховує результати підсумкової екзаменаційної роботи.

Критерії оцінювання виконання практичних занять і самостійної роботи

Теми практичних занять і теми для самостійної роботи оцінюються через виконання

домашніх завдань. Кожне завдання включає кілька завдань та/чи запитань, відповіді на які кожний студент подає у письмовій формі. Відповіді перевіряються викладачем та обговорюються зі студентом і його однокурсниками. Оцінка за виконання визначається повнотою, правильністю і якістю наданих студентом відповідей. Вона включається в оцінку поточного контролю за алгоритмом, наведеним у пункті **12. Розподіл балів, отримуваних студентами.**

Критерії оцінювання контрольних робіт за модулями

Контрольні роботи за модулями проводиться в письмовій формі. Кожна робота складається з 10 теоретичних питань, кожне з яких може включати кілька пов'язаних підпитань, на які треба відповісти у стисливій формі. Відповідь на кожне питання оцінюється за десятибальною шкалою наступним чином:

- повна правильна відповідь – 10 балів;
- повна відповідь, що містить незначну неточність – 9 балів;
- повна відповідь, що містить дві неточності – 8 балів;
- повна відповідь, що містить помилку, або неповна відповідь, де відсутнє певне пояснення – 7 балів;
- повна відповідь з двома помилками, або неповна відповідь з помилкою – 6 балів;
- за кожну наступну помилку чи відсутнє пояснення знімається 1 бал;
- повністю неправильна або відсутня відповідь – 0 балів.

Критерії оцінювання підсумкового контролю

Підсумковий семестровий контроль (іспит) проводиться в письмовій формі у вигляді письмової контрольної роботи, що оцінюється за 100-бальною шкалою. Вона складається з таких чотирьох розділів, що оцінюються наступним чином:

A. Математичні означення та базові співвідношення. Тестові запитання (загальною кількістю до 10) з наведеними відповідями у вигляді певних формул, одна з яких правильна. Оцінювання відповіді на кожне запитання:

- правильна відповідь – 2 бали, неправильна відповідь – 0 балів.

B. Аналіз правильності тверджень Тестові запитання (загальною кількістю до 12) з наведеними відповідями у вигляді певних тверджень, одне з яких правильне. Оцінювання відповіді на кожне запитання:

- правильна відповідь – 3 бали, неправильна відповідь – 0 балів.

C. Формулювання законів, означень, понять. Короткі теоретичні питання (загальною кількістю до 8), на які треба дати власні відповіді. Оцінювання відповіді на кожне питання:

- повна розгорнута відповідь – 4 бали;
- повна розгорнута відповідь, що місить неточності чи суперечності, або повна, але не розгорнута відповідь – 3 бали;
- повна розгорнута відповідь, що місить помилку, або повна, але не розгорнута відповідь, що місить неточності чи суперечності, або неповна відповідь – 2 бали
- повна розгорнута відповідь, що місить дві помилки, або повна, але не розгорнута відповідь, що місить помилку, або неповна відповідь, що містить помилку, неточності чи суперечності – 1 бал
- повна розгорнута відповідь, що місить три і більше помилок, або повна, але не розгорнута відповідь, що місить дві і більше помилок, або неповна відповідь, що містить дві і більше помилок, або відсутність відповіді – 0 балів.

D. Практичне завдання. Задача середнього рівня складності або теоретичне питання, що передбачає поглиблений модельний аналіз. Оцінювання відповіді на завдання:

- повний розв'язок з усіма поясненнями – 20 балів;
- повний розв'язок з усіма поясненнями, що містить незначну неточність – 19 балів;

- повний розв'язок з усіма поясненнями, що містить дрібну обчислювальну помилку, або повний розв'язок, де окремі пояснення відсутні чи містять неточності – 18 балів;
- повний розв'язок з усіма поясненнями, що містить помилку, або повний розв'язок, де відсутні пояснення, або неповний розв'язок – 16 балів;
- повний розв'язок з двома помилками, або неповний розв'язок з помилкою – 14 балів;
- за кожну наступну помилку чи суперечність знімається 1 бал;.
- при наявності правильного пояснення ходу розв'язання, правильних вихідних співвідношень та часткових обчислень – 12 балів;
- за відсутність одного із щойно зазначених пунктів, або за кожну наступну помилку чи суперечність знімається 1 бал;
- відповідь, що є повністю помилковою, або за відсутність відповіді – 0 балів.

