

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
Кафедра Диференціальних рівнянь геометрії та топології

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Проректор з науково-педагогічної роботи
Олександр ЗАПОРОЖЧЕНКО
2022 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ОК 8 «ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ»

Рівень вищої освіти	перший (бакалаврський)
Галузь знань	10 Природничі науки
Спеціальність	104 Фізика та астрономія
Освітньо-професійна програма	Фізика та астрономія

ОНУ
2022

Робоча програма навчальної дисципліни «ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ». – Одеса: ОНУ, 2022, 13с.

Розробник:

Потапенко Ігор Володимирович, старший викладач кафедри диференціальних рівнянь геометрії та топології

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри диференціальних рівнянь геометрії та топології

Протокол № 1 від “ 31” серпня 2022 р.

Завідувач кафедри ВВ В’ячеслав ЄВТУХОВ

Погоджено з гарантом ОПП «Фізика та астрономія» Юрієм Юрієм НІЦУКОМ

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 1 від “5” вересня 2022 р.

Голова НМК НМ Наталя МАСЛЄВА

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри

алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Протокол № 1 від “30” 08 2023 р.

Завідувач кафедри ВВ В’ячеслав ЄВТУХОВ

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри

алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Протокол № 1 від “30” 08 2024 р.

Завідувач кафедри ВВ В’ячеслав ЄВТУХОВ

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни
		<i>Очна (денна, вечірня) форма навчання</i>
Загальна кількість: кредитів – 3 годин – 90 змістових модулів – 3	Галузь знань 10 Природничі науки Спеціальність 104 Фізика та астрономія Спеціалізації: <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> (назва) Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)	Обов'язкова
		<i>Рік підготовки:</i>
		2
		<i>Семестр</i>
		3
		<i>Лекції</i>
		18 год.
		<i>Практичні, семінарські</i>
		18 год.
		<i>Лабораторні</i>
		год.
		<i>Самостійна робота</i>
		54 год.
<i>Форма підсумкового контролю:</i> залік		

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни: формування у майбутнього фізика, астронома поняття про векторні поля, диференціальні операції над векторними полями, інтегральні теореми для векторних полів, тензори та алгебраїчні операції над ними, перетворення систем координат, диференціальні операції над тензорами.

Завданнями дисципліни «**Основи векторного та тензорного аналізу**» є: формування базових математичних знань для розв'язування задач у майбутній професійній діяльності; формування вмінь аналітичного мислення.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

Загальні компетентності:

- K01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- K02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях
- K04. Здатність бути критичним і самокритичним.
- K05. Здатність приймати обґрунтовані рішення.
- K08. Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт.

Спеціальні (фахові) компетенції:

- K17. Здатність використовувати на практиці базові знання з математики як математичного апарату фізики і астрономії при вивченні та дослідженні фізичних та астрономічних явищ і процесів.
- K21. Здатність моделювати фізичні системи та астрономічні явища і процеси.
- K23. Здатність виконувати теоретичні та експериментальні дослідження автономно та у складі наукової групи.
- K24. Здатність працювати з джерелами навчальної та наукової інформації.
- K25. Здатність самостійно навчатися і опановувати нові знання з фізики, астрономії та суміжних галузей.

-K26. Розвинуте відчуття особистої відповідальності за достовірність результатів досліджень та дотримання принципів академічної доброчесності разом з професійною гнучкістю.

-K29. Здатність здобувати додаткові компетентності через вибіркові складові освітньої програми, самоосвіту, неформальну та інформальну освіту.

Очікувані результати навчання. Згідно з освітньо-науковою програмою «Фізика та астрономія» спеціальності 104 – «Фізика та астрономія» бакалаври можуть досягти наступних результатів навчання:

– Вміти застосовувати базові математичні знання, які використовуються у фізиці та астрономії: з аналітичної геометрії, лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії груп, методів математичної фізики, теорії функцій комплексної змінної, математичного моделювання. (ПР04).

– Мати базові навички самостійного навчання: вміти відшукувати потрібну інформацію в друкованих та електронних джерелах, аналізувати, систематизувати, розуміти, тлумачити та використовувати її для вирішення наукових і прикладних завдань (ПР08).

