Одеський національний університет імені І.І. Мечникова
Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДРОЖЖИНА АНАСТАСІЯ ВАДИМІВНА

УДК 517.925

ДИСЕРТАЦІЯ

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n- го ПОРЯДКУ

111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________________________ А.В.Дрожжина

Науковий керівник: **Євтухов В'ячеслав Михайлович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Одеса – 2020

АНОТАЦІЯ

Дрожжина А.В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — математика. — Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, 2020.

Підготовка дисертації здійснювалася на кафедрі диференціальних рівнянь, геометрії та топології факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І.І. Мечникова.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

в якому $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ – деякий однобічний окіл Y_{i-1}, Y_{i-1} дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $i = 1, \dots, n$. Предметом дослідження є $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язки цього рівняння, умови їх існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Клас $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків був уведений в роботах В.М. Євтухова і виявився достатньо широким класом монотоних розв'язків. Він містить в собі правильно, повільно і швидко змінні при $t \uparrow \omega$ розв'язки, а також деякі типи сингулярних розв'язків.

Розв'язок y даного диференціального рівняння n-го порядку називається $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i-1)}(t)=Y_{i-1}\quad (i=1,\dots,n),\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)}=\lambda_0.$$

Згідно з результатами В.М. Євтухова множина всіх можливих типів таких розв'язків за своїми асимптотичними при $t\uparrow\omega$ властивостями розпадається на $n+2$ неперетинних множин, що відповідають наступним значенння λ_0:

$$\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\dots,\frac{n-2}{n-1},1\right\},\ \lambda_0=1,\ \lambda_0=\pm\infty,$$

$$\lambda_0=\frac{n-i-1}{n-i}\ (i=1,\dots,n-1).$$

При $n=2$, тобто для диференціального рівняння другого порядку, асимптотика $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків встановлювалась в роботах В. М. Євтухова і Л.І. Кусік. При $n\geq 2$ у роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко, а також у роботах В.М. Євтухова і О.М. Клопота були одержані асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно диференціальних рівнянь виду

$$y^{(n)}=\alpha_0p(t)\varphi(y),\quad y^{(n)}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_ip_i(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{ij}\left(y^{(j)}\right),$$

де $\alpha_0,\,\alpha_i\in\{-1;1\}$, $p,\,p_i:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i=1,\dots,m)$– неперервні функції, $\varphi:\Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$, $\varphi_{ij-1}:\Delta_{Y_{j-1}}\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервні і правильно змінні функції при $y^{(j-1)}\longrightarrow Y_{j-1}$, $j=1,\dots,n$.

Перші результати про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями були отримані в роботах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової і деяких інших авторів для диференціальних рівнянь другого порядку виду

$$y''=\alpha_0p(t)\varphi(y).$$

Правильно змінна функція є добутком степеневої і повільно змінної функції. Тому дослідження рівнянь з правильно змінними нелінійностями було пов'язано з бажанням поширити на такі рівняння результати отримані на протязі XX століття для рівнянь зі степеневими нелінійностями, зокрема, для узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера, частинні випадки яких виникають в багатьох галузях природознавства.

В дисертаційній роботі кожний з вказаних вище $n+2$ типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння n-го порядку загального виду вивчається окремо при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$, суть якої полягає в тому, що на будь-якому з таких розв'язків рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right),$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна правильно змінна функція порядку σ_{j-1} при $y^{(j)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$.

Наприклад, у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ умова $(RN)_{\lambda_0}$ визначається наступним чином.

Будемо казати, що функція f у диференціальному рівнянні задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, якщо існують числа $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, неперервна функція $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при $z_{j-1} \to Y_{j-1}$ $(j = 1, ..., n)$ функції $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \to]0, +\infty[$ порядків σ_{j-1} $(j = 1, ..., n)$ такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_{j-1} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_{j-1}}$ $(j = 1, ..., n)$, які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{j-1}(t) = Y_{j-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_{j-1}(t)}{z_{j-1}(t)} = \frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1} \quad (j = 1, ..., n),$$

де

$$a_{0j} = (n-j)\lambda_0 - (n-j-1) \quad (j = 1 \ldots, n),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), ..., z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}(z_{j-1}(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Для кожного з $n+2$ вказаних вище можливих значень параметру λ_0 при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ розроблено методику дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків розглядаємого в дисертації диференціального рівняння n- го порядку загального виду. Вона базується на застосуванні апріорних асимптотичних властивостях $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, асимптотичних властивостей правильно змінних функцій, побудованих раніше підходів і методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями.

З використанням даної методики у другому розділі дисертації одержано результати про умови існування і асимптотику $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків розглядаємого диференціального рівняння n-го порядку у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, у третьому і четвертому розділах– у випадках $\lambda_0 = 1$ і $\lambda_0 = \pm\infty$ відповідно, у п'ятому - у випадках, коли $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Перший розділ дисертації містить огляд досліджень асимптотичної поведінки розв'язків рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями.

В дисертаційній роботі для кожного з $n+2$ можливих значень параметру λ_0 при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ вперше для розглядаємого диференціального рівняння n-го порядку загального виду:

1) встановлено необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків;

2) отримано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно у неявному вигляді;

3) одержано достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і вирішено питання про кількість таких розв'язків;

4) при незначних додаткових обмеженнях на деякі з функцій φ_{j-1} $(j \in \{1, \ldots, n\})$ з неявних асимптотичних формул для $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язків одержано явні асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Питання про фактичне існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язків зі знайденими асимптотичними зображеннями вирішувалось шляхом зведення за допомогою деяких перетворень до питання про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у систем квазілінійних диференціальних рівнянь і застосуванням для таких систем відомих результатів, що були отримані раніше в роботах В.М. Євтухова і А.М. Самойленка.

Одержані в дисертації результати проілюстровано на прикладі важливого класу нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку виду

$$y^{(n)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(t) \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})}{\sum\limits_{i=k+1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})},$$

де $\alpha_i \in \{-1; 1\}$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_{ij-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна і правильно змінна функція порядку σ_{ij-1} при $y^{(j)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Усі результати є новими, вони математично обґрунтовані й повністю викладені у наукових публікаціях автора.

Ключові слова: диференціальні рівняння n-го порядку загального виду, правильно змінні функції, асимптотичні зображення розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язки, необхідні і достатні умови існування.

ABSTRACT

Drozhzhyna A.V. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear nonautonomous ordinary differential equations of the n-th order. — Qualification research thesis with the rights of manuscript.

Thesis for the scientific degree of Doctor of Philosophy by the speciality 111 – Mathematics. — Odesa I.I. Mechnikov National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Odesa, 2020.

The preparation of the thesis was carried out at the Department of Differential Equations, Geometry and Topology of the Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies of Odesa I.I. Mechnikov National University.

The dissertation work is devoted to the study of asymptotic behaviour of solutions of the differential equation

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Here $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous ffunction, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ is some one-sided neigbourhood of Y_{i-1}, Y_{i-1} equals to zero or to $\pm\infty$, $i = 1, \ldots, n$. The subject of the research is $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions of this equation, conditions of their existence and also asymptotic as $t \uparrow \omega$ representations of such solutions and their derivatives up to the order $n-1$. The class of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions was introducted in works of V. M. Evtukhov and it appeared to be an enough wide class of monotone solutions. It includes regularly, slowly and rapidly varying as $t \uparrow \omega$ solutions and also some types of singular solutions.

The solution y of the considered differential equation of the n-th order is called $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solution, where $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, if it is defined on the half-interval $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ and satifies the next conditions

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i-1)}(t) = Y_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

According to the results of V. M. Evtukhov the set of all such solutions by its asymptotic as $t \uparrow \omega$ properties decomposes onto $n+2$ disjoint sets, that correspond the next values of λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}, \ \lambda_0 = 1, \ \lambda_0 = \pm\infty,$$

$$\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \ (i = 1, \dots, n-1).$$

If $n = 2$ i. e., for the differential equation of the second order the asymptotics of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions have been established in the works of V. M. Evtuckhov and L. I. Kusik. If $n \ge 2$ in works of V. M. Evtuckhov, A. M. Samoilenko and also in the works of V.M. Evtuckhov and O.M. Klopot the asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions and their derivatives up to the order $n-1$ have been received for the differential equations of the type

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}\left(y^{(j)}\right),$$

where α_0, $\alpha_i \in \{-1; 1\}$, p, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, \dots, m)$ are continuous functions, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, $\varphi_{ij-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ are continuous and regularly varying functions as $y^{(j-1)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

The first results on the asymtotics of solutions of differential equations with regularly varying nonlinearities have been obtained in the works of V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, V. M. Evtukhov, L. O. Kirillova and some other authors for the differential equations of the second order of the type

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y).$$

Any regularly varying function is a product of some power function and some slowly varying function. Therefore researches of equations with regularly varying nonlinearities have been connected with the wish to extend to such equations the results, that have been received during the XX centuary for the equations with power nonlinearities, in particular, for the generalized equation of Emden-Fowler's type, particular cases of which appear in a lot of sciences of nature.

In the dissertation work every of the mentioned above $n+2$ types of $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions of the differential equation of the n-th order of general form is studied separately by the fulfillment of the condition $(RN)_{\lambda_0}$. The kernel of the condition is the fact, that onto the any of such solutions the equation is in some sense asymptotically near to the equation

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right),$$

where $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous regularly varying function of the order σ_{j-1} as $y^{(j)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

For example, if $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ the condition $(RN)_{\lambda_0}$ is determined by the next way.

We consider the function f of the differential equat1ion satisfies the condition $(RN)_{\lambda_0}$ when $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, if there exist such numbers $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, such continuous function $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ and continuous regularly varying as $z_{j-1} \to Y_{j-1}$ $(j = 1, ..., n)$ functions $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \to]0, +\infty[$ of the orders σ_{j-1} $(j = 1, ..., n)$ such that for all continuously differentible functions $z_{j-1} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_{j-1}}$ $(j = 1, ..., n)$, that satisfy the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{j-1}(t) = Y_{j-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_{j-1}(t)}{z_{j-1}(t)} = \frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1} \quad (j = 1, ..., n),$$

where

$$a_{0j} = (n-j)\lambda_0 - (n-j-1) \quad (j = 1\ldots,n),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{if} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{if} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

the next representation takes place

$$f(t, z_0(t), ..., z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}(z_{j-1}(t))[1+o(1)] \quad \text{as} \quad t \uparrow \omega.$$

By the condition $(RN)_{\lambda_0}$ takes place, for every of the pointed out $n+2$ possible values of the parameter λ_0 methods of investigation of asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions of the considered in the dissertation work the n-th order differential equation of general type are worked out. The application of a priori asymptotic properties of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions, asymptotic properties of regularly varying functions, approaches and methods of investigation of asymptotic behavior of solutions of differential equations with power and regularly varying nonlinearities that have been worked out before are in their ground. The first part of the dissertation work is devoted to the review of the last ones.

By the use of the developed methods in the second part of the dissertation work there have been received the results about conditions of the existence and asymptotics of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions of the considered n-th order differential equation in the cases when $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$. In the third and in the fourth parts of the work the analogous results have been obtained, correspondingly, for the cases $\lambda_0 = 1$ and $\lambda_0 = \pm\infty$. In the fifth part with the analogous outputs the cases $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ are investigated.

In the dissertation work for the every of $n+2$ possible values of the parameter λ_0 by fulfilment of the condition $(RN)_{\lambda_0}$ for the considered n-th order differential equation of general type at first

1) there are established the necessary conditions of the existence of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions;

2) in an implicit form asymptotic as $t \uparrow \omega$ representations of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions and their derivatives up to the order $n-1$ are received;

3) sufficient conditions of the existence of $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions with the received asymptotic representations are found and the problem of their amount is solved;

4) by the insignificant additional restrictions onto some of the functions φ_{j-1} ($j \in \{1, \ldots, n\}$) from the implicit asymptotic formulas for the $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions the explicit asymptotic formulas for such solutions and their derivatives up to the $(n-1)$-th order are received.

The question of the existence in fact the $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions with the found asymptotic representations is solved by its reduction with the help of some transformations to the question of the existence of the vanishing in a singular point solutions of the system of quasi-linear differential equations and application for such systems the known results received formerly in the works of V. M. Evtukhov and A. M. Samoilenko.

The results of the dissertation work are illustrated by examples of the important class of nonlinear differential equations of the n-th order of the following type

$$y^{(n)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i p_i(t) \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})}{\sum\limits_{i=k+1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})},$$

where $\alpha_i \in \{-1; 1\}$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $\varphi_{ij-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ is continuous regularly varying function of the order σ_{ij-1} as $y^{(j)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

The dissertation work has theoretical character. All the received results are new, they are mathematically grounded and in a full represented in the scientific publications of the author.

Key words: differential equations of the n-th order of general type, regularly varying functions, asymptotic representations of solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-solutions, necessary and sufficient conditions of the existence.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Асимптотика быстро меняющихся решений дифференциальных уравнений, асимптотически близких к уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями. *Нелінійні коливання.* 2019. Т.22, № 3. С. 350-368.

2. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету "Математика і інформатика"*, 2018. Вип. 1 (32). С. 67-79.

3. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.*. 2019. Т.71, № 12. С. 1624-1644.

4. Дрожжина А. В. Асимптотика некоторых типов одного класса решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. *Дослідження в математиці та механіці.* 2019. Т. 24, № 2 (34). С. 7-30.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку. *Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей з міжнар. конф., присвяченої 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка* (м. Кам'янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.). Кам'янець-Подільський, 2017. С. 39.

2. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* (м. Чернівці, 17-18 вересня 2018 р.). Чернівці, 2018. С. 65.

3. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *International Conference of Young Mathematicians.* (Kyiv, Ukraine, June 6-8,2019). Kyiv, 2019. P. 57.

4. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV.* (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.). Київ, 2019. С. 77.

5. Drozhzhyna A. V. Asymptotic Representations of Rapid Varying Solutions of Differential Equations Asymptotically Close to the Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *QUALITDE – 2019: abstracts of the Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Diff. Eq.* (Tbilisi, December 7-9, 2019). Tbilisi, 2019. P. 57-59.

6. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь. *Сучасні проблеми ди-*

ференціальних рівнянь та їх застосування. (м. Чернівці, 16-19 вересня 2020 р.). Чернівці, 2020. С. 118-119.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Потреби сучасної науки призводять до необхідності подальшого розвитку теорії істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Такі рівняння виникають в багатьох галузях природознавства при побудові математичних моделей реальних процесів. Важливу роль в розробці підходів і методів дослідження поведінки розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь відіграли результати, що були отримані з кінця XIX століття по 90 роки XX століття для диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями, зокрема, для рівнянь Емдена-Фаулера і узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера другого та n-го порядків. Серед робіт виконаних у цей період особливо треба відзначити роботи R. V. Atkinson, И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, В. А. Кондратьева, Н. А. Изобова, И.В. Асташовой, S. Belohorec, S.D. Taliaferro, J.S.W. Wong, О.В. Костіна, В.М. Євтухова. Дослідження більшості з цих, а також багатьох інших авторів були відображені і підсумовані в монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія "Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений"(М.: Наука. 1990). Більш того, в цій монографії на підставі досліджень рівнянь зі степеневими нелінійностями були визначені для рівнянь n-го порядку загального виду правильні та сингулярні розв'язки і дана класифікація таких розв'язків, а також були встановлені умови існування розв'язків з кожного з цих класів і асимптотичні оцінки для деяких з них. В роботах В.М. Євтухова, присвячених узагальненим диференціальним рівнянням типу Емдена-Фаулера n-го порядку, був визначений достатньо широкий клас $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків. Для кожного з $n+2$ можливих типів таких розв'язків були одержані умови їх існування, а також асимптотичні формули при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Починаючи з 80 років XX століття у зв'язку з бурхливим розвитком, створеної Й. Карамата у 1930 році теорії правильно змінних функцій, проявляється інтерес до її застосування в теорії диференціальних рівнянь. Оскільки правильно змінна функція є добутком степеневої функції на повільну змінну функцію, то цілком природним виникає бажання про поширення результатів, що були отримані раніше для диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями, на диференціальні рівняння з правильно змінними нелінійностями. Перші результати у цьому напрямку були одержані в роботах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro для двочлених диференціальних рівнянь з правильно змінною нелінійністю. В подальшому в роботах В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової, М. О. Білозерової, В. М. Харькова для двочлених диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями були встановленні умови існування і асимптотичні зображення для всіх можливих типів $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків. В роботах В.М. Євтухова і Л.І. Кусік була здійснена спроба подальшого поширення цих досліджень на диференціальні рівняння другого порядку загального виду, які у деякому сенсі є асимптотично близькими до диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Найбільш вагомі результати про асимптотику $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків, а точніше про асимптотику $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків і $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків були отримані в роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко і В.М. Євтухова, А.М. Клопота (відповідно) для диференціальних рівнянь n-го порядку з правильно змінними нелінійностями.

У зв'язку з вище викладеним наразі є актуальною задача про асимптотичну поведінку $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку загального виду, що в якомусь сенсі є близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана згідно плану науково-дослідної роботи Одеського національного університету імені І.І. Мечникова у рамках держбюджетних тем кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології: "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь аналітичними та якісними методами"(номер державної реєстрації 0109U003665) і "Функціональні класи в еволюційних системах"(номер державної реєстрації 0116U001492).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння n-го порядку загального виду, що э асимптотично близьким у деякому сенсі до рівняння з правильно змінними нелінійностями, а також асимптотичних зображень для цих розв'язків та їх похідних до $n-1$ включно з вирішенням питання про кількість таких розв'язків.

Об'єкт дослідження. Диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{0.1}$$

в якому $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ – деякий однобічний окіл Y_{i-1}, Y_{i-1} дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Предмет дослідження. Асимптотична при $t \uparrow \omega$ поведінка $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - розв'язків диференціального рівняння (0.1).

Методика дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, класичного аналізу, лінійної алгебри, теорії правильно та повільно змінних функцій, асимптотичні методи. Застосовуються також сучасні результати теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі отримані у дисертації результати є новими. Зокрема, для диференціального рівняння n-го порядку (0.1) загального виду при кожному з $n+2$ можливих значень параметру λ_0 визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння і при її виконанні вперше:

1) встановлено необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння (0.1), а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення в певному виді для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно;

2) одержано достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (0.1) з отриманими асимптотчними зображеннями і визначена кількість таких розв'язків;

3) встановлено додаткові умови до $(RN)_{\lambda_0}$ при виконанні яких асимптотичні зображення для $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків можуть бути записаними у явному виді.

Одержані в роботі результати проілюстровано на прикладах рівнянь n-го порядку, один з яких є класом неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку з правильно змінними нелінійностями, асимптотична поведінка розв'язків якого раніше не досліджувалась.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані при подальшому дослідженні диференціальних рівнянь n-го порядку загального вигляду, а також для опису асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, що є математичними моделями реальних процесів, що вивчаються на практиці.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. За результатами дисертації опубліковано чотири роботи, з них дві у співавторстві з науковим керівником Євтуховим В.М., якому належать постановка задачі, визначення мети та завдань дослідження, вибір методів і напрямків розв'язання поставленої задачі та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались і обговорювались на наукових семінарах і конференціях:

1) Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"(м. Кам'янець-Подільський, Україна, 19-21 травня 2017 р.);

2) Міжнародна конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях"(м. Чернівці, 17-18 вересня 2018 р.);

3)Міжнародна конференція "International Conference of Young Mathematicians": тези доповідей (Kyiv, Ukraine, June 6-8,2019). Kyiv, 2019. P. 57.

4) Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV"присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919-1998): тези доповідей (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.). Київ, 2019. С. 77.

5) International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE - 2019"(Tbilisi, Georgia, December 7-9, 2019);

6) Міжнародна конференція "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування"(м. Чернівці, 16-19 вересня 2020 р.);

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано чотири статті, дві з яких [31, 32] надруковані в фахових виданнях, переклад яких індексований у наукометричній базі SCOPUS, та дві інші [7, 8] у наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН

України, і шість тез доповідей на міжнародних і вітчизняних наукових математичних конференціях [9, 10, 11, 21, 76, 22].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 104 найменувань і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 164 сторінки, основний текст займає 121 сторінку.

Зміст роботи. У *вступі* обґрунтовується актуальність обраної теми, визначено мету, основні завдання та методи дослідження, а також наукову новизну роботи та теоретичне значення отриманих результатів.

У *першому розділі* дисертаційної роботи подано огляд досліджень асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями. На підставі цих досліджень визначена задача, вирішення якої може сприяти подальшому розвитку даного напрямку досліджень, а саме задача про умови існування та асимптотику $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку загального виду (0.1), які є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Ця задача обрана у якості теми дисертаційного дослідження. У такій постановці вона потребує визначення чітких умов на праву частину рівняння, при виконанні яких рівняння є асимптотично близьким до рівняння певного виду з правильно змінними нелінійностями. Для кожного з $n+2$ значень параметру λ_0, що відповідають $n+2$ можливим типам $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, в дисертації була визначена така умова $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння (0.1), при виконанні якої може бути здійснено дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків.

У *другому розділі* дисертації для неособливого випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ доведено дві теореми, в яких встановлено необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, \lambda_0)$ - розв'язків диференціального рівняння (0.1) та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Одержані тут результати проілюстровано на прикладах двох рівнянь n-го порядку, одне з яких є класом рівнянь з правильно змінними нелінійностями, що раніше не розглядалися.

Подібні результати були отримані у *розділах II-V* для решти випадків значень параметру λ_0 (особливі випадки).

ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

§1.1. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями

Істотно нелінійні неавтономні звичайні диференціальні рівняння зі степеневою нелінійністю вперше виникають в астрофізичних дослідженнях Г. Лейна, А. Ріттера, А. Шустера й Р. Емдена, що проводились у другій половині XIX століття. Вони були частинними випадками рівняння

$$y'' = \pm t^{\gamma} y^{\sigma} \quad (\gamma \in \mathbb{R},\ \sigma > 1). \tag{1.1}$$

Пізніше рівняння виду (1.1) починають з'являтися в дослідженнях, які проводилися в газовій динаміці, ядерній фізиці, механіки рідин та інших галузях природознавства, зокрема, у 1927 році воно у вигляді рівняння

$$y'' = t^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$$

з'являється в роботах Л. Томаса [103] і Е. Фермі [88] при вивченні розподілу електронів у важкому атомі.

Одержані до 1907 року результати для рівняння (1.1) були підсумовані в монографії Р. Емдена [82]. Достатньо повне дослідження асимптотичних властивостей розв'язків рівняння (1.1) було здійснене в роботах Р. Фаулера [87], [85], [86], після чого такі рівняння в науковій літературі почали називатися рівняннями Емдена-Фаулера. Результати Р. Фаулера у повній мірі були відображені в монографіях Р. Беллмана [2] і Дж. Сансоне [62], що були надруковані у 1954 році. Ці монографії сприяли інтересу дослідників до побудови асимптотичної теорії узагальненого рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma} \operatorname{sign} y, \tag{1.2}$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ - неперервна функція, $\sigma \neq 1$.