Кількість балів, що студент отримує за письмову контрольну роботу, є сумою балів, що отриманих ним за кожне завдання з екзаменаційного білету.

Підсумкова семестрова оцінка виставляється за шкалами, наведеними в пункті **12. Розподіл балів, отримуваних студентами.**

11. Питання для підготовки до періодичного й підсумкового контролів

1. Запишіть рівняння теплопровідності в загальному випадку та поясніть зміст величин, що входять до нього. За яких умов це рівняння стає лінійним?
2. Як спрощується рівняння теплопровідності у випадку однорідного простору, у якому відсутні джерела та поглиначі тепла?
3. Сформулюйте задачу Коші для лінійного рівняння теплопровідності. З якого принципу випливає єдиність розв'язку цієї задачі? Сформулюйте відповідну математичну теорему єдиності.
4. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності в необмеженому просторі у вигляді квадратур.
5. Запишіть функцію Гріна $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$ для рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному просторі та перевірте, що вона справді задовольняє це рівняння.
6. З'ясуйте, до якої границі прямують інтеграли від добутку $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$ з довільними гладкими фінітними функціями при $t \to 0$.
7. Визначте фізичний зміст функції Гріна рівняння теплопровідності.
8. Для незалежної від часу густини потужності джерел запишіть вираз для стаціонарної температури у вигляді ньютонівського потенціалу. З'ясуйте, за яких умов цей вираз дає єдиний спадний розв'язок рівняння Пуассона.
9. З'ясуйте, чи може стаціонарна температура набувати найменшого або найбільшого значень усередині області, у якій немає джерел тепла?
10. Як відновити гладку фінітну функцію після дії на неї оператором Лапласа?
11. Запишіть вираз для амплітуди вимушених коливань температури, що встановлюються під дією джерел, які змінюються з часом за гармонічним законом. Яке неоднорідне диференціальне рівняння вона задовольняє?
12. Чому дорівнює загальний розв'язок рівняння Гельмгольца для амплітуди вимушених коливань температури, що встановлюються під дією гармонічних джерел, густина яких повільно зростає на нескінченності?
13. Який фізичний зміст має функція Гріна рівняння Гельмгольца, якому підкоряються комплексні амплітуди коливань температури?
14. Дайте означення вектора густини потоку частинок у середовищі. На які частини можна розкласти цей вектор?
15. Скориставшись цим розкладом та законом збереження кількості частинок, виведіть

рівняння дифузії при відсутності джерел домішкових частинок.