3. Зміст навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Поняття тензора. Основи векторного аналізу.

Тема1. Правило підсумовування Ейнштейна. Німі та вільні індекси. Символи Кронекера. Взаємні базиси векторів. Приклади тензорів. Метричні коефіцієнти базису.

Тема2. Коваріантні та контраваріантні координати геометричного вектора. Криволінійні координати у просторі. Основні поняття векторного аналізу. Дивергенція, ротор, градієнт векторного поля. Оператор набла. Основна теорема векторного аналізу.

Тема3. Інваріант. Вектори, як тензори першої валентності. Два види векторів. Тензори другої валентності. Тензорний закон перетворення координат. Псевдотензори.

Змістовий модуль 2. Тензорна алгебра. Символи Крістоффеля.

Тема 4. Операції додавання, множення, згортання, симетрування та альтернування. піднімання та опускання індексу для тензорів. Симетричні та кососиметричні тензори. Теорема про ознаку тензора.

Тема 5. Поняття ріманового простору. Метричний тензор. Символи Крістоффеля 1 та 2 роду. Закон їх перетворення при перетворенні координат.

Тема 6. Дивергенція, ротор, градієнт, як диференціальні оператори в криволінійній системі координат.

Змістовий модуль 3. Коваріантна похідна тензора. Тотожність Річчі.

Теорія відображення гладких многовидів

Тема 7. Коваріантна похідна вектора та ковектора. Коваріантна похідна довільного тензора. Властивості коваріантного диференціювання. Коваріантно сталі тензори. Похідна Лі.

Тема 8. Тотожність Річчі для вектора та ковектора. Тензор Рімана та його властивості. Тотожність Річчі для довільного тензора.

Тема 9. Поняття гладкого многовиду. Коваріантне диференціювання вздовж кривої, геодезичні. Поняття паралельного перенесення векторів та тензорів вздовж кривої.

Поняття відображення поверхонь та гладких многовидів. Лема Сарда. Степінь відображення. Ізометричні та конформні відображення поверхонь, афінні та геодезичні відображення поверхонь.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Очна (денна, вечірня) форма					
	усього	у тому числі				
л		п	лаб.	інд.	с. р.	
1	2	3	4	5	6	7
Змістовий модуль 1.						

Поняття тензора. Тензорна алгебра. Основи векторного аналізу.						
Тема 1. Поняття тензора	10	2	2			6
Тема 2. Основні поняття векторного аналізу.	10	2	2			6
Тема 3. Тензорний закон перетворення координат. Псевдотензори	10	2	2			6
Разом за змістовим модулем 1	30	6	6			18
Змістовий модуль 2. Тензорна алгебра. Символи Крістоффеля.						
Тема 4. Основи тензорної алгебри.	10	2	2			6
Тема 5. Поняття ріманового простору. Метричний тензор	10	2	2			6
Тема 6. Дивергенція, ротор, градієнт, як диференціальні оператори в криволінійній системі координат.	10	2	2			6
Разом за змістовим модулем 2	30	6	6			18
Змістовий модуль 3. Коваріантна похідна тензора. Тотожність Річчі. Теорія відображення гладких многовидів						
Тема 7. Коваріантна похідна довільного тензора. Властивості коваріантного диференціювання. Похідна Лі	10	2	2			6
Тема 8. Тензор Рімана та його властивості. Тотожність Річчі для довільного тензора.	10	2	2			6
Тема 9. Поняття відображення поверхонь та гладких многовидів. Степінь відображення.	10	2	2			6
Разом за змістовим модулем 3	30	6	6			18
Усього годин	90	18	18			54

5. Теми семінарських занять

Семінарські заняття не передбачені.

6. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Поняття тензора	2
2.	Основні поняття векторного аналізу.	2
3.	Тензорний закон перетворення координат. Псевдотензори	2
4.	Основи тензорної алгебри.	2
5.	Поняття ріманового простору. Метричний тензор	2
6	Дивергенція, ротор, градієнт, як диференціальні оператори в криволінійній системі координат.	2

7	Коваріантна похідна довільного тензора. Властивості коваріантного диференціювання. Похідна Лі.	2
8	Тензор Рімана та його властивості. Тотожність Річчі для довільного тензора.	2
9	Поняття відображення поверхонь та гладких многовидів. Степінь відображення	2
	Разом	18

7. Теми лабораторних занять

Лабораторні заняття не передбачені.

8. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Правило підсумовування Ейнштейна. Німі та вільні індекси. Символи Кронекера. Взаємні базиси векторів. Приклади тензорів. Метричні коефіцієнти базису.	6
2	Коваріантні та контраваріантні координати геометричного вектора. Криволінійні координати у просторі. Основні поняття векторного аналізу. Дивергенція, ротор, градієнт векторного поля. Оператор набла. Основна теорема векторного аналізу.	6
3	Інваріант. Вектори, як тензори першої валентності. Два види векторів. Тензори другої валентності. Тензорний закон перетворення координат. Псевдотензори.	6
4	Операції додавання, множення, згортання, симетрування та альтернування. піднімання та опускання індексу для тензорів. Симетричні та кососиметричні тензори. Теорема про ознаку тензора.	6
5	Поняття ріманового простору. Метричний тензор. Символи Крістоффеля 1 та 2 роду. Закон їх перетворення при перетворенні координат.	6
6	Дивергенція, ротор, градієнт, як диференціальні оператори в криволінійній системі координат.	6
7	Коваріантна похідна вектора та ковектора. Коваріантна похідна довільного тензора. Властивості коваріантного диференціювання. Коваріантно сталі тензори. Похідна Лі.	6
8	Тотожність Річчі для вектора та ковектора. Тензор Рімана та його властивості. Тотожність Річчі для довільного тензора.	6
9	Поняття гладкого многовиду. Коваріантне диференціювання вздовж кривої, геодезичні. Поняття паралельного перенесення векторів та тензорів вздовж кривої.	6

	Поняття відображення поверхонь та гладких многовидів. Лема Сарда. Степінь відображення. Ізометричні та конформні відображення поверхонь, афінні та геодезичні відображення поверхонь.	
	Разом	54

9. Методи навчання

Під час вивчення навчальної дисципліни використовують такі форми роботи – лекція, практичні заняття, самостійна робота. Головним словесним методом навчання є лекція. Під час проведення лекцій використовуються наступні методи навчання: пояснювально-ілюстративний метод, або інформаційно-рецептивний; репродуктивний метод (репродукція - відтворення); метод проблемного викладу; частково-пошуковий, або евристичний метод.

Під час практичних занять використовуються наступні методи навчання - частково-пошуковий, або евристичний метод; дискусійний метод. Під час самостійної роботи використовується дослідницький метод.

10. Форми контролю та методи оцінювання

Поточний контроль здійснюється методами усного контролю - індивідуальне усне поточне опитування за результатами виконання контрольних робіт студентів, тестових завдань. Методи письмового контролю - поточні практичні роботи..

При оцінюванні в балах рівня засвоєння матеріалу використовуються загальні критерії оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти:

Оцінка за національною шкалою та відсоток від максимальної кількості балів	Теоретична підготовка	Практична підготовка
	Здобувач освіти	
зараховано (90-100% від максимальної кількості балів)	у повному обсязі володіє навчальним матеріалом, вільно, самостійно та аргументовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей; глибоко та всебічно розкриває зміст теоретичних питань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; робить самостійні висновки, виявляє причинно-наслідкові зв'язки; самостійно знаходить додаткову інформацію та використовує її для реалізації поставлених перед ним завдань. Здобувач здатен виділяти суттєві ознаки вивченого за допомогою операцій синтезу, аналізу, виявляти причинно-наслідкові зв'язки, формувати висновки і узагальнення, вільно оперувати фактами та відомостями.	глибоко та всебічно розкриває сутність практичних/ розрахункових завдань, використовуючи при цьому нормативну, обов'язкову та додаткову літературу; може аргументовано обрати раціональний спосіб виконання завдання й оцінити результати власної практичної діяльності; виконує творчі завдання та ініціює нові шляхи їх виконання; вільно використовує набуті теоретичні знання при аналізі практичного матеріалу; проявляє творчий підхід до виконання індивідуальних та колективних завдань при самостійній роботі.
зараховано (75-89% від максимальної кількості балів)	достатньо повно володіє навчальним матеріалом, обґрунтовано його викладає під час усних виступів та письмових відповідей, використовуючи при цьому нормативну та обов'язкову літературу; при представленні деяких питань не вистачає достатньої глибини та аргументації, застосовує знання для розв'язання стандартних ситуацій; самостійно аналізує, узагальнює і систематизує навчальну інформацію, але допускаються при цьому окремі несуттєві неточності та незначні помилки.	правильно вирішив більшість розрахункових /тестових завдань за зразком; має стійкі навички виконання завдання
зараховано (60-74% від	володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні або відтворює	може використовувати знання в стандартних