У 1955 році в роботі Ф.В. Аткінсона [72] був одержаний при $\alpha_0 = -1$ і $\sigma > 1$ критерій коливності всіх правильних розв'язків рівняння (1.2). Це був перший вагомий результат для узагальненого рівняння типу Емдена-Фаулера. В подальшому І.Т. Кігурадзе [92, 93, 94, 95] розробив методику встановлення асимптотики правильних неколивних і коливних, а також сингулярних розв'язків рівняння (1.2) при $\sigma > 1$. Пізніше в роботах Ш. Білогорца [73, 74] та Т.А. Чантурія [65, 66, 67, 68, 69] були отримані аналогічні результати для випадку $0 < \sigma < 1$.

А.В. Костіним [54] для встановлення асимптотичної поведінки правильних неколивних розв'язків рівняння (1.2) у випадку $\sigma > 1$, була запропонована методика, що відрізняється від тої, яка використовувалась І.Т. Кігурадзе. Ця методика дозволила в роботах А. В. Костіна, В. М. Євтухова [55] і В.М. Євтухова [12, 13, 14, 15] дослідити в рамках єдиного підходу правильні та різні типи сингулярних розв'язків диференціального рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) |y|^\sigma |y'|^\lambda \operatorname{sign} y \quad (\sigma + \lambda \neq 1), \tag{1.3}$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$. При цьому були одержані результати, які охоплювали для рівняння (1.2) також випадки, які раніше не розглядалися, зокрема, випадок, коли $\sigma < 0$.

Наступні дослідження асимптотичних властивостей правильних та сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями були присвячені узагальненим рівнянням типу Емдена-Фаулера n-го порядку і спробами їх поширення на рівняння загального виду

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{1.4}$$

в якому функція f задовольняє одну з нерівностей

$$(-1)^i f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) y \geq 0 \quad (i \in \{0; 1\}).$$

Тут особливо треба відзначити роботи Д.В. Ізюмової [33, 34, 35], Д.В. Ізюмової, І.Т. Кігурадзе [36], І.Т. Кігурадзе [40, 42, 44, 93, 94], І. В. Асташової [1], Ю.А. Клокова [50], С.Н. Олехника [60, 61], Т.А. Чантурії [69], В.Н. Шевело [71], В.Н. Шевело, В.Г. Штелика [70], J.S.W. Wong [104], I.W. Heidel, D.V. Hinton [90], Г.Г. Квінікадзе, І.Т. Кігурадзе [37], Г.Г.Квінікадзе [38, 39].

Дослідження більшості з цих, а також багатьох інших авторів були відображені і підсумовані в монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія [46]. Більш того, в цій монографії на підставі досліджень рівнянь зі степеневими нелінійностями були визначені для рівнянь n-го порядку загального виду (1.4) правильні та сингулярні розв'язки і дана класифікація таких розв'язків, а також були встановлені умови існування розв'язків з кожного з цих класів і асимптотичні оцінки для деяких з них.

А.В. Костін [56, 57] для достатньо широкого класу рівнянь n-го порядку зі степеневими нелінійностями дослідив асимптотичну поведінку правильних неколивних розв'язків, які визначаються формальним застосуванням формул Г. Харді [89]

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y(t)} \sim c_i \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^i \qquad (i \geq 1, \quad c_i \neq 0) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Більш загальний клас монотонних розв'язків був запроваджений В. М. Євтуховим [16, 17, 18, 19] при дослідженні узагальненого рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} ... |y^{(n-1)}|^{\sigma_{n-1}} \operatorname{sign} y, \tag{1.5}$$

де $n \geq 2$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}$ - дійсні числа, що задовольняють нерівність $\sigma_0+\sigma_1+...+\sigma_{n-1}\neq 1$, і $p:[a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty<a<\omega\leq+\infty)$ — неперервна функція.

Означення 1.1. *Розв'язок y рівняння (1.5) називається $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty\leq\lambda_0\leq+\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ і задовольняє умови:*

$$y^{(n)}(t)\neq 0 \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[;$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}y^{(k-1)}(t)=\{0;\pm\infty\} \quad (k=\overline{1,n}), \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\,y^{(n-1)}(t)\,\right]^2}{y^{(n)}(t)\,y^{(n-2)}(t)}=\lambda_0.$$

Для класу таких розв'язків були встановлені наступні апріорні асимптотичні властивості.

Лема 1.1. *Нехай $y:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ – довільний $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язок рівняння (1.5) і*

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \textit{якщо} \quad \omega=+\infty,\\ t-\omega, & \textit{якщо} \quad \omega<+\infty.\end{cases}$$

Тоді:

1) *якщо $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$, то при $t\uparrow\omega$ мають місце асимптотичні співвідношення*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)}=\frac{a_{0k}}{\lambda_0-1} \quad (k=\overline{1,n}),$$

де $a_{0i}=(n-i)\lambda_0-(n-i-1) \quad (i=\overline{1,n-1})$;

2) *якщо $\lambda_0=1$, то при $t\uparrow\omega$*

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{y''(t)}{y'(t)}\sim\ldots\sim\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \quad \textit{і} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty;$$

3) *якщо $\lambda_0=+\infty$, то при $t\uparrow\omega$ мають місце асимптотичні співвідношення*

$$y^{(k-1)}(t)\sim\frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!}\,y^{(n-1)}(t) \quad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$y^{(n)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right);$$

4) *якщо* $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ *для деякого* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, *то при* $t \uparrow \omega$

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!}\, y^{(i-1)}(t) \quad (k = \overline{1, i-1})^1,$$

$$y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right),$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i}\frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}}\, y^{(i)}(t) \quad (k = \overline{i+1, n}),$$

причому у випадку, коли $i = n-1$, *останнє співвідношення має місце при додатковій умові існування скінченної або рівної* $+\infty$ $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

З цієї леми ясно, що за своїми асимптотичними властивостями множина всіх $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків розпадається на $n+2$ неперетинних множин, що відповідають наступним значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}; \quad \lambda_0 = 1; \quad \lambda_0 = \pm\infty; \tag{1.6}$$

$$\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \quad (i = \overline{1, n-1}). \tag{1.7}$$

.

При виконанні нерівності $\sigma_0 + \ldots + \sigma_{n-1} \neq 1$ для кожного з $n+2$ можливих значень параметру λ_0 було отримано з використанням леми 1.1 необхідні та достатні (див. Евтухов В.М.[17, 18, 19]) умови існування $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків у диференціального рівняння (1.5) і встановлено асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

[1] При $i = 1$ ці співвідношення відсутні.

§1.2. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями

Теорія правильно змінних функцій, що була створена Й. Караматою [91] у 1930 році, достатньо повно викладена в монографіях Є. Сенети [63] і N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels [75]. Визначимо основні положення цієї теорії, які будуть використовуватись в подальшому.

Означення 1.2. *Вимірна функція* $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$*, де* Y *дорівнює або нулю, або* $\pm\infty$*, і* Δ_Y *– деякий однобічний окіл* Y*, називається правильно змінною при* $y \to Y$*, якщо існує таке число* $\sigma \in \mathbb{R}$*, що для довільного* $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{f(\lambda y)}{f(y)} = \lambda^{\sigma}. \tag{1.8}$$

При цьому σ *називається порядком функції* f *(або показником).*

Означення 1.3. *Вимірна функція* $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$*, де* Y *дорівнює або нулю, або* $\pm\infty$*, і* Δ_Y *– деякий однобічний окіл* Y*, називається повільно змінною при* $y \to Y$*, якщо для будь-якого* $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1. \tag{1.9}$$

Означення 1.4. *Вимірна функція* $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$*, де* Y *дорівнює або нулю, або* $\pm\infty$*, і* Δ_Y *– деякий однобічний окіл* Y*, називається швидко змінною при* $y \to Y$*, якщо виконується одна з наступних двох умов:*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{f(\lambda y)}{f(y)} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < \lambda < 1, \\ +\infty & \text{при} \quad \lambda > 1; \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{f(\lambda y)}{f(y)} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lambda > 1, \\ +\infty & \text{при} \quad 0 < \lambda < 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Згідно з цими означеннями повільно змінна при $y \to Y$ функція є правильно змінною функцією нульового порядку, а швидко змінна при $y \to Y$ функція f при умові (1.10) має порядок $\sigma = +\infty$ і при умові (1.11) — порядок $\sigma = -\infty$.

Крім того, з означень 1.2 і 1.3 випливає, що кожна правильно змінна при $y \to Y$ функція $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ порядку σ може бути поданою у вигляді

$$f(y) = |y|^\sigma L(y), \tag{1.12}$$

де $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ - повільно змінна функція при $y \to Y$.

Зважаючи на це зображення, зрозуміло, що в подальшому достатньо обмежитись лише властивостями повільно та швидко змінних при $y \to Y$ функцій.

Найпростішими прикладами повільно змінних функцій при $y \to Y$, де Y дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, є функції, що мають відмінну від нуля скінчену границю при $y \to Y$, та функції

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$

$$\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

а швидко змінних функцій при $y \to Y$ – функції

$$e^{\sigma y},\ |y|^r e^{\sigma|y|^m},\ |y|^r e^{\sigma e^{|y|^m}}\ (r \in \mathbb{R},\ \sigma \neq 0,\ m > 0) \quad \text{при} \quad Y = \pm\infty$$

і функції

$$e^{\frac{\sigma}{y}}, \quad |y|^r e^{\sigma|y|^{-m}}, \quad |y|^r e^{\sigma e^{|y|^{-m}}}\ (r \in \mathbb{R},\ \sigma \neq 0,\ m > 0) \quad \text{при} \quad Y = 0.$$

Означення 1.5. *Будемо казати, що повільно змінна функція* $L : \Delta_Y \to]0, +\infty[$, *де* Y *дорівнює або нулю або* $\pm\infty$ *і* Δ_Y *- однобічний окіл* Y, *задовольняє умову S, якщо*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad y \to Y \ (y \in \Delta_Y),$$

де $\nu = \operatorname{sign} y$.

Умову S свідомо задовольняють перші з двох поданих вище прикладів повільно змінних функцій, а також функції, що прямують до відмінної від нуля сталої при $y \to Y$.

Найбільш важливими результатами в теорії правильно змінних функцій є наступні дві теореми (див., наприклад, [63], § 1.2, с. 10–15). В цих теоремах і в подальшому будемо вважати, що Y (Z) дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, і Δ_Y (Δ_Z) – деякий однобічний окіл Y (Z).

Теорема 1.1 (про рівномірну збіжність). *Якщо* $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ *— повільно змінна функція при* $y \to Y$, *то граничне співвідношення* (1.9) *виконується рівномірно за* λ *на будь-якому проміжку* $[c, d] \subset]0, +\infty[$.

Теорема 1.2 (про зображення) *Вимірна функція* $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ *є повільно змінною при* $y \to Y$ *тоді й лише тоді, коли для деякого* $b \in \Delta Y$ *вона може бути зображена у вигляді*

$$L(y) = c(y) \exp\left(\int_b^y \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt\right) \quad \textit{при} \quad y \in \Delta_Y(b), \tag{1.13}$$

де c *— вимірна на проміжку* $\Delta_Y(b)$ *функція така, що* $c(y) \to c_0 \in]0, +\infty[$ *при* $y \to Y$, ε *— неперервна на* $\Delta_Y(b)$ *функція, що прямує до нуля при* $y \to Y$, $\Delta_Y(b)$ *— проміжок* $]Y, b]$, *якщо* Δ_Y *— правий окіл* Y, *і проміжок* $[b, Y[$, *якщо* Δ_Y *— лівий окіл* Y.

Якщо у зображенні (1.13) замінити функцію c на сталу c_0, то отримаємо неперевно диференційовну повільно змінну при $y \to Y$ функцію

$L_0 : \Delta_Y(b) \longrightarrow]0, +\infty[$ таку, що

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(y)}{L_0(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0. \tag{1.14}$$

Таким чином, має місце наступне твердження.

Лема 1.2. *Для будь-якої вимірної повільно змінної при $y \to Y$ функції $L : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ існує повільно змінна при $y \to Y$ неперервно диференційовна функція $L_0 : \Delta_Y(b) \longrightarrow]0, +\infty[$, що задовольняє умови* (1.14).

Функцію L_0 з цієї леми називають нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y$.

З леми 1.2 з урахуванням зображення (1.12) одержуємо також наступний результат.

Лема 1.3. *Для вимірної правильно змінної при $y \to Y$ функції $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ порядку σ існує неперервно диференційовна правильно змінна при $y \to Y$ функція $f_0 : \Delta_Y(b) \longrightarrow]0, +\infty[$ порядку σ така, що*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{f(y)}{f_0(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yf_0'(y)}{f_0(y)} = \sigma. \tag{1.15}$$

Функцію f_0 з леми 1.3 називають нормалізованою правильно змінною функцією порядку σ при $y \to Y$.

Для лем 1.2 і 1.3 справедливим є у деякому сенсі обернене твердження.

Лема 1.4. *Якщо для неперервно диференційовної функції $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ виконується умова*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yf'(y)}{f(y)} = \sigma, \tag{1.16}$$

то вона є нормалізованою правильно змінною при $y \to Y$ функцією порядку σ.

При $\sigma = 0$ функція f з леми 1.4 є нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y_0$.

Зауваження 1.1. *Якщо для неперервно диференційовної функції* $f : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yf'(y)}{f(y)} = \pm\infty,$$

то вона є (див. монографію V. Marić [99], Appendix, Proposition 10, p.117) швидко змінною функцією при $y \to Y$.

Сформулюємо ще декілька властивостей правильно та швидко змінних функцій (див. монографію V. Marić [99], Appendix, Proposition 1, 2, 4-6, p.115-116), які можуть бути отримані з теорем 1.1 і 1.2 а також лем 1.2 - 1.4.

Лема 1.5. *Нехай* $f, f_1, f_2 : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ *— правильно змінні функції відповідно порядків* $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ *при* $y \to Y$ *і* $f_0 : \Delta_Z \longrightarrow \Delta_Y$*– правильно змінна функція порядку* σ_0 *при* $z \to Z_0$. *Тоді:*

1) $f_1(y) + f_2(y)$, $f_1(y)f_2(y)$ *і* $f^\alpha(y)$ *при будь-якому* $\alpha \in \mathbb{R}$ *є правильно змінними функціями відповідно порядків* $\max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\sigma_1 + \sigma_2$, $\alpha\sigma$ *при* $y \to Y_0$;

2) $f(f_0(z))$ *– правильно змінна функція порядку* $\sigma\sigma_0$ *при* $z \to Z$, *якщо* $f_0(z) \longrightarrow Y$ *при* $z \longrightarrow Z$.

Лема 1.6 (про асимптотично обернену функцію).*Для довільної правильно змінної при* $y \to Y$ *функції* $f_1 : \Delta_Y \longrightarrow \Delta_Z$, *де* $Z = \lim\limits_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} f_1(y)$, *порядку* $\sigma \neq 0$ *існує правильно змінна при* $z \to Z$ *функція* $f_2 : \Delta_Z \longrightarrow \Delta_Y$ *порядку* $\frac{1}{\sigma}$ *така, що*

$$f_1(f_2(z)) \sim z \quad \text{при} \quad z \to Z \quad \text{і} \quad f_2(f_1(y)) \sim y \quad \text{при} \quad y \to Y.$$

Більш того, f_2 *визначається асимптотично однозначно, тобто якщо будь-яка правильно змінна при* $z \to Z$ *функція* $f_3 : \Delta_Z \longrightarrow \Delta_Y$ *при* *підстановці замість f_2 задовольняє хоча б одне з цих співвідношень, то $f_3(z) \sim f_2(z)$ при $z \to Z$.*

Лема 1.7. *Нехай $L : \Delta_Y \longrightarrow]0; +\infty[$ — повільно змінна функція при $y \to Y$. Тоді: 1)*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta Y}} \frac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0;$$

2) *для будь-якого $\gamma > 0$ при $y \to Y$*

$$|y|^{\gamma} L(y) \to \begin{cases} 0, \text{ якщо } Y = 0, \\ +\infty, \text{ якщо } Y = \pm\infty, \end{cases} \quad |y|^{-\gamma} L(y) \to \begin{cases} +\infty, \text{ якщо } Y = 0, \\ 0, \text{ якщо } Y = \pm\infty; \end{cases}$$

3) *при $\alpha \neq -1$*

$$\int\limits_A^y |t|^{\alpha} L(t) dt \sim \frac{|y|^{\alpha+1} \operatorname{sign} y}{\alpha + 1} L(y) \quad \text{при } y \to Y,$$

і при $\alpha = -1$ функція $l(y) = \int\limits_A^y \frac{L(t)\,dt}{|t|}$ є повільно змінною при $y \to Y$, причому

$$\frac{L(y)}{l(y)} \to 0 \quad \text{при } y \to Y,$$

де

$$A = \begin{cases} y_0, & \text{якщо } \int\limits_{y_0}^{Y} |t|^{\alpha} L(t) dt = \pm\infty, \\ \\ Y_0, & \text{якщо } \left| \int\limits_{y_0}^{Y} |t|^{\alpha} L(t) dt \right| < +\infty, \end{cases} \qquad y_0 \in \Delta Y.$$

Зауваження 1.2. *Означення правильно, повільно та швидко змінних функцій при $y \to Y$ були сформульовані для випадків, коли Y дорівнює або нулю, або $\pm\infty$. Для довільного скінченного Y, що відмінний від нуля, такі означення отримуємо з даних шляхом використання заміни $y - Y = z$. При цьому для даного випадку значення Y легко можуть бути одержані відповідні аналоги зазначених вище результатів* *про асимптотичні властивості правильних, повільно та швидко змінних функцій. Зокрема, з умови*

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{(y-Y)f'(y)}{f(y)} = \sigma$$

випливає, що функція f є нормалізованою правильно змінною функцією порядку σ при $y \to Y$.

К 80 рокам XX століття, коли теорія правильно змінних функцій набула вже достатнього розвитку, проявився інтерес дослідників до її застосування в теоріі диференціальних рівнянь. Оскільки кожна правильно змінна функція є добутком степеневої функції на деяку повільно змінну функцію, то цілком природним постало питання про можливість поширення результатів про асимптотичну поведінку розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями, зокрема, рівнянь типу Емдена-Фаулера, що були отримані раніше, на неавтономні диференціальні рівняння з правильно змінними нелінійностями. Перші результати в цьому напрямку були одержані в роботах V. Marić, M. Tomić [97, 98] і S.D. Taliaferro [101, 102] для диференціального рівняння

$$y'' = p(t)\varphi(y), \tag{1.17}$$

де $p\ :\ [a,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$-неперервна функція, $\varphi\ :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервна і правильно зміна в нулі функція порядку σ. Тут були одержані асимптотичні оцінки, а при додатковій умові, що функція p є правильно змінною при $t \to +\infty$ деякого порядку γ, асимптотичні зображення в неявному виді для всіх його розв'язків, які прямують до нуля при $t \to +\infty$. Всі ці і деякі інші результати про асимптотику зникаючих у нескінченності розв'язків диферецiальних рівнянь виду (1.17), що були одержані до 2000 року, відображено в монографії M. Marič [99].

В подальшому в роботах В.М. Євтухова і Л.О. Кирилової [23, 47, 48, 49] для диференціального рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \tag{1.18}$$

в якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$-неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ - двічі неперервно диференційовна і правильно змінна при $y \to Y_0$ функція порядку σ, де Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}– деякий однобічний окіл Y_0, були одержані умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, тобто $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків (див. Означення 1.1), які прямують до Y_0 при $t \uparrow \omega$. Встановлені тут результати суттєво (при гладкісних обмеженнях на функцію φ) доповнюють результати отримані для диференціального рівняння (1.17). Вони охоплюють не тільки розв'язки, що прямують до нуля при $t \uparrow \omega$, але і розв'язки, що прямують до нескінченності при $t \uparrow \omega$, а також різні типи сингулярних розв'язків, причому не тільки у випадку, коли $\alpha_0 = 1$, але і у випадку, коли $\alpha_0 = -1$.

В роботах В.М. Євтухова і М.О. Білозерової [20, 3, 4, 5] результати, отримані для рівняння (1.18), були поширені на диференціальні рівняння виду

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \tag{1.19}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$-неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна і правильно змінна при $y \to Y_i$ функція порядку σ_i, де Y_i дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i}– деякий однобічний окіл Y_i, $i = 0, 1$. Для цього рівняння були встановлені необхідні і достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язків, тобто $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків, які прямують до Y_0, а їх похідні першого порядку до Y_1 при $t \uparrow \omega$.

Ці дослідження сприяли постановці задачі про асимптотичну поведінку $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння другого порядку загального виду

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1.20}$$

де $f : [a, \omega[\times\Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbb{R}$– неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i - дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i, $i = 0, 1$, яке у деякому сенсі є асимптотично близьким до рівняння (1.19). В роботах В.М. Євтухова, Л.І. Кусік [26, 27, 58, 59] для кожного з чотирьох можливих значень параметру λ_0 було визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ при виконанні якої права частина рівняння, у деякому сенсі є асимптотично близькою до правої частини деякого рівняння виду (1.19), і при виконанні цієї умови одержано необхідні і достатні умови існування у рівняння (1.20) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- розв'язків, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Найбільш вагомі результати для рівнянь з правильно змінними нелінійностями були одержані в роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [29] і В.М. Євтухова, О.М. Клопота [24, 25, 51, 52, 53]. В першій з цих робіт розглядалось рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.21}$$

а в решті робіт– рівняння виду

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}\left(y^{(j)}\right), \tag{1.22}$$

де α, $\alpha_i \in \{-1; 1\}$ p, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$– неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, $\varphi_{ij} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервні правильно змінні при $y \to Y_0$, $y^{(j)} \to Y_j$ функції порядків σ і σ_{ij}, Y_j дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_j}– деякий однобічний окіл Y_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, m$.

При дослідженні цих рівнянь, на відміну від досліджень рівнянь (1.18), (1.19), тут були зняті обмеження на гладкість нелінійностей, що вдалося зробити завдяки отриманим у роботі В. М. Євтухова і А. М. Самойленка [28] новим результатам про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у систем квазілінійних диференціальних рівнянь. У цілому, для рівнянь (1.21), (1.22) при кожному з $n+2$ можливих значень (1.6), (1.7) параметру λ_0 були одержані найбільш закінчені результати про умови існування відповідно $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ і $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, а також про асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

У зв'язку з отриманими для рівнянь (1.21), (1.22) результатами наразі цілком природним постає питання про можливість їх поширення на диференціальне рівняння n- порядку загального виду (0.1), яке є асимптотично близькими до рівнянь виду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right), \tag{1.23}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$– неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна правильно змінна при $y^{(j-1)} \to Y_{j-1}$ функція порядку σ_{j-1}, Y_{j-1} дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $\Delta_{Y_{j-1}}$– деякий однобічний окіл Y_{j-1}, $j = \overline{1, n}$.

Вирішенню актуальної задачі про умови існування у диференціального рівняння n-го порядку загального виду (0.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, а також про асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно присвячена дана дисертаційна робота.