16. Сформулюйте задачу Коші для рівняння дифузії та запишіть її загальний розв'язок у випадку однорідного нерухомого простору.
17. Дайте означення: а) густини ймовірності знайти броунівську частинку в околі даної точки простору; б) густини ймовірності переходу з однієї точки простору в інші його точки; в) марковського процесу. Для частинки, що здійснює броунівський рух, виведіть рівняння Чепмена–Колмогорова.
18. Запишіть рівняння Ейнштейна–Смолуховського для густини ймовірності знайти броунівську частинку в околі даної точки простору та отримайте з нього рівняння дифузії.
19. Дайте означення множини основних функцій. Покажіть, що основні функції утворюють лінійний простір.
20. Дайте означення неперервного лінійного функціонала, заданого на множині основних функцій. Покажіть, що такі функціонали утворюють лінійний простір.
21. Дайте означення регулярного функціонала. У чому полягає різниця між регулярними та сингулярними функціоналами? Дайте приклад останнього.
22. Покажіть, що функціонал, який кожній основній функції ставить у відповідність її значення в певній точці, є неперервним, але не є регулярним.
23. Про що йдеться, коли кажуть, що послідовність регулярних функціоналів збігається до сингулярного функціонала? Наведіть приклад послідовності регулярних функціоналів, яка збігається до δ-функції Дірака.
24. За якою формулою обчислюється функціонал, якому відповідає складена узагальнена функція $\delta(h(x))$, де $h(x)$ – диференційовна на дійсній осі функція? Укажіть умови, за яких ця формула справджується.
25. Дайте означення звичайних та частинних похідних узагальнених функцій. Чому дорівнюють узагальнені похідні від дельта-функції однієї змінної і функції Хевісайда?
26. Дайте означення узагальненого розв'язку лінійного диференціального рівняння. Чому дорівнюють узагальнені розв'язки рівнянь Пуассона й Гельмгольца з дельта-функціями у правих частинах?
27. Дайте означення перетворення Фур'є узагальнених функцій. Чому дорівнюють Фур'є-образи дельта-функції однієї змінної та її похідних?
28. Поясніть фізичний зміст частинних розв'язків рівняння теплопровідності у вигляді добутку двох функції, одна з яких залежить лише від часу, а інша – лише від координат. Який вигляд має функція, що описує часову залежність? Яке рівняння задовольняє координатно-залежний множник?
29. Які частинні розв'язки рівняння Гельмгольца називаються плоскими хвилями? Знайдіть розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, якщо початкова температура має вигляд: а) плоскої хвилі; б) їх суперпозиції.
30. Дайте означення перетворення Фур'є інтегровної функції. Доведіть обмеженість та неперервність відповідного Фур'є-образу.
31. Сформулюйте теорему Рімана–Лебега. Перевірте її істинність на прикладі східчастих інтегровних функцій.
32. Дайте означення абсолютно неперервної функції. Вважаючи, що абсолютно неперервна функція інтегровна й має неперервну похідну, виразіть Фур'є-образ її похідної через Фур'є-образ самої функції.
33. Виведіть формулу обернення для перетворення Фур'є.
34. Дайте означення згортки інтегровних функцій. Доведіть інтегровність згортки та комутативність операції згортки.
35. Знайдіть Фур'є-образ згортки інтегровних функцій та запишіть відповідну формулу обернення.
36. Виведіть рівність Парсеваля–Планшереля.
37. Запишіть систему рівнянь, що описують поширення акустичних коливань в ідеальній

рідині. Які члени цієї системи роблять її нелінійною?

38. Які течії ідеальної рідини можна описувати за допомогою потенціалу швидкості? Як за його допомогою знайти відхилення швидкості, масової густини й тиску, що виникають при малих коливаннях рідини (газу)?
39. Поставте задачу Коші для однорідного хвильового рівняння Д'Аламбера та сформулюйте для неї теорему єдиності.
40. У класі нескінченно диференційовних функцій, що швидко спадають разом зі своїми похідними, запишіть розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння через перетворення Фур'є початкових функцій.
41. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння у тривимірному просторі за допомогою сферичних середніх (формула Пуассона).
42. Поясніть, у чому полягає принцип Гюйгенса для хвильового рівняння у тривимірному просторі.
43. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння в необмеженому двовимірному просторі.
44. Поясніть, чому принцип Гюйгенса не справджується для хвильового рівняння у двовимірному просторі.
45. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного одновимірного хвильового рівняння на дійсній осі.
46. Чи справджується принцип Гюйгенса для хвильового рівняння на дійсній осі? Поясніть.
47. На які частини можна розбити загальний розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння у тривимірному просторі?
48. Подайте розв'язок неоднорідного хвильового рівняння, який усталюється з часом, у вигляді загаювального потенціалу.
49. Запишіть розв'язок неоднорідного хвильового рівняння, який усталюється з часом, для випадку, коли потенціал об'ємної сили змінюється за гармонічним законом із частотою ω. Який вигляд має функція, що описує координатно-залежний множник?
50. Яке рівняння задовольняє амплітуда усталених коливань хвильового поля під дією гармонічного джерела з частотою ω? Запишіть його розв'язок.
51. Які розв'язки рівняння Гельмгольца називаються збіжними та розбіжними хвилями? Яка умова на нескінченності дозволяє виокремити розбіжні хвилі?
52. Запишіть формулу для перетворення Фур'є функцій двох змінних та відповідну формулу обернення. Те саме для функцій трьох змінних.
53. Знайдіть Фур'є-образ згортки інтегровних функцій двох змінних та запишіть відповідні формули обернення. Те саме для функцій трьох змінних.
54. Виведіть рівності Парсеваля–Планшереля для функцій двох і трьох змінних.
55. Дайте означення функціонала, заданого на множині функцій, гладких на відрізку $[x_1, x_2]$. Наведіть приклад такого функціонала.
56. У чому полягає основна задача варіаційного числення? Сформулюйте лему, яка постійно використовується при відшуканні необхідних умов існування розв'язку цієї задачі.
57. Виведіть рівняння, яке повинна задовольняти крива $y_0(x)$ класу $C^2([x_1, x_2])$, яка реалізує екстремум функціонала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y')$ з ядром F, двічі диференційовним за своїми аргументами.
58. Які криві можуть бути екстремалями функціонала найпростішого типу, якщо його ядро залежить лише від y'? Відповідь обґрунтуйте.
59. Знайдіть загальний інтеграл рівняння Ейлера–Лагранжа для випадку, коли ядро функціонала найпростішого типу не залежить від y.
60. Знайдіть перший інтеграл рівняння Ейлера-Лагранжа для випадку, коли ядро функціонала найпростішого типу не залежить від x.