максимально ї кількості балів)	певну частину навчального матеріалу з елементами логічних зв'язків, знає основні поняття навчального матеріалу; має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.	ситуаціях, має елементарні, нестійкі навички виконання завдання. Правильно вирішив половину розрахункових/тестових завдань. Здобувач має ускладнення під час виділення суттєвих ознак вивченого; під час виявлення причинно-наслідкових зв'язків і формулювання висновків.
не зараховано (35-59% від максимально ї кількості балів)	володіє навчальним матеріалом поверхово й фрагментарно (без аргументації та обґрунтування); безсистемно виокремлює випадкові ознаки вивченого; не вміє робити найпростіші операції аналізу і синтезу; робити узагальнення, висновки; під час відповіді допускаються суттєві помилки	недостатньо розкриває сутність практичних завдань, допускаючи при цьому суттєві неточності, правильно вирішив окремі розрахункові/тестові завдання за допомогою викладача, відсутні сформовані уміння та навички.
не - зараховано (0-34% від максимально ї кількості балів)	не володіє навчальним матеріалом	виконує лише елементи завдання, потребує постійної допомоги викладача

Примітка: максимальна кількість балів за кожною темою вказана в п.12.
 Форма підсумкового контролю – залік, виставляється за кількістю балів, набраних в семестрі (згідно зі шкалою оцінювання з п. 12).

11. Питання для поточного та періодичного контролю

1. Поясніть суть понять «тензор», «вектор», «інваріант»?
2. Які існують види векторів щодо закону перетворення координат?
3. В чому суть правила підсумовування Ейнштейна?
4. Що таке німі та вільні індекси?
5. Дати означення символів Кронекера.
6. Що таке дуальний базис? Як він виникає природним чином?
7. Що таке метричні коефіцієнти базису?

8. Що таке вектори та ковектори? Чим вони відрізняються стосовно перетворення їх координат?
9. Що таке градієнт векторного поля?
10. Що таке дивергенція векторного поля?
11. Що таке ротор векторного поля?
12. Які векторні поля називаються потенціальними?
13. Які векторні поля називаються соленоїдальними?
14. Які векторні поля називаються лапласовими? Дайте означення гармонічної функції.
15. Сформулюйте основну теорему векторного аналізу.
16. Що таке тензор, валентність тензора, коваріантні та контрваріантні компоненти тензора?
17. Що таке псевдотензор?
18. Сформулюйте основні алгебраїчні операції над тензорами.
19. Що таке симетричні та косиметричні тензори? Які ви знаєте способи їх задання?
20. Сформулюйте теорему про ознаку тензора (основну теорему векторного аналізу)
21. Що таке рімановий простір?
22. Що таке метричний тензор ріманового простору?
23. Що таке символи Крістоффеля 1 та 2 роду?
24. Чи є символи Крістоффеля 1 та 2 роду тензором? Чому?
25. Записати вирази градієнта, дивергенції, ротора в довільній криволінійній системі координат.
26. Що таке коваріантне диференціювання? Чому воно виникає?
27. Записати правило коваріантного диференціювання для довільного тензора.
28. Навести приклади коваріантного диференціювання для тензорів різних валентностей.
29. Що таке тензор кривини Рімана?