Означення 1.6. *Нехай* $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$. *Неперервно диференційовна n разів функція $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($t_0 \in]a, \omega[$) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язком диференціального рівняння (0.1), якщо* *вона задовольняє умови*

$$y^{(n)}(t) \neq 0, \quad y^{(j-1)}(t) \in \Delta_{Y_{j-1}} \quad (j = \overline{1,n}) \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \tag{1.24}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(j-1)}(t) = Y_{j-1} \quad (j = \overline{1,n}), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0 \tag{1.25}$$

і

$$y^{(n)}(t) = f\Big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\Big) \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Зауваження 1.3. *Звернемо увагу на те, що згідно з означеннями 1.6 і 1.1 $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язок є $P_\omega(\lambda_0)$-розвязком, для якого і його похідних до порядку $n-1$ включно конкретизовані можливі граничні значення при $t \uparrow \omega$. Тому апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків співпадають з апріорними асимптотичними властивостями $P_\omega(\lambda_0)$-розвязків, що визначені у лемі 1.1. Після застосування цієї леми треба ще врахувати знакові умови на $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язки та їх похідні до порядку $n-1$ включно.*

Висновки до першого розділу

У першому розділі подано огляд досліджень асимптотичної поведінки розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями, визначено основні поняття і твердження, що при цьому використовувались, які знадобляться і в наступних розділах дисертації. В результаті аналізу цих досліджень, цілком природно вилучена актуальна задача про умови існування та асимптотику $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Ця задача є темою даної дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ II

АСИМПТОТИКА $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ (0.1) У ВИПАДКУ, КОЛИ $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$

У цьому розділі для диференціального рівняння (0.1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ – розв'язків у неособливому випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, а також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно і вирішується питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями. У даному випадку згідно з апріорними асимптотичними властивостями (лема 1.1) кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ – розв'язок y задовольняє умові

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} \quad (k = \overline{1, n}), \tag{2.1}$$

де

$$a_{0k} = (n-k)\lambda_0 - (n-k-1) \ \ (k = \overline{1, n}),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Із цих умов з урахуванням нерівностей $a_{0k} \neq 0$ $(k = \overline{1, n})$ приходимо на підставі леми 1.4 і зауваження 1.2 до висновку, що кожний такий розв'язок і всі його похідні до порядку $n-1$ включно є правильно змінними функціями з відмінними від нуля порядками при $t \uparrow \omega$, тобто серед них немає повільно змінних функцій при $t \uparrow \omega$.

Дослідження у цьому розділі здійснюється у припущенні, що функція f у диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$.

Означення 2.1. *Будемо казати, що в диференціальному рівнянні (0.1) функція f задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, .., \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$,* *якщо існують числа* $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, *неперервна функція* $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ *і неперервні правильно змінні при* $z_{j-1} \to Y_{j-1}$ $(j = \overline{1, n})$ *функції* $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \to]0, +\infty[$ *порядків* σ_{j-1} $(j = \overline{1, n})$ *такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій* $z_{j-1} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_{j-1}}$ $(j = \overline{1, n})$, *які задовольняють умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{j-1}(t) = Y_{j-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_{j-1}(t)}{z_{j-1}(t)} = \frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1} \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.2}$$

має місце при $t \uparrow \omega$ *зображення*

$$f(t, z_0(t), ..., z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}(z_{j-1}(t))[1 + o(1)]. \tag{2.3}$$

При виконанні цієї умови будемо використовувати у даному розділі наступні позначення:

$$\gamma = 1 - \sum_{j=1}^{n} \sigma_{j-1}, \quad \mu_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{j-1}(n - j), \quad C = \frac{|\lambda_0 - 1|^{\mu_n}}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} \prod\limits_{i=j}^{n-1} |a_{0i}|^{\sigma_{j-1}}}.$$

Крім того, в подальшому будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_j} = \Delta_{Y_j}(b_j), \quad \Delta_{Y_j}(b_j) = \begin{cases} \text{або} \quad [b_j, Y_j[, \\ \text{або} \quad]Y_j, b_j], \end{cases} \quad (j = 0, \ldots, n-1),$$

де $b_j \in \Delta_{Y_j}$ обрано таким, що $|b_j| < 1$ при $Y_j = 0$ і $b_j > 1$ $(b_j < -1)$ при $Y_j = +\infty$ $(Y_j = -\infty)$.

Уведемо також числа

$$\nu_{j-1} = \operatorname{sign} b_{j-1} \ (j = \overline{1, n}),$$

які визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язку диференціального рівняння (0.1) та його похідних до порядку $n - 1$ включно. Враховуючи означення $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язку, неважко зрозуміти, що для існування такого розв'язку необхідно, щоб при будь-якому $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ виконувалась нерівність

$$\nu_{j-1}\nu_j < 0, \text{ якщо } Y_{j-1} = 0, \quad \nu_{j-1}\nu_j > 0, \text{ якщо } Y_{j-1} = \pm\infty. \tag{2.4}$$

§2.1. Формулювання основних результатів.

Щоб сформулювати отримані в цьому розділі результати, введемо поряд з вказаними вище позначеннями допоміжну функцію

$$J_n(t) = \int\limits_{A_n}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n}\, d\tau,$$

де границя інтегрування A_n визначається наступним чином

$$A_n = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\, dt = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\, dt < +\infty. \end{cases}$$

Для рівняння (0.1) має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *функція* f *задовольняє умову* $(RN)_{\lambda_0}$ *і* $\gamma \neq 0$. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (0.1) $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*- розв'язків необхідно, а якщо алгебраїчне відносно* ρ *рівняння*

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{j-1} \prod_{k=j}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j-1} (a_{0k} + \rho) = (1 + \rho) \prod_{k=1}^{n-1} (a_{0k} + \rho) \tag{2.5}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, то і достатньо, щоб поряд з (2.4) *виконувалась нерівність*

$$\alpha_0 \nu_{n-1} < 0, \text{ якщо } Y_{n-1} = 0, \quad \alpha_0 \nu_{n-1} > 0, \text{ якщо } Y_{n-1} = \pm\infty, \tag{2.6}$$

а також умови

$$\nu_{j-1} \nu_j a_{0j} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0 \ (j = \overline{1, n}), \ \alpha_0 \nu_{n-1} (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0, \tag{2.7}$$

$$\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_n(t) > 0 \text{ при } t \in]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} = \frac{\gamma}{\lambda_0 - 1}. \tag{2.8}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j}}{\prod\limits_{i=j}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{1, n-1}), \tag{2.9}$$

де $y^{(n-1)}(t)$ неявна функція виду

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.10}$$

що визначається з асимптотичного співвідношення

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^\gamma}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} L_{j-1}\left(\nu_{j-1}|\pi_\omega^{n-j}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+o(1)], \tag{2.11}$$

в якому $L_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right) = |y^{(j-1)}|^{-\sigma_{j-1}}\varphi_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right) \quad (j = \overline{1,n})$ – повільно змінна складова функції $\varphi_{j-1} \quad (j = \overline{1,n})$, причому існує m- параметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли серед коренів алгебраїчного рівняння (2.5) є m коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку $(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)$.

Зауваження 2.1. *Алгебраїчне рівняння* (2.5) *свідомо не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо виконується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\sigma_{j-1}| < |\sigma_{n-1} - 1|.$$

Дійсно, якщо переписати рівняння (2.5) у виді

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{j-1} \prod_{k=j}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j-1}(a_{0k}+\rho) = (1+\rho-\sigma_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1}(a_{0k}+\rho)$$

і припустити, що воно має розв'язок виду $\rho = i\rho_0$, де $\rho_0 \in \mathbb{R}$, i– уявна одиниця, то, враховуючи, що модуль суми не перевищує суми модулів, отримуємо

$$|1+i\rho-\sigma_{n-1}| \prod_{k=1}^{n-1} |a_{0k}+i\rho_0| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{j-1} \prod_{k=j}^{n-1} a_{0k} \prod_{k=1}^{j-1}(a_{0k}+\rho) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n-1} |\sigma_{j-1}| \prod_{k=j}^{n-1} |a_{0k}| \prod_{k=1}^{j-1} |a_{0k}+i\rho_0| \le \sum_{j=1}^{n-1} |\sigma_{j-1}| \prod_{k=1}^{n-1} |a_{0k}+i\rho_0|,$$

звідки в силу нерівностей $a_{0k} \neq 0$ $(k = \overline{1, n-1})$ випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\sigma_{j-1}| \geq |1 - \sigma_{n-1} + i\rho_0| \geq |1 - \sigma_{n-1}|.$$

Звернемо увагу на те, що в теоремі 2.1 асимптотичні зображення для $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (0.1) та їх похідних до порядку $n-1$ включно подані у неявному виді. Доповненням до цієї теореми є наступний, одержаний у роботі, результат про додаткові умови на функції φ_{j-1} $(j = \overline{1, n})$, при виконанні яких ці зображення можуть бути записаними у явному виді.

Теорема 2.2. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, *функція* f *задовольняє умову* $(RN)_{\lambda_0}$, $\gamma \neq 0$ *і повільно змінні складові* L_{j-1} *функцій* φ_{j-1} $(j = \overline{1, n})$ *в зображенні (2.3) задовольняють умову* S. *Тоді для кожного* $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$*- розв'язку диференціального рівняння (0.1) (у випадку їх існування) мають місце при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення (2.9) і*

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} \left| \gamma C J_n(t) \prod_{j=1}^{n} L_{j-1}\left(\nu_{j-1} |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1}}\right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)]. \qquad (2.12)$$

Оскільки $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, то теореми 2.1 і 2.2 охоплюють випадок, коли $\omega < +\infty$. Це дає можливість отримувати з них і результати про умови існування, а також асимптотичні зображення сингулярних розв'язків диференціального рівняння (0.1). Дійсно, якщо точка $\omega_* \in [a, \omega[$ то при заміні в теоремах 2.1 і 2.2 ω на ω_* одержимо наступні два твердження про умови існування та асимптотику $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, які свідомо є сингулярними розв'язками рівняння (0.1).

Наслідок 2.1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, $\omega_* \in]a, \omega_0[$, *функція* f *задовольняє умову* $(RN)_{\lambda_0}$ *при заміні в ній* ω *на* ω_*, $p(\omega_*) > 0$ *і*

$\gamma \neq 0$. Тоді для існування у диференціального рівняння (0.1) сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язків, необхідно, а якщо алгебраїчне відносно ρ рівняння (2.5) не має коренів з нульовою дійсною частиною, то і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\mu_n + 1 = \frac{\gamma}{\lambda_0 - 1},$$

а також нерівності

$$\alpha_0 \nu_{n-1} < 0, \text{ якщо } Y_{n-1} = 0, \quad \alpha_0 \nu_{n-1} > 0, \text{ якщо } Y_{n-1} = \pm\infty,$$

$$\nu_{j-1} \nu_j a_{0j} (\lambda_0 - 1) < 0 \ (j = \overline{1, n}), \ \alpha_0 \nu_{n-1} (\lambda_0 - 1) < 0.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega_*$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \frac{\left(\frac{\gamma(t-\omega_*)}{\mu_n+1}\right)^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} \left[1 + (n-i)\frac{\mu_n+1}{\gamma}\right]} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = 0, \dots, n-2),$$

де $y^{(n-1)}(t)$ неявна функція виду

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} (\omega_* - t)^{\frac{\mu_n+1}{\gamma} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega_*,$$

що визначається з асимптотичного при $t \uparrow \omega_*$ співвідношення

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j (\omega_* - t)^{n-j-1} |y^{(n-1)}(t)|\right)} =$$

$$= -\frac{\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C p(\omega)}{\mu_n + 1} (\omega_* - t)^{\mu_n + 1} [1 + o(1)],$$

в якому $L_j\left(y^{(j)}\right) = |y^{(j)}|^{-\sigma_j} \varphi_j\left(y^{(j)}\right)$ $(j = \overline{0, n-1})$ – повільно змінні складові функцій φ_j $(j = 0, \dots, n-1)$, причому існує m- параметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли серед коренів алгебраїчного рівняння (2.5) є m коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, співпадаючий зі знаком числа $\gamma(\mu_n + 1)$.

Наслідок 2.2. *Нехай виконуються умови наслідка 2.1 і повільно змінні складові L_j функцій φ_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ в зображенні (2.3) задовольняють умову S. Тоді для кожного сингулярного $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$- розв'язку диференціального рівняння (0.1) (у випадку їх існування) мають місце при $t \uparrow \omega_*$ асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) = \frac{\left(\frac{\gamma(t-\omega_*)}{\mu_n+1}\right)^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}\left[1+(n-i)\frac{\mu_{n+1}}{\gamma}\right]} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 0, \ldots, n-2),$$

$$y^{(n-1)}(t) \sim \nu_{n-1} \left| \frac{\gamma C p(\omega_*)}{\mu_n+1} (\omega_* - t)^{\mu_n+1} \prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j(\omega_* - t)^{\frac{\mu_n+1+(n-j-1)\gamma}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Зауваження 2.2 *Аналогічні два твердження можуть бути отримані і для випадку, коли $p(\omega_*) = 0$. У цьому випадку в умовах цих тверджень і асимптотичних зображеннях залишиться, так само, як і в теоремах 1.1, 1.2, інтеграл J_n, оскільки він вже асимптотично при $t \uparrow \omega_*$ не визначається.*

§2.2. Допоміжні твердження

При доведенні теореми 2.1 знадобиться один відомий результат про умови існування у дійсної квазілінійної системи диференціальних рівнянь зникаючих в особливій точці розв'язків.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} z_j' = h(t)[F_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \sum_{k=1}^n c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)] \\ \\ j = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{2.13}$$

в якій $c_{jk} \in \mathbb{R} \ \ (j, k = \overline{1, n})$, $h : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$– неперервна функція така, що

$$h(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \int\limits_{t_0}^{\omega} |h(t)|\, dt = +\infty, \tag{2.14}$$

$F_j, Z_j : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_c \longrightarrow \mathbb{R} \ (j = \overline{1, n})$- неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t \to \omega} F_j(t, z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \tag{2.15}$$

рівномірно за $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n_c$,

$$\lim_{|z_1| + \dots + |z_n| \to 0} \frac{Z_j(t, z_1, \dots, z_n)}{|z_1| + \dots + |z_n|} = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \tag{2.16}$$

рівномірно за $t \in [t_0, \omega[$, де

$$-\infty < t_0 < \omega \leq +\infty, \ \mathbb{R}^n_c = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : |z_i| \leq c \ (i = \overline{1, n}), \ c > 0\}.$$

Із теореми 2.2 роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [28] безпосередньо випливає наступний результат.

Лемма 2.1. *Нехай виконуються умови (2.14)-(2.16) і матриця* $C = (c_{jk})^n_{j,k=1}$ *не має власних значень з нульовою дійсною частиною. Тоді система диференціальних рівнянь* (2.13) *має хоча б один розв'язок* $(z_j)^n_{j=1}$: $[t_1, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}^n_c$ $(t_1 \in [t_0, \omega[)$, *який прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$, *причому таких розв'язків існує* m- *параметрична сім'я, якщо серед власних значень матриці* C *є* m *власних значень (с урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку функції* h *на проміжку* $[t_0, \omega[$.

§2.3. Доведення теорем

Доведення теореми 2.1. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ – довільний $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язок диференціального рівняння (0.1). Тоді $\operatorname{sign} y^{(k-1)}(t) = \nu_{k-1}$ $(k = \overline{1,n})$ при $t \in [t_0, \omega[$, для кожного $k \in \{1, \dots, n-1\}$ виконується нерівність (2.4) і (2.1). Згідно з цими умовами справедливими є перші $n-1$ з нерівностей (2.7). Крім того, з (1.24) і (2.1) ясно, що для функцій $z_k(t) = y^{(k)}(t)$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ виконуються умови (2.2). Тому в силу виконання умови $(RN)_{\lambda_0}$

$$f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) = \alpha_0 p(t) \prod_{k=0}^{n-1} \varphi_k(y^{(k)}(t))[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Звідси з урахуванням (0.1) отримуємо, що

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t)[1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.17}$$

Таким чином, $\operatorname{sign} y^{(n)}(t) = \alpha_0$ в деякому лівому околі ω. Тому на підставі виконання при $k = n-1$ умов (1.24) справедливою є нерівність (2.6) і в силу (2.1) при $k = n$ – остання з нерівностей (2.7).

Далі, враховуючи, що

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(j)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t) \quad (j = \overline{1,n}),$$

з використанням (2.1) одержуємо

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)]^{n-j}}{\prod\limits_{i=j}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \ (j = \overline{1,n}) \text{ при } t \uparrow \omega,$$

тобто мають місце асимптотичні співвідношення (2.9). Із (2.1) при $k = n$ випливає також справедливість представлення (2.10).

В (2.17) кожна функція $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j \in \{0, 1, \dots, n-1\})$ є правильно змінною функцією порядку σ_j при прямувані аргументу до Y_j і тому допускає зображення виду

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}), \tag{2.18}$$

де $L_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$– повільно змінна функція при $y^{(j)} \to Y_j$. В силу цих зображень при $j = 0, 1, \dots, n-1$, асимптотичних співвідношень (2.9) і теореми 1.1. про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення

$$\varphi_j(y^{(j)}(t)) = \frac{|(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)|^{\sigma_j(n-j-1)}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} |a_{0j}|^{\sigma_j}} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_j} \times$$

$$\times L_j\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)[1 + o(1)] \ (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

З використанням цих співвідношень з (2.17) одержуємо, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0 C |\pi_\omega(t)|^{\mu_n} p(t)[1 + o(1)]. \tag{2.19}$$

Згідно з лемою 1.2 про одну з властивостей повільно змінних функцій для кожного $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ існує неперервно диференційовна функція $L_{0j} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ така, що

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1, \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0j}(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0. \tag{2.20}$$

В силу другого з цих співвідношень, а також умов $\gamma \neq 0$,

$$\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)| \longrightarrow Y_j \ \ (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}$$

маємо

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t) y^{(n-1)}(t)|\right)} \right)' =$$

$$= \nu_{n-1} \frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} \Bigg[\gamma - \frac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|L'_{0j}\left(\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)}{L_{0j}\left(\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} \times$$

$$\times \left(n-j-1+\frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \right) \Bigg] =$$

$$= \nu_{n-1}\gamma \frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому (2.19) з урахуванням першої з умов (2.20) може бути переписано при $t \uparrow \omega$ у виді

$$\left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} \right)' = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}p(t)[1+o(1)].$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_0 до t і приймаючи до уваги правило обрання границі інтегрування A_n у функції J_n, одержимо

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки з урахуванням першої з умов (2.20) випливає справедливість асимптотичного представлення (2.11).

Справедливість першої з умов (2.8) безпосередньо випливає з (2.11), а другої – із асимптотичних співвідношень (2.11), (2.19) і граничного співвідношення (2.1) при $k = n$.

Достатність. Нехай виконуються умови (2.6) - (2.8) і алгебраїчне рівняння (2.5) не має коренів з нульовою дійсною частиною. Покажемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (0.1) має $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язки, які допускають асимптотичні зображення (2.9)– (2.11) і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Спочатку розглянемо співвідношення

$$\frac{|Y|^\gamma}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega^{n-j-1}(t)Y|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+v_n], \tag{2.21}$$

де $L_{0j} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[\quad (j=0,1,\dots,n-1)$-неперервно диференційовні нормалізовані повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції, що задовольняють умови (2.20), які існують в силу леми 1.2 про одну з властивостей повільно змінних функцій.

Таким самим чином, як у роботі [25] при розгляді там співвідношення (2.13), встановлюємо, що (2.21) однозначно визначає визначену на множині $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, де $t_0 \in [a,\omega[$ і $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \left\{v_n \in \mathbb{R} : |v_n| \le \frac{1}{2}\right\}$, неперервно диференційовну неявну функцію $Y(t,v_n)$ виду

$$Y(t,v_n) = \nu_{n-1}|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+z(t,v_n)}, \tag{2.22}$$

де функція z така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

яка задовольняє при $(t,v_n) \in [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ включення

$$\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)| \in \Delta_{Y_j} \quad (j=\overline{0,n-1}), \tag{2.24}$$

і наступні граничні умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)| = Y_j \qquad (j=\overline{0,n-1}) \tag{2.25}$$

рівномірно за $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)} = \frac{1}{\lambda_0-1} \tag{2.26}$$

рівномірно за $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$.

Тепер рівняння (0.1) за допомогою замін

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}}[1+v_{j+1}(t)] \quad (j=\overline{0,n-2}),$$

$$y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(t)), \tag{2.27}$$

з урахуванням того, що функція $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(t))$ при $t \in [t_0, \omega[$ задовольняє рівнянню

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|y^{(n-1)}(t)|\right)} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C J_n(t)[1+v_n(t)], \tag{2.28}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_j' = h(t)[1 + a_{0j}v_{j+1} - (n-j)(\lambda_0-1)v_j - \\ \qquad -R(t, v_1, \dots, v_n)(1+v_j)] \ (j=1,\dots,n-2), \\ v_{n-1}' = h(t)\left[1 - (\lambda_0-1)v_{n-1} - R(t, v_1, \dots, v_n)(1+v_{n-1})\right] \\ v_n' = (\lambda_0-1)h(t)\left[\frac{\gamma}{\lambda_0-1}R(t, v_1, \dots, v_n)(1+v_n) - \right. \\ \qquad \left. - \frac{\pi_\omega(t)J_n'(t)}{J_n(t)}(1+v_n) - \varepsilon(t, v_1, \dots, v_n)(1+v_n)\right], \end{cases} \tag{2.29}$$

де

$$h(t) = \frac{1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}, \quad \varepsilon(t, v_1, \dots, v_n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|L_{0j}'\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)}{L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)}\left[n-j-1+\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_0-1}R(t, v_1, \dots, v_n)\right], \qquad R(t, v_1, \dots, v_n) = (\lambda_0-1)\pi_\omega(t)\times$$

$$\times\frac{f\left(t,\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-1}Y(t,v_n)(1+v_1)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{0i}},\dots,\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)Y(t,v_n)(1+v_{n-1})}{a_{0n-1}},Y(t,v_n)\right)}{Y(t,v_n)},$$

Цю систему розглянемо множині $[t_1,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}=\left\{(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n:\,|v_i|<\frac{1}{2},\ i=1,\dots,v_n\right\}$ і $t_1\in[t_0,\omega[$ обрано з урахуванням (2.7), (2.24), (2.25) таким чином, щоб при $t\in[t_1,\omega[,\ (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ виконувались умови

$$\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}(1+v_{j+1})\in\Delta_{Y_j}\ (j=0,\dots,n-2).$$

На цій множині праві частини систем (2.29) неперервні. Крім того, в силу (2.26)

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_1)(1+v_{j+1})}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)'_t}{\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_1)(1+v_{j+1})}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}}=n-j-1+\frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n)'_t}{Y(t,v_n)}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow n-j-1+\frac{1}{\lambda_0-1}=\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}\quad(j=0,\dots,n-2)$$

рівномірно за $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$. Тому згідно з умовою $(RN)_{\lambda_0}$

$$f\left(t,\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-1}Y(t,v_n)(1+v_1)}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}a_{0i}},\dots,\frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)Y(t,v_n)(1+v_{n-1})}{a_{0n-1}},Y(t,v_n)\right)$$

$$=\alpha_0p(t)\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)\times$$

$$\times[1+\delta_1(t,v_1,\dots,v_n)],$$

де $\delta_1(t,v_1,\dots,v_n)\longrightarrow 0$ при $t\uparrow\omega$ рівномірно за $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$. Тут на підставі зображення (2.18), а також теореми 1.1 і леми 1.2 про властивості повільно змінних функцій

$$\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)=$$

$$=|Y(t,v_n)|^{\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{|(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)|^{\sigma_j(n-j-1)}}{\prod\limits_{j=0}^{n-2}|a_{oi}|^{\sigma_j}}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-2}L_j\left(\frac{[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)]^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}a_{0i}}\right)=$$

$$=C|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)[1+\delta_2(t,v_1,\dots,v_n)]=$$

$$=C|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)[1+\delta(t,v_1,\dots,v_n)],$$

де L_{0j} $(j=0,\dots,n-1)$ – функції з (2.21), $\delta_2(t,v_1,\dots,v_n)\longrightarrow 0$ при $t\uparrow\omega$ рівномірно за $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\delta(t,v_1,\dots,v_n)=0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{2.30}$$

Згідно з вище викладеним і співвідношенням (2.28), якому задовольняє функція $y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n)$, маємо

$$R(t,v_1,\dots,v_n)=\frac{\alpha_0\nu_{n-1}(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}}{|Y(t,v_n)|^\gamma}\times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j} \prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|Y(t,v_n)|\right)[1+\delta(t,v_1,\dots,v_n)] =$$

$$= \frac{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)J_n'(t)}{\gamma J_n(t)(1+v_n)} \prod_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})^{\sigma_j}[1+\delta(t,v_1,\dots,v_n)], \tag{2.31}$$

де функція δ задовольняє умову (2.30).