61. Знайдіть крайові умови, які задовольняє екстремаль класу $C^1([x_1, x_2])$ функціонала найпростішого типу, якщо її лівий кінець виходить із точки (x_1, y_1), а правий вільно ковзає по прямій $x = x_2$.
62. Які крайові умови задовольняє екстремальна гладка крива функціонала $\int\limits_{\Gamma} dxF(x, y, y')$, якщо її лівий кінець виходить із точки (x_1, y_1), а правий вільно ковзає вздовж кривої $y = \varphi(x)$? До якої умови зводиться умова на правому кінці, якщо ядро функціонала має вигляд $f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$?
63. Виведіть рівняння, яке повинна задовольняти крива $y_0(x)$ класу $C^4([x_1, x_2])$, яка реалізує екстремум функціонала $J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} dxF(x, y, y', y'')$ у класі кривих $C^2([x_1, x_2])$ із кінцями, закріпленими під фіксованими кутами. Функція F вважається двічі диференційовною за своїми аргументами.
64. Виведіть крайові умови для рівняння Ейлера–Пуассона в задачах для кривих, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикальних прямих під фіксованими кутами.
65. Сформулюйте найпростіший варіант ізопериметричної задачі. Посилаючись на теорему Ейлера, опишіть алгоритм її розв'язку.
66. Виведіть необхідну умову існування екстремуму функціонала, який залежить від гладких просторових кривих, що з'єднують дві фіксовані точки. Модуль 5
67. Знайдіть необхідну умову існування екстремуму функціонала
$$J[z] = \iint\limits_{D} dxdyF\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)$$
у класі функцій, які визначені й диференційовні в області D площини XOY та набувають заданих значень на її кусково-гладкій межі Γ.
68. Знайдіть крайову умову на межі Γ області D площини XOY, яку має задовольняти функція $z(x, y)$, що реалізує екстремум функціонала
$$J[z] = \iint\limits_{D} dxdyF\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) + \oint\limits_{\Gamma} dl\, f\big(z(x, y)\big),$$
де $f(z)$ – гладка функція.
69. Знайдіть функцію Лагранжа натягненої струни із закріпленими кінцями.
70. Знайдіть функцію Лагранжа однорідного стержня із закріпленими кінцями.
71. Знайдіть рівняння коливань натягненої струни із закріпленими кінцями.
72. Знайдіть крайові умови на пружно закріплених кінцях стержня.
73. Поставте задачу Коші для вільних коливань стержня з пружно закріпленими кінцями.
74. Скориставшись методом продовження, знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань напівобмеженої однорідної струни із закріпленим кінцем.
75. Скориставшись методом продовження, опишіть алгоритм розв'язку задачі Коші для вільних коливань однорідної струни із закріпленими кінцями.
76. Скориставшись результатами теорії рядів Фур'є, знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань однорідної струни із закріпленими кінцями.
77. Виразіть енергію вільних коливань струни через початкові функції та знайдіть частку енергії, яка припадає на кожне власне коливання.
78. Знайдіть частоти згасаючих власних коливань струни із закріпленими кінцями при наявності тертя.
79. Знайдіть частинний розв'язок крайової задачі про вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої сили при нульових початкових умовах.
80. Запишіть часову функцію Гріна для задачі про вимушені коливання обмеженої струни

під дією зовнішньої сили у вигляді розкладу за власними функціями. Який її фізичний зміст?

81. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань обмеженої струни під дією гармонічної сили. Запишіть частотну функцію Гріна для цієї задачі у вигляді розкладу за власними функціями. Який зміст має ця функція?
82. Знайдіть частотну функцію Гріна для задачі про вимушені коливання струни під дією гармонічної сили як певний розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля.
83. Доведіть додатність власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля для струни.
84. Доведіть, що власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.
85. З'ясуйте екстремальний зміст найменшого власного значення крайової задачі Штурма–Ліувілля.
86. Доведіть, що власна функція, яка відповідає найменшому власному значенню крайової задачі Штурма–Ліувілля, не має вузлів.
87. З'ясуйте екстремальний зміст другого та вищих власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля. Яку властивість щодо наявності вузлів мають відповідні власні функції?
88. Сформулюйте теорему про mini–max. Які наслідки випливають із цієї теореми щодо руху власних частот при змінах жорсткості та маси коливальної системи? Як зростають послідовні власні частоти ω_n неоднорідної струни із зростанням номера n?
89. Виведіть нерівність Бесселя для ортогональних розкладів. Поясніть, у яких випадках ця нерівність перетворюється на рівність Парсеваля.
90. Доведіть повноту системи власних функцій крайової задачі Штурма–Ліувілля.
91. Знайдіть власні частоти та відповідні власні функції для прямокутної мембрани із закріпленими краями.
92. Поставте задачу Коші про коливання прямокутної мембрани із закріпленими краями й запишіть її загальний розв'язок.
93. Доведіть додатність власних значень для коливань прямокутної мембрани із закріпленими краями.
94. Покажіть, як тривимірні задачі для сферично-симетричних розв'язків зводяться до одновимірних.
95. Поставте задачу Коші про остигання рівномірно нагрітої однорідної кулі й запишіть її розв'язок.
96. Знайдіть критичний радіус сферичного реактора.

12. Розподіл балів, отримуваних студентами

У ході поточного контролю студент може отримати за кожну тему до 20 балів, які нараховуються таким чином:

№ з/п	Вид роботи	Форма контролю	Максимальне число балів
1	Відвідування занять	Конспект занять	2
2	Аудиторна активність студента	Спостереження за аудиторною роботою студента	2
3	Виконання класних і домашніх завдань, самостійної роботи	Письмові розв'язки, письмові та усні відповіді	16
	Сума		20

Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за кожну контрольну роботу за змістовним модулем, складає 100 балів.

Підсумковий бал за кожний змістовний модуль обчислюється за такою схемою: знаходиться відсоток, який загальна сума балів, набраних студентом у ході поточного контролю, складає від максимально можливої за всі теми у цьому модулі; обчислюється відсоток, який загальна сума балів, набраних студентом у ході виконання контрольної роботи за змістовним модулем, складає від максимально можливої; знаходиться середнє значення для цих двох відсотків; від цього середнього береться певний ваговий відсоток (який чисельно дорівнює максимальній сумі балів за цей змістовий модуль і вказано нижче).

Підсумкова семестрова оцінка визначається за результатами поточного, періодичного та (при наявності) підсумкового контролів за такими алгоритмами:

4 семестр

Поточний та періодичний контроль			Підсумковий бал*
Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Змістовий модуль 3	
40	30	30	100

* Обчислюється як сума балів поточного та періодичного контролів.

Дані для обчислення балів поточного і періодичного контролю:

Поточний та періодичний контроль									Підсумковий бал*
Змістовий модуль 1				Змістовий модуль 2		Змістовий модуль 3			
Т1	Т2	Т3	Т4	Т1	Т2	Т1	Т2	Т3	100
20	20	20	20	20	20	20	20	20	
Контрольна робота за модулем 1 – 100				Контрольна робота за модулем 2 – 100		Контрольна робота за модулем 3 – 100			

5 семестр

Поточний та періодичний контроль			Підсумковий контроль (іспит)	Підсумковий бал**
Змістовий модуль 4	Змістовий модуль 5	Змістовий модуль 6		
35	35	30	100	100

** Обчислюється як сума балів поточного та періодичного контролів, помножена на коефіцієнт 0,7, та балу за підсумкову контрольну роботу, помноженого на 0,3.