30. Що таке повторне диференціювання в криволінійній системі координат?
31. Що таке коваріантне диференціювання вздовж кривої?
32. Що таке геодезична лінія?
33. Що таке похідна Лі? Сформулюйте її властивості. Формула Картана.
34. Топологічна класифікація замкнених зв'язних гладких двовимірних поверхонь без границі.
35. Триангуляція гладких многовидів.
36. Поняття відображення гладких многовидів (поверхонь) Лема Сарда.
37. Регулярні точки та точки біфуркації при гладких відображеннях гладких многовидів.
38. Степінь відображення
39. Ізометричні, конформні та геодезичні відображення поверхонь.
40. Поняття афінного простору Паралельне перенесення та рух в афінному просторі.
41. Поняття ротора та дивергенції векторного поля. Їх властивості.
42. Теорема Стокса та Гаусса Остроградського для векторних полів в тривимірному евклідовому просторі.

12. Розподіл балів, які отримують здобувачі

Поточне тестування та самостійна робота									Сума балів
Змістовий модуль 1			Змістовий модуль 2			Змістовий модуль 3			
T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8	T 9	
10	10	10	10	10	10	10	15	15	100

Примітка. Студент отримує підсумкову оцінку (залік) за накопичувальною системою. Якщо студент за результатами поточного контролю не набрав 60 балів або бажає підвищити оцінку, він має право скласти залік за питаннями, наведеними у п. 11.

Розподіл балів за видами навчальної роботи

Види навчальної роботи	Бали за одне заняття (завдання)	Кількість занять (завдань)	Сумарна кількість балів
Змістовий модуль 1			
Поточний контроль на лекціях	5	2	10
Виконання практичних робіт	10	2	20
Усього за змістовим модулем 1			0 – 30
Змістовий модуль 2			
Поточний контроль на лекціях	5	2	10
Виконання практичних робіт	5	4	20
Усього за змістовим модулем 2			0 – 30
Змістовий модуль 3			
Поточний контроль на лекціях	8	1	8
Виконання практичних робіт	8	4	32
Усього за змістовим модулем 3			0 – 40
Підсумкова сума балів			0 – 100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90–100	A	відмінно	зараховано
85–89	B	добре	
75–84	C		
70–74	D	задовільно	
60–69	E		
35–59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

13. Навчально-методичне забезпечення

Робоча програма навчальної дисципліни
<https://onu.edu.ua/uk/structure/faculty/fmfit/dystsypliny>; навчально-методичні матеріали для лекцій, конспекти (тексти, схеми) лекцій; мультимедійні презентації; плани практичних занять.

14. Рекомендована література

Основна

1. Лиман Ф.М. Основи векторного та тензорного аналізу: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. – Суми: Сум-ДПУ імені А.С.Макаренка, 2005. – 84 с.
2. Разумова М. А., Хотяїнцев В. М. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник - К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.
3. Наказной П. О. Тензорний аналіз: навч. посіб.— Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 36 с.

Допоміжна

1. Кузь І.С. Методичні вказівки до вивчення основних понять тензорного аналізу / Кузь І.С., Юрчишин А.С. // – Львів : Вид. центр ЛДУ, 1999.- 48 с.
2. Худа Ж.В. Основи векторного і тензорного аналізу. – ДДТУ, 2024. – 66с.

15. Електронні інформаційні ресурси

- 1.<http://nbuv.gov.ua/> – Сайт Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського;
- 2.<http://www.dnrb.gov.ua/> – Сайт Державної науково-педагогічної бібліотеки України імені В.О. Сухомлинського;
- 3.<http://lib.onu.edu.ua/> – Сайт бібліотеки ОНУ імені І. І. Мечникова;
- 4.<http://odnb.odessa.ua/> – Сайт Одеської національної наукової бібліотеки;
- 5.<http://korolenko.kharkov.com/> – Сайт Харківської державної наукової бібліотеки імені В.Г. Короленка;
6. <https://www.imath.kiev.ua/> – Сайт Інституту математики НАН України;