Тепер, враховуючи (2.20), (2.24), (2.25), (2.31) і (2.8), помічаємо також, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon(t,v_1,\dots,v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}. \tag{2.32}$$

Уведемо функцію

$$V(v_1,\dots,v_n) = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2}(1+v_{j+1})}{1+v_n} - 1 - \sum_{j=0}^{n-2}\sigma_j v_{j+1} + v_n.$$

Враховуючи, що вона задовольняє умови

$$V(0,\dots,0) = 0, \qquad \lim_{|v_1|+\dots+|v_n|\to 0} \frac{V(v_1,\dots,v_n)}{|v_1|+\dots+|v_n|} = 0, \tag{2.33}$$

і приймаючи до уваги представлення (2.31) перепишемо систему диференціальних рівнянь (2.29) у виді

$$\begin{cases} v_j' = h(t)\Big[f_j(t,v_1,\dots,v_n) - a_{0j}v_j + a_{0j}v_{j+1} - \sum\limits_{i=0}^{n-2}\sigma_i v_{i+1} + v_n + \\ \qquad + V_j(v_1,\dots,v_n)\Big], \quad j=1,\dots,n-2, \\ v_{n-1}' = h(t)\Big[f_{n-1}(t,v_1,\dots,v_n) - \lambda_0 v_{n-1} - \sum\limits_{i=0}^{n-2}\sigma_i v_{i+1} + v_n + \\ \qquad + V_{n-1}(v_1,\dots,v_n)\Big], \\ v_n' = h(t)\Big[f_n(t,v_1,\dots,v_n) + \gamma\sum\limits_{i=0}^{n-2}\sigma_i v_{i+1} - \gamma v_n + V_n(v_1,\dots,v_n)\Big], \end{cases}$$

де

$$f_j(t, v_1, \ldots, v_n) =$$

$$= -\frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{\gamma J_n(t)} \frac{(1 + v_j) \prod\limits_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i}}{1 + v_n} \delta(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \left(1 + \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{\gamma J_n(t)}\right) \frac{(1 + v_j) \prod\limits_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i}}{1 + v_n)}, \quad V_j(v_1, \ldots, v_n) =$$

$$= -V(v_1, \ldots, v_n)(1 + v_j) - v_j \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} - v_n\right) \quad (j = 1, \ldots, n-1),$$

$$f_n(t, v_1, \ldots, v_n) = -(\lambda_0 - 1)\varepsilon(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} \prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i} \delta(t, v_1, \ldots, v_n) +$$

$$+ \left(\frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) J_n'(t)}{J_n(t)} - \gamma\right) \left(\prod_{i=0}^{n-2} (1 + v_{i+1})^{\sigma_i} - 1 - v_n\right),$$

$$V_n(v_1, \ldots, v_n) == \gamma(1 + v_n) V(v_1, \ldots, v_n) + \gamma v_n \left(\sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i v_{i+1} - v_n\right)$$

і згідно з умовами (2.8), (2.30), (2.32), (2.33) такі, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_j(t, v_1, \ldots, v_n) = 0 \ (j = 1, \ldots, n) \tag{2.34}$$

рівномірно за $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$,

$$V_j(0, \ldots, 0) = 0, \quad \lim_{\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i| \to 0} \frac{V_j(v_1, \ldots, v_n)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|} = 0 \ (j = 1, \ldots, n). \tag{2.35}$$

До даної системи диференціальних рівнянь, з метою спрощення її вигляду, застосуємо додаткове перетворення

$$v_j = z_j - \frac{1}{\gamma} z_n \quad (j = 1, \ldots, n-1), \quad v_n = z_n. \tag{2.36}$$

У результаті одержимо систему диференціальних рівнянь

$$
\begin{cases}
z_j' = h(t)\left[F_j(t, z_1, \dots, z_n) - a_{0j} z_j + a_{0j} z_{j+1} + \right. \\
\qquad \left. Z_j(z_1, \dots, z_n)\right] \quad (j = \overline{1, n}), \\
z_{n-1}' = h(t)\left[F_{n-1}(t, z_1, \dots, z_n) - a_{0n-1} z_{n-1} + \frac{a_{0n-1}}{\gamma} z_n + \right. \\
\qquad \left. + Z_{n-1}(z_1, \dots, z_n)\right], \\
z_n' = h(t)\left[F_n(t, z_1, \dots, z_n) + \gamma \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sigma_{k-1} z_k + (\sigma_{n-1} - 1) z_n \right. \\
\qquad \left. + Z_n(z_1, \dots, z_n)\right],
\end{cases}
\tag{2.37}
$$

де

$$F_n(t, z_1, \dots, z_n) = f_n\left(t, z_1 - \frac{1}{\gamma} z_n, \dots, z_{n-1} - \frac{1}{\gamma} z_n, z_n\right),$$

$$Y_n(z_1, \dots, z_n) = V_n\left(z_1 - \frac{1}{\gamma} z_n, \dots, z_{n-1} - \frac{1}{\gamma} z_n, z_n\right),$$

$$F_j(t, z_1, \dots, z_n) = f_j\left(t, z_1 - \frac{z_n}{\gamma}, \dots, z_{n-1} - \frac{z_n}{\gamma}, z_n\right) - \frac{1}{\gamma} F_n(t, z_1, \dots, z_n),$$

$$Z_j(z_1, \dots, z_n) = V_j\left(z_1 - \frac{z_n}{\gamma}, \dots, z_{n-1} - \frac{z_n}{\gamma}, z_n\right) - \frac{1}{\gamma} Z_n(z_1, \dots, z_n),$$

$j = \overline{1, n-1}$.

Таким чином, отримана система диференціальних рівнянь (2.13), в якій функція $h(t) = \frac{1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}$ задовольняє умови (2.14), а функції F_j, Y_j $(j = 1, \dots, n)$ задовольняють в силу (2.34) і (2.35) умови (2.15) і (2.16). Крім того, матриця $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n$ з системи (2.13) у даному випадку складається з елементів виду

$$c_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j+1\} \quad (j = 1, \dots, n-1),$$

$$c_{jj} = -a_{0j}, \quad c_{jj+1} = a_{0j} \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, n-1, \quad c_{n-1n-1} = -a_{0n-1},$$

$$c_{n-1n}=\frac{a_{0n-1}}{\gamma},\ c_{nk}=\gamma\sigma_{k-1}\quad\text{при}\quad k=1,\dots,n-1,\quad c_{nn}=\sigma_{n-1}-1.$$

Неважко перевірити, що характеристичне рівняння цієї матриці $\det(C-\rho E)=0$, де E- одинична $n\times n$ матриця, має вид (2.5), і тому згідно з умовами теореми не має коренів з нульовою дійсною частиною. Отже, для системи диференціальних рівнянь (2.37) виконано всі умови леми 2.1. На підставі цієї леми система диференціальних рівнянь (2.37) має хоча б один розв'язок $(z_j)_{j=1}^{n}:[t_2,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $(t_2\in[t_1,\omega[)$, що прямує до нуля при $t\uparrow\omega$, причому таких розв'язків існує m- параметрична сім'я, якщо серед коренів рівняння (2.5) є m коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку функції $(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)$ на проміжку $[a,\omega[$. Кожному такому розв'язку системи диференціальних рівнянь (2.37) в силу замін (2.36) і (2.27) відповідає розв'язок $y:[t_2,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$ рівняння (0.1) з асимптотичними при $t\uparrow\omega$ зображеннями (3.9), (2.9), що є $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$– розв'язком.

Теорему повністю доведено.

Доведення теореми 2.2. Припустимо, що диференціальне рівняння (0.1) має $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язок $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$. тоді згідно з теоремою 2.1 виконуються умови (2.6)-(2.8) і для даного розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (2.9) - (2.11). Оскільки функції L_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ задовольняють умову S (див. Означення 1.5) і має місце зображення (2.11), то

$$L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}|y^{(n-1)}(t)|\right)=L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1+\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)}\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}+o(1)}\right)=L_j\left(\nu_j e^{(1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}}}\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0-1}}\right)[1+o(1)]\quad(j=0,1,\dots,n-1)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення з (2.11) одержуємо, що при

$t \uparrow \omega$

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C J_n(t) \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1}} \right) [1 + o(1)].$$

Звідси безпосередньо випливає асимптотичне при $t \uparrow \omega$ зображення (2.12) для $n-1$ першої похідної даного $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язку диференціального рівняння (0.1). Теорему доведено.

§2.4. Приклади

Проілюструємо одержані результати на прикладах трьох диференціальних рівнянь n-го порядку. Спочатку розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right)}, \tag{2.38}$$

в якому $\alpha_k \in \{-1, 1\}$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(\omega \leq +\infty)$ - неперервна функція, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ - неперервна і правильно змінна при $y^j \to Y_j$ функція порядку σ_{kj}, Y_j дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_j}– деякий однобічний окіл Y_j, $k = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Обрав довільним чином число $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, припустимо, що існують $s \in \{1, \ldots, l\}$ і $r \in \{l+1, \ldots, m\}$, для яких виконуються нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} < \frac{\operatorname{sign} \pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1} \tag{2.39}$$

при всіх $k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}$ і

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} < \frac{\operatorname{sign} \pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1} \tag{2.40}$$

при всіх $k \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$, де a_{0k} $(k = 1, \ldots, n)$ визначені в формулах (2.1).

Покажемо, що при виконанні цих умов права частина рівняння (2.38) задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$.

Нехай $z_j : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ – довільні неперервно диференційовні функції, що задовольняють умови (2.2). Тоді для них мають місце асимптотичні співвідношення

$$\ln|z_j(t)| = \left(\frac{a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1} + o(1)\right) \ln|\pi_\omega(t)| \ (j = 0, 1, \ldots, n-1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Враховуючи їх, а також зображення виду

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \ \ (k = 1, \ldots, m; j = 0, \ldots, n-1),$$

де $L_{kj}(y^{(j)}) : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ - неперервна повільно змінна функція при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, і твердження 1) леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій, будемо при $k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}$ мати

$$\ln\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}\right) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}(\ln\varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln\varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}((\sigma_{kj} - \sigma_{sj})\ln|z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - L_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) -$$

$$-\ln p_s(t) + +\sum_{j=0}^{n-1}\ln|z_j(t)|\left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}\right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln|\pi_\omega(t)|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{(\sigma_{kj} - \sigma_{sj})a_{0j+1}}{\lambda_0 - 1} + o(1)\right) =$$

$$= |\ln|\pi_\omega(t)||\left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} - \right.$$

$$\left. -\frac{\operatorname{sign}\pi_\omega(t)}{\lambda_0 - 1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj} - \sigma_{kj})a_{0j+1} + o(1)\right)\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси в силу виконання нерівності (2.39) випливає, що вираз, який стоїть ліворуч, прямує до $-\infty$ при $t\uparrow\omega$ і тому

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}\right)=0 \quad \text{при всех} \quad k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\}.$$

Аналогічно, з використанням нерівності (3.40) встановлюємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}\right)=0 \quad \text{при всех} \quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

Згідно з цими граничними співвідношеннями

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}=\frac{\alpha_s p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

тобто має місце асимптотичне співвідношення (2.3), в якому

$$\alpha_0=\alpha_s\alpha_r, \quad p(t)=\frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t))=\frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)} \quad (j=0,1,\dots,n-1),$$

причому тут φ_j - неперервна повільно змінна при $z_j\longrightarrow Y_j$ функція порядку $\sigma_j=\sigma_{sj}-\sigma_{rj}$ і її повільно змінна складова L_j дорівнює відношенню повільно змінних складових L_{sj} і L_{rj} функцій φ_{sj} і φ_{rj}.

Таким чином, права частина рівняння (2.38) задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$. Тому у випадку, коли при деяких $s\in\{1,\dots,l\}$, $r\in\{l+1,\dots,m\}$ виконуються умови (2.39), (2.40) і відмінна від нуля стала $\gamma=1-\sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj}-\sigma_{rj})$, для рівняння (2.38) є справедливими твердження теорем 2.1 і 2.2 про умови існування і асимптотику $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків з заміною в цих твердженнях сталих α_0, σ_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ і функцій p, φ_j, L_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ на вказані вище відповідні сталі і функції.

Якщо $\omega_* \in]a, \omega[$, то нерівності (2.39), (2.40) при заміні в них ω на ω_* приймають відповідно наступний вид

$$(\lambda_0 - 1) \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1} < 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\},$$

і

$$(\lambda_0 - 1) \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj}) a_{0j+1} < 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}.$$

В даному випадку при виконанні цих нерівностей і нерівності $1 - \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{rj}) \neq 0$ для диференціального рівняння(2.38) справедливими є твердження наслідків 2.1 і 2.2 про умови існування і асимптотику сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків з заміною в цих твердженнях сталих α_0, σ_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ і функцій p, φ_j, L_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$, на ті ж самі, що і вище.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = p(t)|y|^\sigma \ln(1 + |y|), \tag{2.41}$$

де $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$– неперервна функція і $\sigma > 1$. Відомо (див. [46], §11, стор. 267 - 271), що при будь-якому $\omega_* > a$ рівняння (2.41) має сингулярний розв'язок другого роду $y : [a, \omega_*[\longrightarrow]0, +\infty[$ (за термінологією І.Т. Кігурадзе) такий, що

$$\lim_{t \uparrow \omega_*} y(t) = +\infty.$$

З'ясуємо з використанням наслідків 2.1 і 2.2 питання про наявність для будь-якого $\omega_* > a$ у диференціального рівняння (2.41) сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$– розв'язків при деякому $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$.

Права частина даного рівняння при будь-яких $\lambda_0 \in R \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ і $\omega_* > a$ свідомо задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ з заміною в ній ω на ω_*, причому тут

$$\alpha_0 = 1, \quad \varphi(y) = |y|^\sigma \ln(1 + |y|), \; \gamma = 1 - \sigma < 0, \; \mu_n = \sigma(n-1) > 0,$$

повільно змінна при $y \to Y_0$ складова функції φ задовольняє умову S і алгебраїчне рівняння (2.5) має вид

$$(1+\rho)\prod_{k=1}^{n-1}(a_{0k}+\rho)-\sigma\prod_{k=1}^{n-1}a_{0k}=0. \tag{2.42}$$

Згідно з наслідком 2.1 необхідними умовами для існування таких розв'язків є умови:

$$\nu_{j-1}=1 \ (j=\overline{1,n}) \text{ і тому } Y_{j-1}=+\infty \ (j=\overline{1,n});$$
$$\mu_n+1\neq 0, \quad \lambda_0=1+\frac{1-\sigma}{\sigma(n-1)+1}.$$

Враховуючи останню з цих умов будемо також мати

$$\lambda_0<1, \quad a_{0k}>0 \quad (k=\overline{1,n-1}),$$

звідки випливає, що

$$\frac{n-2}{n-1}<\lambda_0<1.$$

Приймаючи до уваги ці умови і нерівність $\sigma>1$, неважко переконатися в тому, що алгебраїчне рівняння (2.42) не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тому на підставі наслідків 2.1 і 2.2 диференціальне рівняння (2.41) при будь-якому $\omega_*>a$ має сингулярний $P_{\omega_*}(+\infty,\dots,+\infty,\lambda_0)$-розв'язок лише у випадку, коли $\lambda_0=1+\frac{1-\sigma}{\sigma(n-1)+1}$ і для цього розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega_*$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t)=\frac{[\sigma(n-1)+1]^j[(1-\sigma)(t-\omega_*)]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1}[\sigma(i-1)+n-i+1]}y^{(n-1)}(t)[1+o(1)],$$
$$j=0,\dots,n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t)=$$
$$=\left|\frac{(n-1)(\sigma-1)^{\sigma(n-1)+1}p(\omega_*)}{[\sigma(n-1)+1]\prod\limits_{i=0}^{n-1}[\sigma(i-1)+n-i+1]^{\sigma}}(\omega_*-t)^{\sigma(n-1)+1}\ln(\omega_*-t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)].$$

На відміну від вказаного вище результату з [46] тут подається ще і асимптотичні зображення для сингулярного розв'язку.

Далі, розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = (-1)^n p(t)|y|^\sigma \ln(1 + |y|), \tag{2.43}$$

де $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[-$ неперервна функція і $\sigma > 1$. Відомо (див. монографію [46], §13, стор. 280 - 289), що якщо

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{n-1} p(t)\, dt = +\infty, \tag{2.44}$$

то рівняння (2.41) має континуум зникаючих у нескінченності кнезеровських розв'язків.

З'ясуємо, використовуючи теореми 2.1 і 2.2 питання про існування у диференціального рівняння (2.43) при деякому $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ зникаючих у нескінченності $P_{+\infty}(0, 0, \dots, 0, \lambda_0)-$ розв'язків. Згідно з теоремою 2.1 необхідними умовами існування таких розв'язків у диференціального рівняння (2.43) є наступні:

$$\frac{n-2}{n-1} < \lambda_0 < 1,\ (-1)^n \nu_{n-1} = -1,\ \nu_{j-1} = (-1)^{n+j-1}\ (j = 1, \dots, n),$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{tJ_n'(t)}{J_n(t)} = \frac{1 - \sigma}{\lambda_0 - 1}, \tag{2.45}$$

тобто, повинна існувати скінчена і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{tJ_n'(t)}{J_n(t)}$ і число λ_0 має визначатися наступним чином

$$\lambda_0 = 1 + (1 - \sigma) \lim_{t \to +\infty} \frac{J_n(t)}{tJ_n'(t)}.$$

З (2.45) знаходимо, що

$$J_n(t) = t^{\frac{1-\sigma}{\lambda_0 - 1} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

і тому

$$p(t)t^{\sigma(n-1)+1} \sim \frac{1 - \sigma}{\lambda_0 - 1} t^{\frac{1-\sigma}{\lambda_0 - 1} + o(1)} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Звідси маємо

$$p(t)t^{n-1} \sim \frac{1-\sigma}{\lambda_0 - 1} t^{\frac{1-\sigma}{\lambda_0-1}[(n-1)\lambda_0-(n-2)]+o(1)}$$

Тоді з урахуванням нерівностей $\sigma > 1$, $\frac{n-2}{n-1} < \lambda_0 < 1$ приходимо до висновку, що справджується умова (2.44).

Крім того, враховуючи нерівності $\sigma > 1$ і $a_{0k} > 0$ $(k = \overline{1, n-1})$, помічаємо, що алгебраїчне рівняння (2.42) не має коренів з нульовою дійсною частиною, серед яких існує (див. монографію Б.П. Демидовича [6], Розділ II, §8, стор. 91) хоча б один з від'ємною дійсною частиною. Тоді згідно з теоремами 2.1 і 2.2 у диференціального рівняння (2.43) існує нескінченна множина $P_{+\infty}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_0)$– розв'язків і для кожного з них мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \frac{[(\lambda_0-1)t]^{n-j-1}}{\prod\limits_{i=j+1}^{n-1} a_{0i}} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)],$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$y^{(n-1)}(t) =$$

$$= (-1)^{n-1} \left| \frac{(1-\sigma)|\lambda_0-1|^{\sigma(n-1)-1}[(n-1)\lambda_0-(n-2)]}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}|a_{0i}|^\sigma} J_n(t) \ln t \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)].$$

Такі розв'язки свідомо є кнезеровськими (за термінологією І. Т. Кігурадзе. Більш того, на відмінну від [46], §13, стор. 280 - 289), тут даються також і асимптотичні зображення для цих розв'язків.

Висновки до другого розділу

У другому розділі дисертації досліджувались асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння n-го порядку загального виду (0.1) у неособливому випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$.

Для цього випадку:

1) визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння, при виконанні якій стає можливим провести дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (0.1);

2) при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ вперше встановлено необхідні умови існування у диференціального рівняння (0.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні зображення у неявному виді для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно;

3) при деякій незначній додатковій (до необхідних) умові вперше встановлено фактичне існування у диференціального рівняння (0.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і вирішено питання про кількість таких розв'язків;

4) визначено додаткові умови, при виконанні яких отримані асимптотичні зображення можуть бути поданими у явному виді;

5) з основних теорем другого розділу вперше одержано результати про умови існування і асимптотичні зображення сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (0.1);

6) встановлені результати проілюстровано на трьох прикладах диференціальних рівнянь n-го порядку, один з яких представляє клас рівнянь з правильно змінними нелінійностями, який раніше в літературі не розглядався, а два інших з метою їх порівняння з відомими результатами.

РОЗДІЛ III

АСИМПТОТИКА $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ (0.1) У ВИПАДКУ, КОЛИ $\lambda_0 = 1$

У цьому розділі для диференціального рівняння (0.1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\lambda_0)$ – розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0 = 1$, а також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно і вирішується питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями. У даному випадку згідно з апріорними асимптотичними властивостями (лема 1.1) кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$ – розв'язок y задовольняє умови

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \ldots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \text{ i } \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty. \tag{3.1}$$

Із цих умов на підставі леми 1.4 і зауваження 1.2 випливає, що кожний такий розв'язок і всі його похідні до порядку $n-1$ включно є швидко змінними функціями при $t \uparrow \omega$.

Дослідження у цьому розділі здійснюється у припущенні, що функція f у диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 = 1$. У відповідності до (3.1) ця умова визначається наступним чином.

Означення 3.1. *Будемо казати, що в диференціальному рівнянні (0.1) функція f задовольняє умову $(RN)_1$, якщо існують числа $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, неперерервна функція $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при $z_j \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \to]0, +\infty[$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_j : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$, які задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)z_j'(t)}{z_j(t)} = \pm\infty \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{z'_{j-1}(t)z_j(t)}{z_{j-1}(t)z'_j(t)}=1, \quad (j=\overline{1,n-1}). \tag{3.3}$$

має місце при $t\uparrow\omega$ зображення

$$f(t,z_0(t),...,z_{n-1}(t))=\alpha_0 p(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_j(z_j(t))[1+o(1)]. \tag{3.4}$$

При виконанні цієї умови будемо використовувати у даному розділі позначення γ, μ_n, $\Delta_{Y_0}(b)$ і ν_j $(j=\overline{0,n-1})$, що були уведені на початку другого розділу до §2.1.