Дані для обчислення балів поточного і періодичного контролю:

Поточний та періодичний контроль							Підсумковий контроль (іспит)	Підсумковий бал**
Змістовий модуль 4			Змістовий модуль 5		Змістовий модуль 6			
Т1	Т2	Т3	Т1	Т2	Т1	Т2	100	100
20	20	20	20	20	20	20		
Контрольна робота за модулем 4 – 100			Контрольна робота за модулем 5 – 100		Контрольна робота за модулем 6 – 100			

Шкала оцінювання: національна та ECTS

<table>
<tr><th rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</th><th rowspan="2">За шкалою ECTS</th><th colspan="2">За національною шкалою</th></tr>
<tr><th>Для екзамену</th><th>Для заліку</th></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>A</td><td>Відмінно</td><td rowspan="5">Зараховано</td></tr>
<tr><td>85 – 89</td><td>B</td><td rowspan="2">Добре</td></tr>
<tr><td>75 – 84</td><td>C</td></tr>
<tr><td>70 – 74</td><td>D</td><td rowspan="2">Задовільно</td></tr>
<tr><td>60 – 69</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35 – 59</td><td>FX</td><td rowspan="2">Незадовільно</td><td rowspan="2">Не зараховано</td></tr>
<tr><td>0 – 34</td><td>F</td></tr>
</table>

13. Навчально-методичне забезпечення

Навчально-методичне забезпечення включає такі матеріали: робоча програма навчальної дисципліни; силабус; посібники, конспекти і нотатки лекцій; завдання і методичні вказівки до практичних занять; завдання і контрольні питання для поточного, періодичного і підсумкового контролів.

14. Рекомендована література

Основна

1. Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Introduction to Mathematical Physics. – Одеса: Астропринт, 2003. – 320 с.
2. Адамян В. М., Сушко М. Я. Варіаційне числення. – Одеса: Астропринт, 2005. – 128 с.
3. Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Варіаційне числення та крайові задачі. – Одеса: Астропринт, 2014. – 380 с.
4. Адамян В. М., Сушко М. Я. Методи математичної фізики. Методичні вказівки з курсу. – Одеса: Астропринт, 2007. – 39 с.
5. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ.: Либідь, 2001. – 336 с.
6. Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Методи математичної фізики. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2011. – 404 с.
7. Свідзинський А. Математичні методи теоретичної фізики. – Луцьк: Вежа, 2001. – 563 с.
8. Courant, R., Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics. Vol 1. – New York: Wiley, 1989. – 560 p.
9. Courant, R. D. Partial Differential Equations. In: Courant, R., Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics. Vol 2. – New York: Wiley, 1989. – 811 p.
10. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. Equations of Mathematical Physics. – New York: Dover, 2011. – 765 p.

Додаткова

1. Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С. 1001 задача з математичної фізики. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2006. – 328 с.
2. Вакал Є. С., Ловейкін А. В. Методи математичної фізики в прикладах і задачах : навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету /. – К.: Видавець Кравченко Я.О., 2020. – 188 с.

3. Карбованець М.І., Лазур В.Ю. Методи математичної фізики: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. – 74 с.
4. Прокопенко Ю. В., Казміренко В. А., Голубєва І. П. Методи математичної фізики: Навч. посіб. – К.: Політехніка, 2018. – 144 с.
5. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики. Частина 1. Вступ до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. К:КПІ ім.Ігоря Сікорського, 2022, 25с.

13. Електронні інформаційні ресурси

1. http://phys.onu.edu.ua
2. http://theorphys.onu.edu.ua/uk/textbooks
3. http://en.wikipedia.org/
4. http://arxiv.org/abs/1306.1675
5. http://www.researchgate.net/profile/Miroslav_Sushko1/publications