§3.1. Формулювання основних результатів

Для формулювання отриманих в цьому розділі результатів введемо поряд з вказаними вище позначеннями допоміжні функції

$$J_0(t)=\int\limits_{A_0}^{t}p(s)\,ds, \quad J_{00}(t)=\int\limits_{A_{00}}^{t}J_0(s)\,ds,$$

де

$$A_0=\begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega p(s)\,ds=+\infty,\\ \omega, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega p(s)\,ds<+\infty,\end{cases}$$

$$A_{00}=\begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega |J_0(s)|\,ds=+\infty,\\ \omega, & \text{якщо} \quad \int_a^\omega |J_0(s)|\,ds<+\infty.\end{cases}$$

(Основним результатом цього розділу є теорема)

Теорема 3.1. *Нехай функція f задовольняє умову $(RN)_1$ і при цьому $\gamma\neq 0$. Тоді для існування у диференціального рівняння* (0.1) $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},1)$- *розв'язків необхідно, а якщо алгебраїчне відносно ρ рівняння*

$$(1+\rho)^n=\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_j(1+\rho)^j \tag{3.5}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, то і достатньо, щоб

$$\frac{p(t)}{J_0(t)} \sim \frac{J_0(t)}{J_{00}(t)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{J_0(t)} = \pm\infty \tag{3.6}$$

$$\nu_j \lim_{t\uparrow\omega} |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{3.7}$$

і при $t \in]a, \omega[$ виконувалися нерівності

$$\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t) > 0, \quad \nu_j \nu_{n-1} \left(\gamma J_0(t)\right)^{n-j-1} > 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{3.8}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{3.9}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} =$$

$$= \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t) \left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n} [1 + o(1)], \tag{3.10}$$

де $L_j\left(y^{(j)}\right) = |y^{(j)}|^{-\sigma_j} \varphi_j\left(y^{(j)}\right)$ $(j = \overline{0, n-1})$– повільно змінні складові функцій φ_j, причому розв'язків з такими зображеннями існує m-параметрична сім'я, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (3.5) є m коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку $\alpha_0 \nu_{n-1}$.

Зауваження 3.1. *Можна показати (див. Зауваження 2.1), що алгебраїчне рівняння (3.5) свідомо не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо $\sum\limits_{j=0}^{n-2} |\sigma_j| < |1 - \sigma_{n-1}|$.*

Зауваження 3.2. *Згідно з першої з умов (3.6) і теоремою 1.1 (про рівномірну збіжність) щодо властивостей повільно змінних функцій відношення $\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}$ у зображеннях (3.9) і (3.10) може бути замінено на $\frac{\gamma J_0(t)}{p(t)}$.*

Зауваження 3.3. *З умов (3.6) випливає (див. Зауваження 1.1, 1.2), що функції J_0, J_{00} є швидко змінними при $t \uparrow \omega$. Тому функція p у зображенні (3.4) не може бути правильно змінною при $t \uparrow \omega$.*

Далі, сформулюємо результат щодо додаткових (до необхідних) умов, при виконанні яких подані у теоремі 3.1 асимптотичні зображення (3.9), (3.10) можуть бути записаними у явному виді.

Теорема 3.2 *Нехай виконуються умови теореми 3.1 і повільно змінні складові L_j $(j = \overline{0, n-1})$ функцій φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ задовольняють умову S. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язку рівняння (0.1) мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) = \nu_{n-1} \left(\tfrac{\gamma J_0(t)}{p(t)}\right)^{n-j-1} \times$$
$$\times \left|\gamma J_0(t) \left|\tfrac{\gamma J_0(t)}{p(t)}\right|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(\nu_j |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{3.11}$$

Якщо $\omega_* \in]a, \omega[$, то друга з умов (3.6) при заміні в ній ω на ω_* виконуватись не буде, оскільки ця границя буде дорівнювати 1. Тому з теореми 3.1 безпосередньо випливає наступний висновок щодо існування сингулярних розв'язків у диференціального рівняння (0.1).

Наслідок 3.1 *Якщо $\omega_* \in]a, \omega[$, функція f задовольняє умову $(RN)_1$ при заміні в ній ω на ω_*, $p(\omega_*) > 0$ і $\gamma \neq 0$, то диференціальне рівняння (0.1) не має сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, 1)$– розв'язків.*

§3.2. Доведення теорем

Доведення теореми 3.1. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$– довільний $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язок диференціального рівняння (0.1). Тоді на підставі означення 1.6 існує $t_1 \in [t_0, \omega[$ таке, що

$$\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \nu_j \ (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Крім того, згідно з властивостями (3.1) цього розв'язку для функцій $z_j(t) = y^{(j)}(t)$ $(j = \overline{0, n-1})$ справджуються умови (3.2) і (3.3). Тому в силу виконання умови $(RN)_1$ для функції f має місце при $t \uparrow \omega$ зображення

$$f\Big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\Big) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t))[1 + o(1)],$$

з якого, враховуючи, що y це розв'язок диференціального рівняння (0.1), одержуємо асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.12}$$

Тут $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ – правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$. Тому вони допускають зображення виду

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}) \tag{3.13}$$

де L_j $(j = \overline{0, n-1})$– повільно змінні функції при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$. Крім того, відповідно до леми 1.2 про властивості повільно змінних функцій існують нормалізовані (неперервно диференційовні) повільно змінні функції $L_{0j} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[\ (j = \overline{0, n-1})$ такі, що

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1,$$
$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0j}(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{3.14}$$

Звідси випливає, що неперервно диференційовні правильно змінні (нормалізовані) функції

$$\varphi_{0j} = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}) \tag{3.15}$$

задовольняють умови

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{\varphi_j(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = 1,$$
$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} \varphi_{0j}(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = \sigma_j \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{3.16}$$

В силу цих умов, (1.25) і перших з співвідношень (3.1)

$$\left(\frac{y^{(k-1)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} \right)' =$$
$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} \left[1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(k-1)}(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(k)}(t) y^{(j)}(t)} \cdot \frac{y^{(j)}(t) \varphi'_{0j}(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} \right] =$$
$$= \frac{y^{(k)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} [\gamma + o(1)] \quad (k = 1, \ldots, n) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.17}$$

З урахуванням цього співвідношеня при $k = n$ перепишемо (3.12) у виді

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' = \alpha_0\gamma p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Інтегруючи дане співвідношення на проміжку від t_1 до t, одержуємо

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = C + \alpha_0\gamma J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

де C- деяка дійсна стала.

У випадку, коли в інтегралі J_0 границя інтегрування $A_0 = a$, $J_0(t) \to +\infty$ при $t\uparrow\omega$ і одержане співвідношення може бути записаним у виді

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha_0\gamma J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.18}$$

Покажемо, що у випадку $A_0 = \omega$, коли $J_0(t) \to 0$ при $t\uparrow\omega$, стала $C = 0$. Припустимо супротивне, що у цьому випадку $C \neq 0$. Тоді

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = C + o(1) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

і в силу (3.12), (3.16)

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = p(t)\left(\frac{\alpha_0}{C} + o(1)\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

звідки випливає, що

$$\ln|y^{(n-1)}(t)| = C_1 + J_0(t)\left(\frac{\alpha_0}{C} + o(1)\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

де C_1- деяка дійсна стала. Однак цього бути не може, оскільки тут ліва частина згідно з означенням 1.6 прямує до нескінченості при $t\uparrow\omega$, а права - до сталої C_1. Отже, при $A_0 = \omega$ також має місце зображення (3.18).

Аналогічно із (3.18) з використанням (3.17) при $k = n-1$ отримуємо, що

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha_0 \gamma^2 J_{00}(t)[1+o(1)] \qquad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.19}$$

Із (3.12), (3.18) і (3.19) з урахуванням першої із умов (3.16) маємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \sim \frac{p(t)}{\gamma J_0(t)}, \quad \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \sim \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому в силу (3.1) справджуються умови (3.6) і згідно з тотожністю

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t) \quad (j = \overline{0, n-2})$$

мають місце асимптотичні зображення (3.9). Крім того, з (3.18) і (3.9) випливає, що виконуються нерівності (3.8).

Справедливість умов (3.7) безпосередньо випливає із (1.24) і асимптотичних співвідношень

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} \sim \frac{p(t)}{\gamma J_0(t)} \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.20}$$

Використовуючи тепер зображення (3.15), асимптотичні співвідношення (3.9) і теорему 1.1 про властивості повільно змінних функцій, знаходимо

$$\varphi_{0j}(y^{(j)}(t)) = |y^{(j)}(t)|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}(t)) \sim$$

$$\sim \left| \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right|^{\sigma_j} \times$$

$$\times L_{0j} \left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \right) \sim$$

$$\sim \left| \frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right|^{(n-j-1)\sigma_j} \left| y^{(n-1)}(t) \right|^{\sigma_j} \times$$

$$\times L_{0j} \left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right) \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу цих співвідношень із (3.18) отримуємо при $t\uparrow\omega$ зображення

$$\frac{|y^{n-1}(t)|^{\gamma}\left|\frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)}\right|^{\mu_n}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}y^{(n-1)}(t)\right)}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma J_0(t)[1+o(1)],$$

з якого з урахуванням перших із співвідношень (3.14) випливає зображення (3.10).

Достатність. Нехай виконуються умови (3.6) - (3.8) і алгебраїчне рівняння (3.5) не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Покажемо, що у даному випадку у рівняння (0.1) існують $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},1)$-розв'язки, що допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (3.9), (3.10) і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Спочатку розглянемо співвідношення

$$\frac{|Y|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y\right)}=Q(t)(1+v_n),\tag{3.21}$$

де $L_{0j}:\Delta_{Y_j}\longrightarrow]0,+\infty[\ \ (j=\overline{0,n-1})$ - неперервно диференційовні повільно змінні при $y^{(j)}\to Y_j$ функції, що задовольняють умови (3.14), які існують в силу леми 1.2 про властивості повільно змінних функцій, і

$$Q(t)=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}.$$

Покладемо

$$d=\frac{1}{2|\gamma|},\qquad \mathbb{R}_d=\{z\in\mathbb{R}\,:\,|z|\le d\},\qquad \mathbb{R}_{\frac12}=\left\{v_n\in\mathbb{R}\,:\,|v_n|\le\frac12\right\}$$

і використовуючи підхід розроблений [24] при розгляді співвідношення (3.11) з цієї роботи, що співвідношення (3.21) однозначно визначає задану на множині $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac12}$, де $t_0\in[a,\omega[$, неперервно диференційовну неявну функцію $Y=Y(t,v_n)$ виду

$$Y(t,v_n)=\nu_{n-1}\,|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z(t,v_n)},\tag{3.22}$$

де функція z така, що

$$|z(t,v_n)| \le d \quad \text{при} \quad (t,v_n) \in [t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.24}$$

Покладаючи в (3.21)

$$Y = \nu_{n-1}\,|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z} \tag{3.25}$$

і потім логарифмуючи отримане при цьому співвідношення, знаходимо, що

$$z = a(t) + b(t,v_n) + Z(t,z), \tag{3.26}$$

де

$$a(t) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\ln Q(t)}{\ln|J_0(t)|} - 1\right), \quad b(t,v_n) = \frac{\ln(1+v_n)}{\gamma\ln|J_0(t)|},$$

$$Z(t,z) = \frac{1}{\gamma\ln|J_0(t)|}\sum_{j=0}^{n-1}\ln L_{0j}\left(\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right).$$

Так як згідно з правилом Лопіталя і першої із умов (3.6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_0^2(t)}{p(t)J_{00}(t)} = 1, \tag{3.27}$$

то в силу нерівностей (3.8), а також умови (3.7)

$$\nu_{n-1}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z} = \nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z} =$$

$$= \nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_0(t)|\left[\frac{1}{\gamma} + z + (n-j-1)\left(\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|} - 1\right)\right]\right) =$$

$$= \nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_0(t)|\left[\frac{1}{\gamma} + z + o(1)\right]\right) =$$

$$= \nu_j\lim_{t\uparrow\omega}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_j \quad (j=\overline{0,n-1}) \quad \text{при} \quad |z| \le d.$$

Тому права частина в (3.26) неперервно диференційовна на множині $[t_1,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}\times\mathbb{R}_d$, де t_1- деяке число з проміжку $[a,\omega[$.

Помічаємо також, що в (3.26)

$$\lim_{t\uparrow\omega} b(t, v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \tag{3.28}$$

і згідно з видом функції a, першої із нерівностей (3.8) і (3.27)

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = \frac{1}{\gamma} \lim_{t\uparrow\omega} \left(\frac{\ln Q(t)}{\ln |J_0(t)|} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{\ln |\gamma|}{\ln |J_0(t)|} + \mu_n \left(\frac{\ln |\gamma J_{00}(t)|}{\ln |J_0(t)|} - 1 \right) \right] = 0. \tag{3.29}$$

Крім того, враховуючи, що

$$Z(t, z) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{\gamma} + z + (n - j - 1) \left(\frac{\ln |\gamma J_{00}(t)|}{\ln |J_0(t)|} - 1 \right) \right] \frac{\ln L_{0j} \left(Y_j(t, z) \right)}{\ln \left(Y_j(t, z) \right)},$$

і

$$\frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Y_j(t, z) L'_{0j} \left(Y_j(t, z) \right)}{L_{0j} \left(Y_j(t, z) \right)},$$

де

$$Y_j(t, z) = \nu_{n-1} \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right)^{n-j-1} |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma} + z},$$

з використанням (3.14), першим твердженням леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій і умови (3.27) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad z \in \mathbb{R}_d. \tag{3.30}$$

Згідно з умовами (3.28)-(3.30) існує число $t_2 \in [t_1, \omega[$ таке, що на множині $[t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \times \mathbb{R}_d$ справджується нерівність

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t, z)| \leq d \tag{3.31}$$

і виконується умова Ліпшиця

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \leq \frac{1}{2} |z_1 - z_2| \text{ при } t \in [t_2, \omega[\text{ і } z_1, z_2 \in \mathbb{R}_d. \tag{3.32}$$

Підібрав таким чином число t_2, позначемо через $\mathbf{B}$ банахів простір неперервних і обмежених на множині $\Omega = [t_2, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функцій $z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ з нормою

$$\|z\| = \sup \left\{ |z(t, v_n)| : (t, v_n) \in \Omega \right\}.$$

Вилучимо з нього підпростір $\mathbf{B}_0$ тих функцій із $\mathbf{B}$, для яких $\|z\| \leq d$, і розглянемо на $\mathbf{B}_0$, обрав поперед довільним чином число $\nu \in (0,1)$, оператор

$$\Phi(z)(t,v_n) = z(t,v_n) -$$
$$-\nu \left[z(t,v_n) - a(t) - b(t,v_n) - Z(t, z(t,v_n)\right]. \tag{3.33}$$

Для будь-якого $z \in \mathbf{B}_0$ згідно з умовою (3.31) маємо

$$|\Phi(z)(t,v_n)| \leq (1-\nu)|z(t,v_n)| + \nu d \leq d \quad \text{при} \quad (t,v_n) \in \Omega.$$

Отже, $\|\Phi(z)\| \leq d$, тобто $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Нехай тепер $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$. Тоді в силу (3.32) при $(t,v_n) \in \Omega$

$$|\Phi(z_1)(t,v_n) - \Phi(z_2)(t,v_n)| \leq$$

$$\leq (1-\nu)|z_1(t,v_n) - z_2(t,v_n)| + \nu |Z(t, z_1(t,v_n)) - Z(t, z_2(t,v_n)| \leq$$
$$\leq (1-\nu)|z_1(t,v_n) - z_2(t,v_n)| + \frac{\nu}{2}|z_1(t,v_n) - z_2(t,v_n)| \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|.$$

Звідси маємо, що

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leq \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|.$$

Таким чином, доведено, що оператор Φ відображає простір $\mathbf{B}_0$ у себе і є на ньому оператором стиску. Тоді відповідно до принципу стислих відображень існує єдина функція $z \in \mathbf{B}_0$ така, що $z = \Phi(z)$. В силу (3.33) ця неперервна на множині Ω функція є єдиним розв'язком рівняння (3.26), який задовольняє умову $\|z\| \leq d$. Із (3.26) з урахуванням цієї умови і (3.28) - (3.30) випливає, що цей розв'язок прямує до нуля при $t \uparrow \omega$ рівномірно за $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Неперервна диференційовність цього розв'язку на множині $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, де t_0- деяке число з проміжку $[t_2, \omega[$, безпосередньо випливає із відомої локальної теореми про існування неявної функції, що визначається співвідношенням (3.26). В силу заміни (3.25) одержаній функції z відповідає неперервно диференційовна на множині $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функція Y виду (3.22), яка є розв'язком рівняння (3.21) і задовольняє при $j=\overline{0,n-1}$ умови

$$\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_j} \text{ при } (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{3.34}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)=Y_j \text{ рівномірно за } v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

Крім того, для цієї функції має місце співвідношення

$$\frac{\gamma(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}\times$$

$$\times\left[(n-j-1)\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)'}{\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}}+\frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}\right]=\frac{\left(J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}\right)'}{J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}},$$

звідки випливає, що

$$\frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}\left[\gamma-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}\right]=$$

$$=\frac{p(t)}{J_0(t)}\left[1+\frac{J_0^2(t)}{p(t)J_{00}(t)}\left(1-\frac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}\right)\left(\mu_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}\right)\right].$$

Тому згідно з умовами (3.6), (3.14), (3.34) і (3.35)

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_0(t)(Y(t,v_n))'_t}{p(t)Y(t,v_n)}=\frac{1}{\gamma},\\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}=\pm\infty \quad \text{рівномірно за} \quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.\end{gathered}\tag{3.36}$$

Тепер з використанням замін

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} [1 + v_{j+1}(t)] \quad (j = \overline{0, n-2}),$$
$$y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(t)), \tag{3.37}$$

і урахуванням того, що функція $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(t)$ при $t \in [t_0, \omega[$ і $v_n(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ задовольняє рівняння

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = Q(t)[1 + v_n(t)],$$

зведемо диференціальне рівняння (0.1) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_i' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} [1 + v_{i+1} - (1 + v_i) g(t, v_1, \dots, v_n) - \\ \qquad - (n - i)(1 - h(t))(1 + v_i)] \quad (i = \overline{1, n-2}), \\ v_{n-1}' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} [1 - (1 + v_{n-1}) g(t, v_1, \dots, v_{n-1}) - \\ \qquad - (1 - h(t))(1 + v_{n-1})], \\ v_n' = \frac{J_0(t)(1+v_n)}{\gamma J_{00}(t)} \left[g(t, v_1, \dots, v_n) \left(\gamma - \sum\limits_{j=0}^{n-1} H_j(t, v_n)\right) - \right. \\ \left. \quad -\gamma(1 - h(t)) \sum\limits_{j=0}^{n-1} (n - j - 1) H_j(t, v_n) - \gamma(h(t) + \mu_n(1 - h(t))) \right], \end{cases} \tag{3.38}$$

де

$$h(t) = \frac{p(t) J_{00}(t)}{J_0^2(t)}, \quad H_j(t, v_n) =$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n) L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)} \quad (j=\overline{0,n-1}),$$

$$g(t,v_1,\dots,v_n)=$$

$$= \frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \frac{f(t,z_0(t,v_1,v_n),z_1(t,v_2,v_n),\dots,z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n),z_{n-1}(t,v_n))}{Y(t,v_n)},$$

$$z_j(t,v_{j+1},v_n)=\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}(1+v_{j+1})Y(t,v_n) \quad (j=\overline{0,n-2}),$$

$$z_{n-1}(t,v_n)=Y(t,v_n).$$

В силу умов (3.34), (3.35) праві частини цієї системи неперервні на множині $[t_*,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де t_*– деяке число з проміжку $[t_0,\omega[$ і $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n : |v_i|\le\frac{1}{2}\ (i=\overline{1,n})\right\}$. Крім того, в силу першої з умов (3.6), а також (3.35) і другої з умов (3.14)

$$\lim_{t\uparrow\omega} h(t)=1$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} H_j(t,v_n)=0\ (j=\overline{0,n-1}) \text{ рівномірно за } v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.39}$$

Далі, одержимо зображення для функції g. Оскільки

$$\frac{(z_j(t,v_{j+1},v_n))'_t}{z_j(t,v_{j+1},v_n)} = (n-j-1)(1-h(t))\frac{J_0(t)}{J_{00}(t)} + \frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)} \quad (j=\overline{0,n-2}),$$

$$\frac{(z_{n-1}(t,v_n))'_t}{z_{n-1}(t,v_n)} = \frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}$$

то згідно з умовами (3.6), (3.35), (3.36) і першої з умов (3.39) рівномірно за $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_{j-1}(t,v_j,v_n)=Y_{j-1} \quad (j=\overline{1,n-1}), \quad \lim_{t\uparrow\omega} z_{n-1}(t,v_n)=Y_{n-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(z_{j-1}(t,v_j,v_n))'_t z_j(t,v_{j+1},v_n)}{z_{j-1}(t,v_j,v_n)(z_j(t,v_{j+1},v_n))'_t}=1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(z_j(t,v_{j+1},v_n)'_t}{z_j(t,v_{j+1},v_n)}=\pm\infty \quad (j=\overline{1,n-2}),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n))'_t z_{n-1}(t,v_n)}{z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n)(z_{n-1}(t,v_n))'_t}=1,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(z_{n-1}(t,v_n))'_t}{z_{n-1}(t,v_n)}=\pm\infty.$$

Тоді, враховуючи, що функція f задовольняє умову $(RN)_1$, з використанням (3.12), теореми 1.1 про властивості повільно змінних функцій, першої з умов (3.14), співвідношення (3.21) і виду функції Q знаходимо

$$f\left(t,z_0(t,v_1,v_n),\dots,z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n),z_{n-1}(t,v_n)\right)=$$

$$=\alpha_0 p(t)[1+r_1(t,v_1\dots,v_n)]\times$$

$$\times\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right)=$$

$$=\alpha_0 p(t)[1+r_2(t,v_1,\dots,v_n)]\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)=$$

$$=\nu_{n-1}\alpha_0 p(t)[1+r_3(t,v_1,\dots,v_n)]\times$$

$$\times\frac{Y(t,v_n)\prod\limits_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod\limits_{j=0}^{n-1}L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}Y(t,v_n)\right)}{|Y(t,v_n)|^{\gamma}}=$$

$$=\frac{p(t)Y(t,v_n)}{\gamma J_0(t)}[1+r_3(t,v_1,\dots,v_n)]\cdot\frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n},$$

де

$$\lim_{\uparrow\omega}r_k(t,v_1,\dots,v_n)=0\ (k=1,2,3)\ \text{рівномірно за}\quad (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Тому функція g допускає зображення виду

$$g(t,v_1,\dots,v_n)=h(t)[1+r_3(t,v_1,\dots,v_n)]\frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n}.$$

В силу цього зображення і (3.39) система дифернціальних рівнянь (3.38) може бути записаною наступним чином

$$\begin{cases} v_i' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_i(t, v_1, \dots, v_n) + 1 + v_{i+1} - \frac{(1+v_i) \prod\limits_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} \right] \\ i = \overline{1, n-2}, \\ \\ v_{n-1}' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_{n-1}(t, v_1, \dots, v_n) + 1 - \frac{(1+v_{n-1}) \prod\limits_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} \right], \\ \\ v_n' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_n(t, v_1, \dots, v_n) - \gamma(1+v_n) + \gamma \prod\limits_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} \right], \end{cases}$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} F_i(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$$

Виділяючи тепер лінійні частини в доданках, що стоять у квадратних дужках після функцій F_i $(i = \overline{1, n})$, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_i' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left(F_i(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} v_k + V_i(v_1, \dots, v_n) \right) \\ i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{3.40}$$

в якій

$$c_{ii} = -1 - \sigma_{i-1}, \quad c_{ii+1} = 1 - \sigma_i,$$

$$c_{ik} = -\sigma_{k-1} \quad \text{при} \quad k \neq i, i+1 \quad (i, k = \overline{1, n-1}),$$

$$c_{in} = 1 \quad (i = \overline{1, n-2}), \quad c_{n-1k} = -\sigma_{k-1} \quad (k = \overline{1, n-2}),$$

$$c_{n-1n-1} = -1 - \sigma_{n-2}, \quad c_{n-1n} = 1, \quad c_{nk} = \gamma\sigma_{k-1} \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

$$c_{nn} = -\gamma, \quad V_i(v_1, \dots, v_n) = -\frac{(1+v_i) \prod\limits_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} -$$

$$-v_n + (1+\sigma_{i-1})v_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} \sigma_{k-1}v_k \quad (i=\overline{1,n-1}),$$

$$V_n(v_1,\dots,v_n) = \gamma \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} - \gamma \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k-1}v_k.$$

Тут

$$V_i(0,\dots,0) = 0 \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\lim_{|v_1|+\dots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_i(v_1,\dots,v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (i,k=\overline{1,n}),$$

і в силу першої з умов (3.6), першої з нерівностей (3.8), а також правила обрання границь інтегрування у функціях J_0, J_{00}

$$\operatorname{sign}\left(\frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)}\right) = \alpha_0\nu_{n-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \int_{t_*}^{t} \frac{J_0(\tau)\,d\tau}{\gamma J_{00}(\tau)} = \pm\infty.$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь (3.40) належить до класу систем, які розглядалися у §2.2 другого розділу роботи. Не важко також перевірити, що, для системи (3.40) характеристичне рівняння $\det[-\rho E] = 0$, де $C = (c_{ik})_{i,k=1}^n$ і E- одинична матриця розміру $n\times n$, має вид (3.5). Згідно з умовами теореми це алгебраїчне рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тому на підставі леми 2.1 система (3.40) має хоча б один розв'язок $(v_i)_{i=1}^n : [t^*,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, де $t^* \in [t_*,\omega[$, що прямує до нуля при $t\uparrow\omega$, причому таких розв'язків існує m- параметрична сім'я, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (3.5) є m коренів (з урахуванням кратних) дійсні частини яких мають знак протилежний знаку числа $\alpha_0\nu_{n-1}$.

Кожному такому розв'язку системи (3.40) в силу замін (3.37) відповідає розв'язок $y : [t^*,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, де $t^* \in [a,\omega[$, диференціального рівняння (0.1), який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (3.9) і

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+o(1)}, \tag{3.41}$$

причому $y^{(n-1)}$ задовольняє при $t \uparrow \omega$, асимптотичне співвідношення

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = Q(t)[1+o(1)],$$

яке згідно з (3.35) і перших із умов (3.14) може бути записаним у виді (3.10). Використовуючи ці зображення, а також умови (3.6)-(3.8) неважко переконатися в тому, що кожний такий розв'язок диференціального рівняння (0.1) є $P_{\omega}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язком.

Теорему повністю доведено.

Доведення теореми 3.2. Припустимо, що диференціальне рівняння (0.1) має $P_{\omega}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$- розв'язок $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$. Тоді в силу теореми 2.1 виконуються умови (3.6)-(3.8) і для даного розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення (3.9), (3.10). Так як функції L_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ задовольняють умову S і згідно з правилом Лопіталя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|}{\ln|J_0(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{1 - \frac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}}{\frac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}} = 0,$$

то з урахуванням (3.6)-(3.8) і (3.41) знаходимо, що

$$L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right) =$$

$$= L_j\left(\nu_j \exp\left[(n-j-1)\ln\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right| + \left(\frac{1}{\gamma} + o(1)\right)\ln|J_0(t)|\right]\right) =$$

$$= L_j\left(\nu_j \exp\left[\left(\frac{1}{\gamma} + o(1)\right)\ln|J_0(t)|\right]\right) = L_j\left(\nu_j e^{[1+o(1)]\ln|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}}\right) =$$

$$= Ł_j\left(\nu_j |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення перепишемо (3.10) у виді

$$|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t) \left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(\nu_j |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)].$$

Звідси випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} \left| \gamma J_0(t) \left| \frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)} \right|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(\nu_j |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)]$$

і тому в силу (3.9) мають місце асимптотичні зображення (3.11).

Зауваження 3.4. *При доведенні теореми 3.1 було показано, що при виконанні умови $(RN)_1$ і $\gamma \neq 0$ для кожного $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язку диференціального рівняння (0.1) мають місце асимптотичні співвідношення (3.20). Тому при перевірці виконання умови $(RN)_1$ можна обмежитись лише розглядом таких функцій $z_j : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_j$ $(j = \overline{0, n-1})$, для яких поряд (3.2), (2.3) справджуються умови*

$$\frac{z_j'(t)}{z_j(t)} = \frac{p(t)}{\gamma J_0(t)} [1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.42}$$

3.3. Приклади.

Спочатку розглянемо диференціальне рівняння (2.38). При цьому будемо припускати, що для деяких $s \in \{1, \dots, l\}$ і $r \in \{l+1, \dots, m\}$ виконуються нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_{sr} \ln |J_{0sr}(t)|} < \frac{\beta_{sr}(\gamma_k - \gamma_s)}{\gamma_{sr}} \tag{3.43}$$

при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$,

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta_{sr} \ln |J_{0sr}(t)|} < \frac{\beta_{sr}(\gamma_k - \gamma_r)}{\gamma_{sr}} \tag{3.44}$$

при $k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}$, де

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj} \ (k = \overline{1, m}), \ \gamma_{sr} = 1 - (\gamma_r - \gamma_s), \ J_{0sr}(t) = \int_{A_{sr}}^{t} \frac{p_s(\tau)\, d\tau}{p_r(\tau)},$$

$$A_{sr} = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int\limits_a^\omega \frac{p_s(\tau)\,d\tau}{p_r(\tau)} = +\infty, \\ \\ \omega, & \text{якщо } \int\limits_a^\omega \frac{p_s(\tau)\,d\tau}{p_r(\tau)} < +\infty, \end{cases} \qquad \beta_{sr} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad A_{sr} = a, \\ -1, & \text{якщо} \quad A_{sr} = \omega. \end{cases}$$

Покажемо, що при цих умовах права частина рівняння (2.38) задовольняє умову RN_1.

Нехай $z_j : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ – довільні неперервно диференційовні функції, які задовольняють умови (3.2), (3.3). Згідно з зауваженням 3.4 (і вказаним вище асимптотичним співвідношенням (3.42)) можна обмежитись розглядом таких з них, для яких мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення

$$\frac{z_j'(t)}{z_j(t)} \sim \frac{\frac{p_s(t)}{p_r(t)}}{\gamma_{sr} J_{0sr}(t)} \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

звідки випливає, що

$$\ln |z_j(t)| = \left(\frac{1}{\gamma_{sr}} + o(1) \right) \ln |J_{0sr}(t)| \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення, а також зображення

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \ \ (k = 1, \dots, m; j = 0, \dots, n-1),$$

де $L_{kj}(y^{(j)}) \ : \ \Delta_{Y_j} \ \longrightarrow]0, +\infty[$– неперервна повільно змінна функція при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, і перше твердження леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій, будемо при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ мати

$$\ln \left(\frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\left((\sigma_{kj}-\sigma_{sj})\ln|z_j(t)|+\ln L_{kj}(z_j(t))-L_{sj}(z_j(t))\right)=\ln p_k(t)-$$

$$-\ln p_s(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\ln|z_j(t)|\left(\sigma_{kj}-\sigma_{sj}+\frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}-\frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}\right)=$$

$$=\ln p_k(t)-\ln p_s(t)+\frac{\ln|J_{0sr}(t)|}{\gamma_{sr}}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sigma_{kj}-\sigma_{sj}+o(1)\right)=$$

$$=|\ln|J_{0sr}(t)||\left(\frac{\ln p_k(t)-\ln p_s(t)}{\beta_{sr}\ln|J_{0sr}(t)|}-\frac{\beta sr}{\gamma_{sr}}\left(\gamma_k-\gamma_s+o(1)\right)\right)\ \text{при}\ t\uparrow\omega.$$

Звідси в силу виконання умови (3.43) випливає, що вираз, який стоїть ліворуч, прямує до $-\infty$ при $t\uparrow\omega$ і тому

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}\right)=0\quad\text{при всех}\quad k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\}.$$

Аналогічно, з використанням нерівностей (3.44) встановлюємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}\right)=0\quad\text{при всіх}\quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

В силу цих граничних співвідношень при $t\uparrow\omega$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}=\frac{\alpha_s p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}[1+o(1)],\tag{3.45}$$

тобто має місце асимптотичне співвідношення (3.4), в якому

$$\alpha_0=\alpha_s\alpha_r,\quad p(t)=\frac{p_s(t)}{p_r(t)},\quad \varphi_j(z_j(t))=\frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)}\quad (j=0,1,\dots,n-1),$$

причому тут φ_j - неперервна правильно змінна при $z_j\longrightarrow Y_j$ функція порядку $\sigma_j=\sigma_{sj}-\sigma_{rj}$ і її повільно змінна складова L_j дорівнює відношенню повільно змінних складових L_{sj} і L_{rj} функцій φ_{sj} і φ_{rj}.

Отже, права частина рівняння (2.38) задовольняє умову $(RN)_1$. Тому у випадку, коли при деяких $s \in \{1, \ldots, l\}$, $r \in \{l+1, \ldots, m\}$ виконуються умови (3.43), (3.44) і відміна від нуля стала $\gamma = \gamma_{sr}$, для рівняння (2.38) справедливі твердження теорем 3.1 і 3.2 про існування та асимптотику $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язків з заміною в цих твердженнях сталих α_0, σ_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ і функцій p, φ_j, L_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ на вказані вище сталі і функції.

Тепер розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)|y|^\sigma \ln(1 + |y|), \tag{3.46}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $\sigma \neq 1$, $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція.

Права частина даного рівняння свідомо задовольняє умову $(RN)_1$ і при цьому повільно змінна при $y \to Y_0$ (Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$) складова правильно змінної функції $\varphi(y) = |y|^\sigma \ln(1 + |y|)$ задовольняє умову (S). Тому для нього можуть бути застосовані обидві теореми 3.1 і 3.2.

Крім того, для цього рівняння

$$\gamma = 1 - \sigma \neq 0, \quad \mu_n = (n-1)\sigma$$

і алгебраїчне рівняння (3.5) має вид

$$(1 + \rho)^n = \sigma.$$

Воно не має коренів з нульовою дійсною частиною і має хоча б один корінь з від'ємною дійсною частиною (оскільки при заміні ρ на $\rho_1 = -\rho$ не будемо мати стандартного полінома Гурвіца відносно ρ_1), а також при $\sigma > 1$ – хоча б один корінь з додатною дійсною частиною.

Тоді на підставі теорем 3.1 і 3.2 для існування у диференціального рівняння (3.46) $P_{+\infty}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{p(t) \int\limits_{A_{00}}^{t} \int\limits_{A_0}^{\tau} p(s)\, ds\, d\tau}{\left[\int\limits_{A_0}^{t} p(s)\, ds\right]^2} = 1, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{tp(t)}{\int\limits_{A_0}^{t} p(s)\, ds} = \pm\infty, \tag{3.47}$$

а також умови

$$\nu_j = \alpha_0, \quad Y_j = \pm\infty \quad (j = \overline{0, n-1}) \tag{3.48}$$

у випадку, коли

$$(1-\sigma)\int\limits_{A_0}^{t} p(s)\, ds > 0 \quad \text{при} \quad t > a, \tag{3.49}$$

і умови

$$\nu_j = \alpha_0(-1)^{n-j}, \quad Y_j = 0 \quad (j = \overline{0, n-1}) \tag{3.50}$$

у випадку, коли

$$(1-\sigma)\int\limits_{A_0}^{t} p(s)\, ds < 0 \quad \text{при} \quad t > a. \tag{3.51}$$

Крім того, для кожного такого розв'язку у випадку (3.49) мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \alpha_0 \left(\tfrac{(1-\sigma)J_0(t)}{p(t)}\right)^{n-j-1+\frac{(n-1)\sigma}{1-\sigma}} \times$$
$$\times |J_0(t)\ln|J_0(t)||^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{3.52}$$

а у випадку (3.51) - асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \alpha_0(-1)^{n-j} \left|\tfrac{(1-\sigma)J_0(t)}{p(t)}\right|^{n-j-1+\frac{(n-1)\sigma}{1-\sigma}} \times$$
$$\times \left|(1-\sigma)|J_0(t)|^{\frac{2-\sigma}{1-\sigma}}\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} [1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{3.53}$$

причому розв'язків з такими зображеннями існує нескінчена кількість, якщо $\sigma > 1$.

Звернемо увагу на те, що тут розв'язки з асимптотичними зображеннями (3.52) є швидко зростаючими, а з асимптотичними зображеннями (3.53) - кнезеровськими (за термінологією І.Т. Кігурадзе).

Висновки до третього розділу

У третьому розділі дисертації досліджувались асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння n-го порядку загального виду (0.1) в особливому випадку, коли $\lambda_0 = 1$. Для розгляду цього випадка було визначено умову $(RN)_1$ на праву частину рівняння, яка допускає провести дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язків диференціального рівняння (0.1). При виконанні цієї умови вперше були отримані необхідні, а також достатні умови існування у диференціального рівняння n-го порядку загального виду (0.1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язків, а також асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Спочатку асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-розв'язків були одержані в неявному виді. Потім були визначені незначні додаткові обмеження, при виконанні яких ці зображення можуть бути поданими у явному виді.

Встановлені у цьому розділі результати було проілюстровано на прикладах двох рівнянь n-го порядку. Один з цих прикладів представляє клас істотно нелінійних диференціальних рівнянь, який раніше в літературі не розглядався. Другий приклад розглянуто з метою порівняння отриманих результатів з відомими результатами І.Т. Кігурадзе.

РОЗДІЛ IV

АСИМПТОТИКА $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ (0.1) У ВИПАДКУ, КОЛИ $\lambda_0 = \pm\infty$

У цьому розділі для диференціального рівняння (0.1) встановлюються необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\lambda_0)$ – розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, а також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно і вирішується питання про кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями. У даному випадку згідно з апріорними асимптотичними властивостями (лема 1.1) кожний $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$ – розв'язок y задовольняє умови

$$y^{(k-1)}(t) \sim \tfrac{[\pi_\omega(t)]^{n-k}}{(n-k)!}\, y^{(n-1)}(t) \quad (k = \overline{1, n-1}),$$
$$y^{(n)}(t) = o\left(\tfrac{y^{(n-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \tag{4.1}$$

з яких випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = n - k \quad (k = \overline{1, n}). \tag{4.2}$$

Із цих умов на підставі леми 1.4 і зауваження 1.2 випливає, що кожний такий розв'язок і всі його похідні до порядку $n-2$ включно є правильно змінними функціями при $t \uparrow \omega$ з відмінними від нуля порядками, а похідна $n-1$-го порядку є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$.

Дослідження у цьому розділі здійснюються у припущенні, що функція f у диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє умову $(RN)_\infty$. У відповідності до (4.1) ця умова визначається наступним чином.

Означення 4.1. *Будемо казати, що функція f у диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє умову $(RN)_\infty$, якщо існує число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, неперервна функція $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при*

$z_j \to Y_j$ $(j=\overline{0,n-1})$ *функції* $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(j=\overline{0,n-1})$ *порядків* σ_j $(j=\overline{0,n-1})$, *такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій* $z_j : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j=\overline{0,n-1})$, *які задовольняють умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = n-j-1 \quad (j=\overline{0,n-1}), \tag{4.3}$$

має місце при $t\uparrow\omega$ *асимптотичне зображення*

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1+o(1)]. \tag{4.4}$$

Функції φ_j $(j=\overline{0,n-1})$ в (4.4) згідно з властивостями правильно змінних функцій (див. §1.2) мають зображення виду

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j=\overline{0,n-1}), \tag{4.5}$$

де L_j– повільно змінна функція при $z_j \to Y_j$, $j=\overline{0,n-1}$.

При виконанні умови $(RN)_\infty$ в даному розділі поряд з позначеннями $\Delta_{Y_0}(b)$ і ν_j $(j=\overline{0,n-1})$, що були уведені на початку другого розділу дисертації, будуть також використовуватись додаткові позначення

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \mu_n = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j (n-j-1), \quad C_n = \prod_{j=0}^{n-2} \left| \frac{1}{(n-j-1)!} \right|^{\sigma_j}.$$

§4.1. Формулювання основних результатів.

Для

формулювання при виконанні умови $(RN)_\infty$ основних результатів даного розділу поряд з уведеними вище позначеннями знадобиться ще наступна допоміжна функція

$$J_{n*}(t) = \int_{A_{n*}}^{t} p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds,$$

де

$$A_{n*} = \begin{cases} t_0, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{t} p(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{t} p(s)|\pi_\omega(s)|^{\mu_n} \prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(s)|^{n-j-1}\right) ds < +\infty, \end{cases}$$

$t_0 \in [a,\omega[$ і L_j– повільно змінна при $z_j \to Y_j$ складова правильно змінної функції φ_j, $j = \overline{0, n-2}$.

Теорема 4.1. *Нехай функція f задовольняє умову $(RN)_\infty$, $\gamma \neq 0$ і повільно змінні функції L_j $(j = \overline{0, n-2})$ з (4.5) задовольняють умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння* (0.1) $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$*- розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності*

$$\nu_j \nu_{n-1} \pi_\omega^{n-j-1}(t) > 0 \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_{n*}(t) > 0 \tag{4.6}$$

в деякому лівому околі ω і умови

$$\nu_j \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_j \ (j = \overline{0, n-2}), \tag{4.7}$$

$$\nu_{n-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_{n-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n*}(t)}{J_{n*}(t)} = 0. \tag{4.8}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y^{(j)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-2}), \tag{4.9}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma C_n J_{n*}(t)[1+o(1)], \tag{4.10}$$

причому таких розв'язків у випадку, коли $\omega = +\infty$ існує n- параметрична сім'я, якщо $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$, і $n-1$- параметрична сім'я, якщо $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma < 0$, а у випадку, коли $\omega < +\infty$ і $\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma > 0$ існує однопараметрична сім'я таких розв'язків.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1 і функція L_{n-1} задовольняє умову S. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$- розв'язку диференціального рівняння* (0.1) *(у випадку їх існування) мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення*

$$y^{(j)}(t) = \frac{\nu_{n-1}[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\times$$
$$\times\left|\gamma C_n J_{n*}(t) L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1+o(1)] \quad (j=\overline{0,n-1}). \qquad (4.11)$$

Зауваження 4.1. *Якщо в теоремі 4.1 в деякому лівому околі ω виконується нерівність $\gamma J_{n*}(t) > 0$, то згідно з першої з умов (4.8) похідна $n-1$-го порядку $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$- розв'язку диференціального рівняння (0.1) буде прямувати до нескінченності при $t \uparrow \omega$. При цьому у випадку, коли $\omega = +\infty$, сам цей розв'язок і його похідні до порядку $n-2$ включно також в силу умов (4.7) прямують до нескінченності при $t \to +\infty$, тобто у даному випадку розв'язок є швидко зростаючим (за термінологією І.Т. Кігурадзе). Якщо ж у теоремі 4.1 виконується нерівність $\gamma J_{n*}(t) < 0$ в деякому лівому околі ω, то похідна $n-1$-го порядку $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$- розв'язку буде прямувати до нуля при $t \uparrow \omega$. При цьому у випадку $\omega = +\infty$ сам розв'язок і його похідні до порядку $n-2$ включно будуть прямувати до нескінченності при $t \to +\infty$.*

Припустимо тепер, що $\omega_* \in]a, \omega[$. Тоді при заміні в інтегралі $J_{n*}(t)$ ω на ω_* і урахуванням того, що $p(\omega_*) = \text{const} > 0$, на підставі другого твердження леми 1.5 і третього твердження леми 1.7 будемо мати

$$\lim_{t\to\omega_*}\frac{(t-\omega_*)J'_{n*}(t)}{J_{n*}(t)} = \mu_n + 1.$$

Тому друга із умов (4.8) при заміні в ній ω на ω_* запишеться у вигляді рівності $\mu_n + 1 = 0$, а умова (4.7) у вигляді $Y_j = 0$ ($j = \overline{0, n-2}$). При цьому будемо також мати

$$J_{n*}(t) = p(\omega_*)\bar{J}_{n*}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega_*,$$

де

$$\bar{J}_{n*}(t) = \int\limits_{\bar{A}_{n*}}^{t} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\omega_* - s)|^{n-j-1}\right)}{\omega_* - s}\, ds,$$

де

$$\bar{A}_{n*} = \begin{cases} t_0, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{\omega_*} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\omega_* - s)|^{n-j-1}\right)}{\omega_* - s}\, ds = +\infty, \\ \omega_*, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{\omega_*} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\omega_* - s)|^{n-j-1}\right)}{\omega_* - s}\, ds < +\infty, \end{cases}$$

$t_0 \in]a, \omega_*[$.

Отже, з теорем 4.1 і 4.2 безпосередньо випливають наступні два наслідки щодо існування сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-розв'язків у диференціального рівняння (0.1).

Наслідок 4.1. *Нехай* $\omega_* \in]a, \omega_0[$, *функція* f *задовольняє умову* $(RN)_\infty$ *при заміні в ній* ω *на* ω_*, $p(\omega_*) > 0$ *і* $\gamma \neq 0$. *Нехай, крім того, повільно змінні функції* L_j $(j = \overline{0, n-2})$ *з* (4.5) *задовольняють умову* S. *Тоді для існування у диференціального рівняння* (0.1) *сингулярних* $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$- *розв'язків необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності*

$$\nu_j = \nu_{n-1}(-1)^{n-j} > 0 \;\; (j = \overline{0, n-2}), \quad \alpha_0\nu_{n-1}\gamma\bar{J}_{n*}(t) > 0 \tag{4.12}$$

в деякому лівому околі ω *і умови*

$$Y_j = 0 \quad (j = \overline{0, n-2}), \quad \mu_n + 1 = 0, \tag{4.13}$$

$$\nu_{n-1} \lim_{t \uparrow \omega_*} |\bar{J}_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_{n-1}. \tag{4.14}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) = \frac{(t-\omega_*)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\, y^{(n-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j=\overline{0,n-2}), \tag{4.15}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{L_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n p(\omega_*)\bar{J}_{n*}(t)[1+o(1)], \tag{4.16}$$

причому у випадку, коли $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma > 0$ *існує однопараметрична сім'я таких розв'язків.*

Наслідок 4.2. *Нехай виконуються умови наслідка 4.1 і функція* L_{n-1} *задовольняє умову* S. *Тоді для кожного сингулярного* $P_{\omega_*}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$*- розв'язку диференціального рівняння* (0.1) *(у випадку їх існування) мають місце при* $t \uparrow \omega_*$ *асимптотичні співвідношення*

$$y^{(j)}(t) = \frac{\nu_{n-1}(t-\omega_*)^{n-j-1}}{(n-j-1)!}\times \tag{4.17}$$

$$\times\left|\gamma C_n p(\omega_*)\bar{J}_{n*}(t)L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|\bar{J}_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1+o(1)]\ (j=\overline{0,n-1}).$$

Зауваження 4.2. *Якщо в умовах наслідку 4.1 виконується нерівність* $\gamma\bar{J}_{n*}(t) < 0$ *в деякому лівому околі* ω_*, *то згідно з умовою (4.14)* $Y_{n-1}=0$, *і тому кожний сингулярний* $P_{\omega_*}(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$*-розв'язок рівняння (0.1) буде кнезеровсьским (за термінологією І.Т. Кігурадзе) сингулярним розв'язком, прямуючим до нуля при* $t \uparrow \omega_*$. *В протилежному випадку, а саме, коли виконується нерівність* $\gamma\bar{J}_{n*}(t) > 0$, *згідно з умовами (4.13) і (4.14) похідна* $n-1$*-го порядку сингулярного розв'язку буде прямувати до нескінченості при* $t \uparrow \omega_*$, *а сам розв'язок і його похідні до порядку* $n-2$ *включно - до нуля.*

§4.2. Допоміжні твердження

При доведенні достатності теореми 4.1 знадобиться один допоміжний відомий результат про умови існування у дійсної квазілінійної системи диференціальних рівнянь зникаючих в особливій точці розв'язків.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_i' = h_i(t)\left[f_i(t, y_1, \dots, y_n) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}y_j + Y_i(t, y_1, \dots, y_n)\right], \\ \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{4.18}$$

в якій $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1, n})$, $h_i : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$– неперервні функції такі, що

$$c_{ii}h_i(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} |h_i(t)|\, dt = +\infty \quad (i = \overline{1, n}), \tag{4.19}$$

$f_i, Y_i : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_c^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$- неперервні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{t \to \omega} f_i(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4.20}$$

рівномірно за $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_c^n$,

$$\lim_{|y_1| + \dots + |y_n| \to 0} \frac{Y_i(t, y_1, \dots, y_n)}{|y_1| + \dots + |y_n|} = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4.21}$$

рівномірно за $t \in [t_0, \omega[$, де

$$-\infty < t_0 < \omega \le +\infty, \ \mathbb{R}_c^n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |y_i| \le c, \quad c > 0\}.$$

З теореми 2.1 роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [28] безпосередньо випливає наступний результат.

Лема 4.1. *Нехай виконуються умови (4.19)–(4.21) і сталі B_i^0 $(i=\overline{1,n})$, що визначаються рекуррентними (починаючи з $i=n$) співвідношеннями*

$$B_i^0=\frac{1}{|a_{ii}|}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|c_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}B_j^0|c_{ij}|\right)\quad(i=\overline{1,n}),\tag{4.22}$$

задовольняють нерівності $B_i^0<1$ $(i=\overline{1,n})$. Тоді система диференціальних рівнянь (4.18) *має хоча б один розв'язок $(y_i)_{i=1}^n:[t_1,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}^n$, де $t_1\in[t_0,\omega[$, який прямує до нуля при $t\uparrow\omega$, причому існує m-параметрична сім'я таких розв'язків, якщо серед функцій $c_{ii}h_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ є m від'ємних функцій на проміжку $[t_0,\omega[$.*

§4.3. Доведення теорем

Доведення теореми 4.1. *Необхідність.* Нехай $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$– $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язок диференціального рівняння (0.1). Тоді в силу умов (1.24) і першої з умов (1.25) означення 1.6 існує $t_1\in[t_0,\omega[$ таке, що на проміжку $[t_1,\omega[$ цей розв'язок і його похідні до порядку $n-1$ включно зберігають знаки, причому $\operatorname{sign} y^{(j)}(t)=\nu_j\quad(j=\overline{0,n-1})$ при $t\in[t_1,\omega[$. Крім того, в силу апріорних властивостей $P_\omega(Y_0,Y_1,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язків мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні співвідношення (4.1), з яких, зокрема, випливає справедливість виконання перших з нерівностей (4.6) на проміжку $[t_1,\omega[$, асимптотичних зображень (4.9) і граничних співвідношень

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)}=n-j-1\quad(j=\overline{0,n-1}).\tag{4.23}$$

З (4.23) ясно, що для функцій $z_j(t)=y^{(j)}(t)$ $(j=\overline{0,n-1})$ виконуються умови (4.3)), і тому згідно з умовою $(RN)_\infty$ і видом рівняння (0.1) одержуємо асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t)=\alpha_0p(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

або з урахуванням (4.1), (4.5), означень μ_n, γ і C_n– асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 C_n p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}|y^{(n-1)}(t)|^{1-\gamma}\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{n-1} L_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{4.24}$$

Оскільки в силу (4.23)

$$\ln|y^{(j)}(t)| = [n-j-1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)| =$$
$$= [1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{n-j-1} \quad (j=\overline{0,n-2}) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

і функції L_j $(j=\overline{0,n-2})$ задовольняють умову S, то

$$L_j\left(y^{(j)}(t)\right) = L_j\left(\nu_j e^{[1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}}\right) =$$
$$= L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)] \quad (j=\overline{0,n-2}) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Тому з (4.24) отримуємо при $t\uparrow\omega$ асимптотичне співвідношення виду

$$\frac{y^{(n)}(t)|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma-1}}{L_n\left(y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_0 p(t) C_n|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}\times$$
$$\times\prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)]. \tag{4.25}$$

Крім того, з вищевикладеного і (1.24), (1.25) ясно, що виконуються умови (4.7) і функції $L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)$ $(j=\overline{0,n-2})$ визначенні на деякому проміжку $[t_2,\omega[$, де $t_2\in[t_1,\omega[$.

Інтегруючи тепер (4.25) на проміжку від t_2 до t, одержимо

$$\int\limits_{y_0}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L_{n-1}(z)} =$$

$$= \alpha_0 C_n\int\limits_{t_2}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)]\,d\tau,$$

де $y_0 = y^{(n-1)}(t_2)$.

Оскільки тут $y^{(n-1)}(t) \longrightarrow Y_{n-1}$ при $t \uparrow \omega$, то невласні інтеграли

$$\int\limits_{y_0}^{Y_{n-1}} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L_{n-1}(z)} \quad \text{і} \quad \int\limits_{t_2}^{\omega} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)\,d\tau$$

або одночасно збігаються, або розбігаються. У випадку, коли вони розбігаються з використанням третього твердження леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій отримуємо співвідношення виду

$$\frac{\nu_{n-1}|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\gamma L_{n-1}\left(y^{(n-1)}(t)\right)}[1+o(1)] = \alpha_0 C_n J_{n*}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де в J_{n*} границя інтегрування A_{n*} дорівнює t_2, а у випадку, коли вони збігаються - співвідношення

$$C_{01} + \int\limits_{Y_{n-1}}^{y^{(n-1)}(t)} \frac{|z|^{\gamma-1}\,dz}{L_{n-1}(z)} = C_{02} +$$

$$+\alpha_0 C_n \int\limits_{\omega}^{t} p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{\mu_n} \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(\tau)|^{n-j-1}\right)[1+o(1)]\,d\tau,$$

де C_{01}, C_{02} - деякі сталі, з якого випливає, що $C_{01} = C_{02}$, і тому з використанням третього твердження леми 1.7 одержуємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{\nu_{n-1}|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{\gamma L_{n-1}\left(y^{(n-1)}(t)\right)}[1+o(1)] = \alpha_0 C_n J_{n*}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де в J_{n*} границя інтегрування A_{n*} дорівнює ω.

З отриманих двох співвідношень ясно, що має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичне зображення (4.10).

В свою чергу з (4.10) випливає виконання другої з нерівностей (4.6) і першої з умов (4.8).

Крім того, з (4.10) і (4.25) маємо, що

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_{n*}(t)}{\gamma J_{n*}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{4.26}$$

Звідси з урахуванням останнього асимптотичного співвідношення (4.1) одержуємо умову (4.8).

Достатність. Нехай виконуються умови (4.6)-(4.8). Доведемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (0.1) має $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язок, який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (4.9), (4.10), а також з'ясуємо питання про кількість розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

Розглянемо спочатку співвідношення

$$\frac{|Y|^\gamma}{L_{0n-1}(Y)}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_{n*}(t)[1+v_n], \tag{4.27}$$

де $L_{0n-1}:\Delta_{Y_{n-1}}\longrightarrow]0,+\infty[$ - неперервно диференційовна повільно змінна функція при $Y\to Y_{n-1}$, що існує згідно з лемою 1.2 про властивості повільно змінних функцій, яка задовольняє умови

$$\lim_{\substack{Y\to Y_{n-1}\\ Y\in\Delta_{Y_{n-1}}}}\frac{L_{n-1}(Y)}{L_{0n-1}(Y)}=1,\quad \lim_{\substack{Y\to Y_{n-1}\\ Y\in\Delta_{Y_{n-1}}}}\frac{YL'_{0n-1}(Y)}{L_{0n-1}(Y)}=0. \tag{4.28}$$

Аналогічно тому, як при доведенні теореми 2.1 у роботі [24], встановлюємо з використанням умов (4.6)-(4.8) і принципу стислих відображень, що співвідношення (4.27) однозначно визначає неперервно диференційовну на множині $[t_0,\omega[\times\{v_n\in\mathbb{R}:|v_n|\le\frac{1}{2}\}$, де t_0- деяке число з проміжку $[a,\omega[$, неявну функцію $Y(t,v_n)$ з наступними властивостями

$$Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_{n-1}}\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[,\quad v_n\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \tag{4.29}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,v_n)=Y_{n-1},$$

$$\tag{4.30}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_n(t)(Y(t,v_n))'_t}{J'_n(t)Y(t,v_n)}=\frac{1}{\gamma}\quad\text{рівномірно за } v_n\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Тепер рівняння (0.1) за допомогою замін

$$\frac{y^{(j-1)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}=\frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j}}{(n-j)!}[1+v_j]\quad (j=\overline{1,n-1}), \tag{4.31}$$

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma}}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t)}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_n(t)[1+v_n], \tag{4.32}$$

і урахуванням того, що тут $y^{(n-1)}(t) = Y(t,v_n)$, зведемо до системи диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} v_j'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[(n-j)v_{j+1}-(n-j)v_j-(1+v_j)G(t,v_1,\dots,v_n)\right], \\ j=0,1,\dots,n-2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.33) \\ v_{n-1}'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-v_{n-1}-(1+v_{n-1})G(t,v_1,\dots,v_n)\right], \\ v_n'=\frac{1+v_n}{\pi_\omega(t)}\left[G(t,v_1,\dots,v_n)\left(\gamma-\frac{Y(t,v_n)(L_{0n-1}(Y(t,v_n))_t'}{L_{0n-1}(Y(t,v_n))}\right)-\frac{\pi_\omega(t)J_{n*}'(t)}{J_{n*}(t)}\right], \end{cases}$$

де

$$G(t,v_1,\dots,v_n)=$$

$$=\frac{\pi_\omega(t)}{Y(t,v_n)}f\left(t,Y_0(t,v_n)(1+v_1),\dots,Y_{n-2}(t,v_n)(1+v_{n-1}),Y(t,v_n)\right),$$

$$Y_j(t,v_n)=\frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!}Y(t,v_n) \quad (j=\overline{0,n-2}).$$

Оскільки для функцій

$$z_j(t,v_n,v_{j+1})=Y_j(t,v_n)(1+v_{j+1})\ (j=\overline{0,n-2}),$$

$$z_{n-1}(t,v_n)=Y(t,v_n)$$

в силу (4.30) і (4.8) виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(z_j(t,v_n,v_{j+1})\right)_t'}{z_j(t,v_n,v_{j+1})}=n-j-1 \quad (j=\overline{0,n-2}),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(z_{n-1}(t,v_n)\right)_t'}{z_{n-1}(t,v_n)}=0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

де $\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}=\left\{(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n\,:\,|v_i|\le\frac{1}{2},\ i=\overline{1,n}\right\}$, то згідно з умовою $(RN)_\infty$, яку задовольняє функція f, одержуємо асимптотичне співвідношення

$$f\left(t,Y_0(t,v_n)(1+v_1),\dots,Y_{n-2}(t,v_n)(1+v_{n-1}),Y(t,v_n)\right)=$$

$$= \alpha_0 p(t)\varphi_{n-1}(Y(t,v_n))[1 + r_1(t,v_1,\dots,v_n)]\times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-2} \varphi_j \left(\frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} Y(t,v_n)(1+v_{j+1}) \right),$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t,v_1,\dots,v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Звідси з урахуванням того, що мають місце зображення (4.5), виконуються умови (4.30)), (4.29), (4.8)) і функції L_j ($j = \overline{0, n-2}$) задовольняють умову S, а L_{n-1} - першу з умов (4.28), отримуємо

$$f\left(t, Y_0(t,v_n)(1+v_1),\dots,Y_{n-2}(t,v_n)(1+v_{n-1}), Y(t,v_n)\right) =$$

$$= \alpha_0 C_n p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n}[1 + r_1(t,v_1,\dots,v_n)]\times$$
$$\times |Y(t,v_n)|^{1-\gamma} L_{n-1}\left(Y(t,v_n)\right) \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} L_j\left(Y_j(t,v_n)(1+v_{j+1})\right) =$$
$$= \alpha_0 C_n p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_n} |Y(t,v_n)|^{1-\gamma} L_{0n-1}\left(Y(t,v_n)\right)[1 + r_2(t,v_1,\dots,v_n)]\times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{n-j-1}\right)|1+v_{j+1}|^{\sigma_j} = \alpha_0 C_n |Y(t,v_n)|^{1-\gamma}\times$$

$$\times L_{0n-1}(Y(t,v_n)) J'_{n*}(t)[1 + r_2(t,v_1,\dots,v_n)] \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j},$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t,v_1,\dots,v_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Якщо, крім того, врахувати, що функція $Y = Y(t,v_n)$ задовольняє рівність (4.27) і умову (4.25), то одержимо для функції G представлення

$$G(t,v_1,\dots,v_n) = \frac{\pi_\omega(t) J'_{n*}(t)}{J_{n*}(t)} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{\gamma(1+v_n)}[1 + r_2(t,v_1,\dots,v_n)].$$

В силу цього виду функції G, умови (4.8), властивостей (4.29), (4.30) функції Y, а також другої з властивостей (4.28), система диференціальних рівнянь (4.33) має наступний вид

$$\begin{cases} v_j' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[F_j(t,v_1,\dots,v_n) + (n-j)v_{j+1} - (n-j)v_j\right], \\ j = 0,1,\dots,n-2, \\ \\ v_{n-1}' = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[F_{n-1}(t,v_1,\dots,v_n) - v_{n-1}\right], \\ \\ v_n' = \frac{J_n'(t)}{J_n(t)}\left[F_n(t,v_1,\dots,v_n) - v_n + \sum\limits_{j=0}^{n-2}\sigma_{j+1}v_j + V(v_1,\dots,v_{n-1})\right], \end{cases} \tag{4.34}$$

де функції F_j $(j=\overline{1,n})$ неперервні на множині $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$ і такі, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} F_j(t,v_1,\dots,v_n) = 0 \quad (j=\overline{1,n}) \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac12},$$

а V- функція виду

$$V(v_1,\dots,v_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j} - 1 - \sum_{j=0}^{n-2}\sigma_j v_{j+1},$$

що задовольняє умови

$$V(0,\dots,0)=0, \quad \frac{\partial V(0,\dots,0)}{\partial v_j} = 0 \quad (j=\overline{1,n-1}).$$

Ця система за допомогою додаткового перетворення

$$v_j(t) = \delta y_j(t) \quad (j=\overline{1,n-1}), \quad v_n(t) = y_n(t), \tag{4.35}$$

де стала $\delta>0$ обрана так, щоб виконувалась нерівність

$$0 \le \delta\sum_{j=0}^{n-2}|\sigma_j| < 1,$$

зводиться до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{1}{\delta}F_j(t,\delta y_1,\dots,\delta y_{n-1},y_n)+(n-j)y_{j+1}-(n-j)y_j\right], \\ j=0,1,\dots,n-2, \\ \\ y'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{1}{\delta}F_{n-1}(t,\delta y_1,\dots,\delta y_{n-1},y_n)-y_{n-1}\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.36) \\ y'_n = \frac{J'_n(t)}{J_n(t)}\Bigg[F_n(t,\delta y_1,\dots,\delta y_{n-1},y_n)-y_n+\delta\sum\limits_{j=0}^{n-2}\sigma_{j+1}y_j+ \\ \\ \qquad + V(\delta y_1,\dots,\delta y_{n-1})\Bigg]. \end{cases}$$

Одержана система диференціальних рівнянь (4.36) є системою диференціальних рівнянь (4.18), в якій функції

$$h_i(t)=\frac{1}{\pi_\omega(t)} \quad (i=\overline{1,n-1}, \quad h_n(t)=\frac{J'_{n*}(t)}{J_{n*}(t)}$$

задовольняють умови (4.19), а функції

$$f_(t,y_1,\dots,y_n)=F_i(t,y_1,\dots,y_n), \quad Y_i(t,y_1,\dots,y_n)=0 \quad (i=\overline{1,n-1}),$$

$$Y_i(t,y_1,\dots,y_n)=V(\delta y_1,\dots,\delta y_{n-1})$$

задовольняють умови (4.20) і (4.21) в силу умов на функції F_i $(i=\overline{1,n})$ і V. Крім того, сталі B_i^0 $(i=\overline{1.n})$, що визначаються формулами (4.22), в розглядаємому випадку мають вид

$$B_n^0=\delta\sum_{j=0}^{n-2}|\sigma_j|<1, \quad B_i^0=0 \quad (i=\overline{1,n-1}).$$

Тому на підставі леми 4.1 система диференціальних рівнянь (4.36) має хоча б один розв'язок $(y_j)_{j=1}^n : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_1\in[t_0,\omega[)$, що прямує до нуля при $t\uparrow\omega$. Більш того, з даної леми випливає, що при $\omega=+\infty$ існує n-параметрична сім'я таких розв'язків у випадку коли $J_{n*}(t)>0$ при $t\in\,]t_0,\omega[$, тобто з урахуванням другої з умов (4.6), коли виконується нерівність

$\alpha_0\nu_{n-1}\gamma > 0$, і $n-1$- параметрична сім'я - у випадку, коли $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma < 0$, а при $\omega < +\infty$ існує однопараметрична сім'я зникаючих в точці ω розв'язків у випадку, коли $\alpha_0\nu_{n-1}\gamma > 0$. Кожному такому розв'язку системи диференціальних рівнянь (0.1) в силу замін (4.31), (4.32) і (4.35) відповідає $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язок $y:[t_1,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ диференціального рівняння (0.1), для якого мають місце асимптотичні зображення (4.9) і

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^\gamma}{L_{0n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_n(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Враховуючи першу з умов (4.28), помічаємо, що остання з асимптотичних формул може бути записана у вигляді (4.10). Теорему повністю доведено.

Доведення теореми 4.2. Нехай диференціальне рівняння (0.1) має $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$- розв'язок $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$. Тоді згідно з теоремою 4.1 виконуються умови (4.6)–(4.8) і для цього розв'язку мають місце асимптотичні співвідношення (4.9), (4.10). Крім того, як було доведено в першій частині цієї теореми, для даного розв'язку має місце також асимптотичне співвідношення (4.26), з якого випливає, що

$$\ln|y^{(n-1)}(t)| = [1+o(1)]\ln|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Тоді, враховуючи, що функція L_{n-1} задовольняє умову S, будемо мати

$$L_{n-1}(y^{(n-1)}(t)) = L_{n-1}\left(\nu_{n-1}e^{\ln|y^{(n-1)}|}\right) =$$

$$= L_{n-1}\left(\nu_{n-1}e^{[1+o(1)]\ln|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}}\right) =$$

$$= L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Використовуючи це асимптотичне співвідношення перепишемо (4.10) у вигляді

$$|y^{(n-1)}(t)|^\gamma = \alpha_0\nu_{n-1}\gamma C_n J_n(t) L_{n-1}\left(\nu_{n-1}|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega,$$

звідки випливає, що

$$y^{(n-1)}(t) = \nu_{n-1} \left| \gamma C_n J_{n*}(t) L_{n-1} \left(\nu_{n-1} |J_{n*}(t)|^{\frac{1}{\gamma}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma}} [1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Тому з (4.9) і (4.10) отримуємо явні асимптотичні співвідношення (4.11). Теорему доведено.

§4.4. Приклади

Спочатку розглянемо клас істотно нелінійних диференціальних рівнянь (2.28).

Припустимо, що для деяких $s \in \{1, \ldots, l\}$ і $r \in \{l+1, \ldots, m\}$ виконуються нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)(\sigma_{sj} - \sigma_{kj}) \tag{4.37}$$

при $k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}$, нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (n-j-1)(\sigma_{rj} - \sigma_{kj}) \tag{4.38}$$

при $k \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$, де

$$\beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

і покажемо, що у даному випадку права частина рівняння (2.28) задовольняє умову $(RN)_\infty$.

Нехай $z_j : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$ - довільні функції, що задовольняють умови (4.3). В силу другої з цих умов

$$\ln |z_j(t)| = [n-j-1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

З використанням цих асимптотичних співвідношень, першої з умов (4.3), зображень

$$\varphi_{kj}(z_j) = |z_j|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1},\ k = \overline{1, m}),$$

де $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ - повільно змінні функції при $z_j \to Y_j$, а також твердженням 1) леми 1.7, для $k \in \{1,\dots,l\}$ знаходимо

$$\ln \frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))} = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}[(\sigma_{kj}-\sigma_{sj})\ln|z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - \ln L_{sj}(z_j(t))] =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\ln|z_j(t)|\left(\sigma_k j - \sigma_{sj} + \frac{LnL_{kj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln|z_j(t)|}\right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\ln|z_j(t)|\,(\sigma_{kj}-\sigma_{sj}+o(1)) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln|\pi_\omega(t)|\sum_{j=0}^{n-1}[(n-j-1)(\sigma_{kj}-\sigma_{sj})+o(1)] =$$

$$= \beta\ln|\pi_\omega(t)|\left(\frac{p_k(t)-p_s(t)}{\beta\ln|\pi_\omega(t)|} + \beta\sum_{j=0}^{n-1}(n-j-1)(\sigma_{kj}-\sigma_{sj}+o(1)\right)$$

при $t\uparrow\omega$. Тут згідно з нерівністю (4.37) права частина прямує до $-\infty$ при $t\uparrow\omega$ і тому

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\}.$$

Аналогічним чином з використанням нерівностей (4.38) встановлюємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))} = 0 \quad \text{при} \quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

В силу цих граничних співвідношень одержуємо зображення

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum\limits_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega,$$

тобто має місце асимптотичне зображення (4.4), в якому

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_s}{\alpha_r},\ p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t))}\ (j = \overline{0, n-1}). \tag{4.39}$$

Тут $\varphi_j(z_j)$ згідно з властивостями правильно змінних функцій є правильно змінною функцією порядку

$$\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj} \quad (j = \overline{0, n-1}) \tag{4.40}$$

при $z_j \to Y_j$, причому її повільно змінна складова є функцією виду

$$L_j(z_j) = \frac{L_{sj}(z_j)}{L_{rj}(z_j)} \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{4.41}$$

Таким чином, права частина рівняння (2.28) задовольняє умову $(RN)_\infty$.

Тому у випадку, коли для деяких $s \in \{1, \dots, l\}$ і $r \in \{l+1, \dots, m\}$ виконуються нерівності (4.37), (4.38) і при цьому стала $\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1}(\sigma_{sj} - \sigma_{rj})$ не дорівнює нулю, для рівняння (2.28) справедливі твердження теорем 4.1 і 4.2 (а також твердження наслідків 4.1 і 4.2), у яких замість α_0, σ_j $(j = \overline{0, n-1})$, p і L_j $(j = \overline{0, n-1})$ треба обрати їх вирази з формул (4.39) - (4.41).

Далі розглянемо диференціальне рівняння (3.46). Це рівняння свідомо задовольняє умову $(RN)_\infty$ і повільно змінна при $y \to Y_0$ складова його нелінійності $\varphi(y) = |y|^\sigma \ln(1+|y|)$ задовольняє умову (S). При цьому маємо

$$\omega = +\infty, \quad \gamma = 1 - \sigma \neq 0, \quad \mu_n = (n-1)\sigma,$$

$$J_{n*}(t) = \int\limits_{A_{n*}}^{t} p(s) s^{(n-1)\sigma} \ln\left(1 + s^{n-1}\right) ds.$$

Тому згідно з теоремами 4.1 і 4.2 рівняння (3.46) має $P_{+\infty}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язки тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tJ'_{n*}(t)}{J_{n*}(t)}=0,$$

$$\nu_{j-1}=\nu_{n-1}\quad (j=\overline{1,n-1}),\quad \alpha_0\nu_{n-1}(1-\sigma)J_{n*}(t)>0 \text{ при } t>a>0,$$

$$Y_{j-1}=\pm\infty\quad (j=\overline{1,n}),\quad Y_{n-1}=\nu_{n-1}\lim_{t\to+\infty}|J_{n*}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j-1)}(t)=\frac{\nu_{n-1}t^{n-j}}{(n-j)!}\,|(1-\sigma)C_nJ_{n*}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,[1+o(1)]\quad (j=\overline{1,n}),$$

причому існує n параметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями, якщо $\alpha_0\nu_{n-1}(1-\sigma)>0$ і $n-1$ параметрична сім'я, якщо $\alpha_0\nu_{n-1}(1-\sigma)<0$.

Звернемо увагу на те, що у випадку, коли $(1-\sigma)J_{n*}(t)>0$ при $t>a$, такі розв'язки (за термінологією І.Т. Кігурадзе) є швидко зростаючими, якщо $\alpha_0=1$, і швидко спадаючими, якщо $\alpha_0=-1$. В протилежному випадку похідні $n-1$-го порядку таких розв'язків прямують до нуля при $t\to+\infty$, а самі розв'язки та їх похідні до порядку $n-2$ включно – до нуля.

Тепер, обрав довільним чином число $\omega_*>a$, з'ясуємо з використанням наслідків 4.1 і 4.2 питання про умови існування і асимптотику сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язків у диференціального рівняння (3.46). Згідно з цими наслідками для існування таких розв'язків необхідно і достатньо, щоб $(n-1)\sigma=-1$ (тобто $\sigma=-\frac{1}{n-1}$) і виконувались умови

$$\nu_j=\nu_{n-1}(-1)^{n-j}>0\ \ (j=\overline{0,n-2}),$$

$$\alpha_0\nu_{n-1}\bar J_{n*}(t)>0\quad \text{в деякому лівому околі } \omega_*$$

$$Y_{j-1}=0\quad (j=\overline{1,n-1}),\quad \nu_{n-1}\lim_{t\uparrow\omega_*}|\bar J_{n*}(t)|=Y_{n-1},$$

де
$$\bar{J}_{n*}(t) = \int\limits_{\bar{A}_{n*}}^{t} \frac{\ln\left(1 + (\omega_* - s)^{n-1}\right)}{\omega_* - s}\, ds,$$
де
$$\bar{A}_{n*} = \begin{cases} t_0, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{\omega_*} \frac{\ln\left(1+(\omega_*-s)^{n-1}\right)}{\omega_*-s}\, ds = +\infty, \\ \omega_*, & \text{якщо } \int\limits_{t_0}^{\omega_*} \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-2} L_j\left(\nu_j|\omega_*-s)|^{n-j-1}\right)}{\omega_*-s}\, ds < +\infty, \end{cases}$$
$t_0 \in]a, \omega_*[$.

Тут
$$\bar{J}_{n*}(t) = -\frac{(\omega_* - t)^{n-1}}{n-1}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega_*$$
і тому
$$Y_{n-1} = 0, \quad \nu_{n-1} = -\alpha_0.$$
Отже при $\omega_* > a$ для існування у диференціального рівняння (3.46) сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-розв'язків необхідно і достатньо, щоб $\sigma = -\frac{1}{n-1}$ і виконувались умови
$$Y_{j-1} = 0, \quad \nu_{j-1} = (-1)^{n-j}\alpha_0 \quad (j = \overline{1, n}).$$
Більш того, згідно з наслідками 4.1 і 4.2 для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega_*$ асимптотичні зображення
$$y^{(j-1)}(t) = \frac{(-1)^{n-j}\alpha_0}{(n-j)!} \left| \frac{nC_n p(\omega_*)}{(n-1)^2} \right|^{\frac{n-1}{n}} \times$$
$$\times (\omega_* - t)^{n-j+\frac{(n-1)^2}{n}}[1 + o(1)] \ (j = \overline{1, n}).$$

Такий розв'язок є кнезеровським сингулярним розв'язком (за термінологією І.Т. Кігурадзе) диференціального рівняння (3.46).

Висновки до четвертого розділу

У четвертому розділі дисертації було визначено умову $(RN)_\infty$ на праву частину диференціального рівняння (0.1), при виконанні якої виявилось можливим дослідити питання про умови існування і асимптотику $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-розв'язків цього рівняння.

При виконанні умови $(RN)_\infty$ в даному розділі були отримані необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-розв'язків у диференціального рівняння (0.1) і встановлені асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ у неявному виді для цих розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно, а також з'ясовано питання про кількість таких розв'язків. Крім того, були визначені додаткові умови, при виконанні яких отримані асимптотичні зображення можуть бути поданими у явному виді. З урахуванням того, що ω може бути не тільки нескінченим, але і скінченим, з основних результатів були одержані наслідки про умови існування і асимптотику сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$-розв'язків.

Результати даного розділу проілюстровано з метою повного опису на прикладах класів істотно нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, які розглядались у попередніх двох розділах.

РОЗДІЛ V

АСИМПТОТИКА $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ (0.1) У ВИПАДКАХ, КОЛИ $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = \overline{1, n-1})$

Останній п'ятий розділ дисертації присвячений дослідженню асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\lambda_0)$ – розв'язків диференціального рівняння (0.1) у решті з можливих випадків, а саме, коли $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = \overline{1, n-1})$. Такі розв'язки є найбільш складними при їх дослідженні.

Згідно з апріорними асимптотичними властивостями (лема 1.1) кожний $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язок y при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!} y^{(i-1)}(t) \ (k = \overline{1, i-1}),^{1} \tag{5.1}$$

$$y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \tag{5.2}$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i} \frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}} y^{(i)}(t) \quad (k = \overline{i+1, n}), \tag{5.3}$$

причому у випадку, коли $i = n-1$, співвідношення (5.3) має місце лише при додатковій умові існування скінченої, або рівної $\pm\infty$ границі $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

З цих умов, зокрема, випливає що для такого розв'язку мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{5.4}$$

Із (5.4) на підставі леми 1.4 і зауваження 1.2 ясно, що кожний такий розв'язок і всі його похідні до порядку $n-1$ включно, окрім похідної $i-1$-го порядку є правильно змінними при $t \uparrow \omega$ функціями з відмінними від нуля порядками, а похідна $i-1$-го порядку є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$.

[1] При $i = 1$ ці співвідношенні відсутні.

Дослідження у цьому розділі здійснюється у припущенні, що функція f у диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє при деякому $i \in \{1, \dots, n-1\}$ умову $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$. У відповідності до (5.1) - (5.3) ця умова визначається наступним чином.

Означення 5.1. *Будемо казати, що функція f в диференціальному рівнянні (0.1) задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ для деякого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, якщо існує число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, неперервна функція $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при $z_j \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_j : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = \overline{0, n-1})$, які задовольняють умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{5.5}$$

має місце асимптотичне при $t \uparrow \omega$ зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1 + o(1)]. \tag{5.6}$$

Функції φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ в (5.6) згідно з властивостями правильно змінних функцій (див. §1.2) мають зображення виду

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{5.7}$$

де L_j– повільно змінна функція при $z_j \to Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$.

При виконанні для деякого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ умови $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ в даному розділі поряд з позначеннями $\Delta_{Y_0}(b)$ і ν_j $(j = \overline{0, n-1})$, що були уведені на початку другого розділу дисертації, будуть також використовуватись наступні додаткові позначення:

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \quad \gamma_i = 1 - \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j,$$

$$\mu_i = n - i - 1 + \sum_{j=0}^{i-2} \sigma_j (i - j - 1) - \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_j (j - i),$$

$$C_i = \frac{1}{(n-i)!} \prod_{j=0}^{i-1} [(i-j-1)!]^{-\sigma_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} [(j-i)!]^{\sigma_j}.$$

§5.1. Формулювання основних результатів

Для формулювання при виконанні для деякого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ умови $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ основних результатів даного розділу поряд уведеними вище позначеннями знадобляться ще наступні допоміжні функції

$$J_i(t) = \int_{A_i}^{t} p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(s)|^{i-j-1} \right) ds,$$

$$J_{ii}(t) = \int_{A_{ii}}^{t} |J_i(s)|^{\frac{1}{\gamma_i}} ds,$$

де кожна з границь інтегрування A_i, A_{ii} обирається рівною точці $a_0 \in [a, \omega[$ (праворуч від якої, тобто при $t \in [a_0, \omega[$ підінтегральна функція неперервна), якщо при цьому значенні границі інтегрування відповідний інтеграл прямує до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, і рівним ω, якщо при такому значенні границі інтегрування він прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Теорема 5.1. *Нехай $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, функція f задовольняє умову $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$, виконується нерівність $\gamma\gamma_i \neq 0$ і функції L_j при всіх $j \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{i-1\}$ задовольняють умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння (0.1) $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язків (для яких у частинному випадку $i = n-1$ існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$) необхідно щоб виконувались нерівності*

$$\nu_j \nu_{j-1} (i-j) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при всіх } j \in \{1, \ldots, n-1\} \setminus \{i\}, \tag{5.8}$$

$$\nu_i \nu_{i-1} \gamma \gamma_i J_{ii}(t) > 0, \quad \nu_i \alpha_0 \gamma_i (-1)^{n-i-1} \pi_\omega^{n-i-1}(t) J_i(t) > 0 \tag{5.9}$$

в деякому лівому околі ω, а також умови

$$\nu_{j-1}\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{i-j}=Y_{j-1}\quad \text{при всех}\quad j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}, \tag{5.10}$$

$$\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}=Y_{i-1}, \tag{5.11}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_i'(t)}{J_i(t)}=-\gamma_i,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_{ii}'(t)}{J_{ii}(t)}=0. \tag{5.12}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y^{(j-1)}(t)=\frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)]\quad (j=1,\dots,i-1), \tag{5.13}$$

$$y^{(j)}(t)=(-1)^{j-i}\frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}}\cdot\frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)]\ \ (j=i,\dots,n-1), \tag{5.14}$$

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma}}{L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))}=|\gamma_i C_i|\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i}[1+o(1)]. \tag{5.15}$$

В даній теоремі асимптотичне зображення для похідної $i-1$-го порядку $P_\omega\left(Y_0,\dots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язку подано в неявному виді. Вкажемо додаткові до (5.8) - (5.12) обмеження, при виконанні яких асимптотичне зображення (5.15) може бути записаними у явному виді.

Теорема 5.2. *Нехай виконуються умови теореми 5.1 і, крім того, функція L_{i-1} задовольняє умову S. Тоді для кожного $P_\omega\left(Y_0,\dots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язку диференціального рівняння (0.1) (для якого у частинному випадку $i=n-1$ існує скінчена або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$) у випадку їх існування мають місце при $t\uparrow\omega$ поряд з асимптотичними зображеннями (5.13), (5.14)) наступне асимптотичне зображення для похідної $i-1$ порядку*

$$y^{(i-1)}(t)=\nu_{i-1}|\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma}}\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma}}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)]. \tag{5.16}$$

Питання про фактичне існування $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язків у диференціального рівняння (0.1), а також про їх кількість вирішується в наступній теоремі.

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови теореми 5.1 і поряд з необхідними умовами (5.8) - (5.12) алгебраїчне відносно ρ рівняння*

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m-\rho) + \sigma_i = \frac{1}{(n-i)!} \prod_{m=1}^{n-i} (m-\rho) \tag{5.17}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у диференціального рівняння (0.1) існує хоча б один $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язок з асимптотичними при $t \uparrow \omega$ зображеннями (5.13) - (5.15), причому таких розв'язків у випадку, коли $\omega = +\infty$ існує $l+i$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ і $l+i-1$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а у випадку, коли $\omega < +\infty$ - існує $n-i-l+1$- параметрична сім'я таких розв'язків, якщо виконується нерівність $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ і $n-i-l$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, де l- число коренів (з урахуванням кратних) рівняння (5.17) *з від'ємною дійсною частиною.*

Зауваження 5.1. *Аналогічно тому, як у зауважені 2.1, легко довести, що алгебраїчне рівняння (5.17)) свідомо не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо виконується нерівність $\sum\limits_{j=i}^{n-1} |\sigma_j| \leq 1$. Крім того, звернемо увагу на те, що при $i = n-1$ рівняння (5.17) має вид*

$$\sigma_{n-1} = 1 - \rho$$

і тому згідно з умовою $\gamma \gamma_{n-1} \neq 0$ не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Припустимо тепер, що $\omega_* \in]a, \omega[$. Тоді при заміні в ітегралі J_i ω на ω_* і урахуванням того, що $p(\omega_*) = \text{const} > 0$, на підставі другого твердження леми 1.5 і третього твердження леми 1.7 будемо мати

$$\lim_{t\to\omega_*}\frac{(t-\omega_*)J_i'(t)}{J_i(t)}=\mu_i+1.$$

Тому перша із умов (5.12) при заміні в ній ω на ω_* запишеться у вигляді рівності $\mu_i+1=-\gamma_i$ і при цьому будемо мати, що

$$J_i(t)=\frac{p(\omega_*)}{\gamma_i}(\omega_*-t)^{-\gamma_i}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1}L_j\left(\nu_j(\omega_*-s)^{i-j-1}\right)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega.$$

Тоді друга з умов (5.12) буде свідомо виконуватись, а умови (5.8) - (5.11) запишуться наступним чином

$$\nu_{j-1}=(-1)^{i-j-1}\nu_{i-1} \text{ при } j=\overline{1,i-1}, \tag{5.18}$$

$$\nu_{j-1}=\alpha_0 \text{ при } j=\overline{i,n-1} \tag{5.19}$$

$$\alpha_0\nu_{i-1}\gamma\gamma_i J_{ii}(t)>0 \text{ при } t\in]a,\omega_*[,\ \alpha_0\nu_i>0, \tag{5.20}$$

$$Y_{j-1}=0 \text{ при } j=\overline{1,i-1},\ Y_{j-1}=\pm\infty \text{ при } j=\overline{i+1,n-1}, \tag{5.21}$$

$$Y_{i-1}=\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}. \tag{5.22}$$

Отже, з теорем 5.1 - 5.3 безпосередньо випливають наступні три наслідки щодо існування сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язків у диференціального рівняння (0.1).

Наслідок 5.1. *Нехай $\omega_*\in]a,\omega_0[$, функція f для деякого $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ задовольняє умову $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ при заміні в ній ω на ω_*, $p(\omega_*)>0$ і $\gamma\gamma_i\neq 0$. Нехай, крім того, повільно змінні функції L_j при всіх $j\in\{0,\ldots,n-1\}\setminus\{i-1\}$ задовольняють умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння (0.1) сингулярних $P_{\omega_*}\left(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язків (для яких, якщо $i=n-1$, існує скінчена, або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega_*}\frac{(t-\omega_*)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$) необхідно, щоб $\mu_i+1+\gamma_i=0$ і виконувались умови (5.18)*

- *(5.22). Більш того, для кожного такого розв'язку мають при* $t \uparrow \omega_*$ *асимптотичні зображення*

$$y^{(j-1)}(t) = (-1)^{i-j} \tfrac{(\omega_*-t)^{i-j}}{(i-j)!} \, y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 1, \ldots, i-1), \qquad (5.23)$$

$$y^{(j)}(t) = \tfrac{(j-i)!}{(\omega_*-t)^{j-i}} \cdot \tfrac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \, y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = i, \ldots, n-1), \qquad (5.24)$$

$$\tfrac{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma}}{L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left| \tfrac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1+o(1)]. \qquad (5.25)$$

Наслідок 5.2. *Нехай виконуються умови наслідка 5.1 і функція* L_{i-1} *задовольняє умову* S*. Тоді для кожного сингулярного* $P_{\omega_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \pm\infty)$*- розв'язку диференціального рівняння* (0.1) *(для якого у частинному випадку* $i = n-1$ *існує скінчена або рівна* $\pm\infty$ *границя* $\lim\limits_{t\uparrow\omega_*} \frac{(t-\omega_*)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$*) у випадку їх існування мають місце при* $t \uparrow \omega_*$ *поряд з асимптотичними зображеннями (5.23), (5.24)) наступне асимптотичне зображення для похідної* $i-1$ *порядку*

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \right) [1+o(1)]. \qquad (5.26)$$

Наслідок 5.3. *Нехай виконуються умови наслідка 5.1 і поряд з рівністю* $\mu_i + 1 + \gamma_i = 0$*, а також умовами (5.18) - (5.22) алгебраїчне відносно* ρ *рівняння (5.17) не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у диференціального рівняння (0.1) існує хоча б один сингулярний* $P_{\omega_*}\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$*- розв'язок з асимптотичними при* $t \uparrow \omega_*$ *зображеннями (5.23) - (5.25), причому таких розв'язків існує* $n-i-l+1$*- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність* $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ *і* $n-i-l$*- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність* $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$*, де* l*- число коренів (з урахуванням кратних) рівняння* (5.17) *з від'ємною дійсною частиною.*

Звернемо увагу на те, що в (5.25) і (5.26)

$$J_{ii}(t) = \left|\frac{p(\omega_*)}{\gamma_i}\right|^{\frac{1}{\gamma_i}} \int\limits_{A_{ii}}^{t} \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i-1}}^{n-1} L_j^{\frac{1}{\gamma_i}}\left(\nu_j(\omega_*-s)^{i-j-1}\right)}{\omega_*-s}\, ds[1+o(1)]$$

при $t \uparrow \omega_*$.

§5.2. Допоміжні твердження

При доведенні теореми 5.3 буде використаний один відомий результат про умови існування у дійсної квазілінійної системи диференціальних рівнянь зникаючих в особливій точці розв'язків.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_i' = h(t)\left[f_i(t, y_1, \dots, y_n) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}y_j + Y_i(t, y_1, \dots, y_n)\right], \\ \\ i = \overline{1, n-1}, \\ \\ y_n' = h_n(t)\left[f_n(t, y_1, \dots, y_n) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{nj}y_j + Y_n(t, y_1, \dots, y_n)\right] \end{cases} \tag{5.27}$$

в якій $c_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = \overline{1, n})$, h, h_n : $[t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$– неперервно диференційовні функції такі, що

$$h(t)h_n(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \int\limits_{t_0}^{\omega} h_n(s)\, ds = \pm\infty, \tag{5.28}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_n(t)}{h(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_n^{-1}(t)\left(\frac{h_n(t)}{h(t)}\right)' = 0. \tag{5.29}$$

$f_i, Y_i : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_c^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = \overline{1, n})$- неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t\to\omega} f_i(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5.30}$$

рівномірно за $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_c^n$,

$$\lim_{|y_1|+\cdots+|y_n| \to 0} \frac{Y_i(t, y_1, \ldots, y_n)}{|y_1| + \cdots + |y_n|} = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5.31}$$

рівномірно за $t \in [t_0, \omega[$, де

$$-\infty < t_0 < \omega \leq +\infty, \ \mathbb{R}_c^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq c, \quad c > 0\}.$$

З теореми 2.6 роботи В.М. Євтухова, А.М. Самойленка [28] безпосередньо випливає наступний результат.

Лема 5.1. *Нехай виконуються умови (5.28)-(5.31). Нехай, крім того, матриці* $_n = (_{ij})_{i,j=1}^n$ *і* $_{n-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ *такі, що* $\det{}_n \neq 0$ *і* $_{n-1}$ *не має власних значень з нульовою дійсною частиною. Тоді система диференціальних рівнянь* (5.27) *має хоча б один розв'язок* $(y_i)_{i=1}^n : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}_c^n$ $(x_1 \in [x_0, \omega[)$, *який прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$. *Більш того, якщо матриця* $_{n-1}$ *має* m *власних значень (з урахуванням кратних), дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку функції* h *на проміжку* $[t_0, \omega[$, *то при виконанні нерівності* $h_n(x)(\det A_n)(\det A_{n-1}) > 0$ *у системи* (5.27) *існує* m*-параметрична, а при виконанні нерівності* $h_n(x)(detA_n)(\det A_{n-1}) < 0$ - $m+1$- *параметрична сім'я зникаючих в* ω *розв'язків.*

§5.3. Доведення теорем

Доведення теореми 5.1. Нехай $y\ :\ [t_0,\omega[\longrightarrow\ \mathbb{R}-$ довільний $P_\omega\big(Y_0,\dots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\big)$- розв'язок диференціального рівняння (0.1). Тоді згідно з означенням 1.6 існує $t_1\in[t_0,\omega[$ таке, що на проміжку $[t_1,\omega[$ цей розв'язок та його похідні до порядку $n-1$ включно зберігають знаки, причому $\operatorname{sign} y^{(j-1)}(t)=\nu_{j-1}\quad(j=\overline{1,n})$ при $t\in[t_1,\omega[$. Крім того, в силу апріорних асимптотичних властивостей таких розв'язків мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні співвідношення (5.1) - (5.4), з яких, зокрема, випливає справедливість асимптотичних зображень (5.13). Крім того, з (5.4) випливає справедливість нерівностей (5.8) і умов (5.10). В силу (5.4) також ясно, що для функцій $z_j(t)=y^{(j)}(t)\ (j=\overline{0,n-1})$ виконуються умови (5.5) і тому згідно з умовою $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ із (0.1)) отримуємо асимптотичне співвідношення

$$y^{(n)}(t)=\alpha_0p(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

або з урахуванням зображень (5.7) - співвідношення виду

$$y^{(n)}(t)=\alpha_0p(t)[1+o(1)]\prod_{j=0}^{n-1}|y^{(j)}(t)|^{\sigma_j}L_j(y^{(j)}(t))\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.\tag{5.32}$$

Тут згідно з умовами теореми функції L_j при всіх $j\in\{0,1,\dots,n-1\}\setminus\{i-1\}$ задовольняють умову S і в силу (5.4)

$$\ln|y^{(j)}(t)|=[i-j-1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|\quad(j=\overline{0,n-1})\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Тому для всіх $j\in\{0,1,\dots,n-1\}\setminus\{i-1\}$

$$L_j(y^{(j)}(t))=L_j\left(\nu_je^{[1+o(1)]\ln|\pi_\omega(t)|^{i-j-1}}\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{i-j-1}\right)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

З урахуванням (5.4) також знаходимо, що

$$y^{(n)}(t)=\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}\cdots\frac{y^{(i+2)}(t)}{y^{(i+1)}(t)}y^{(i+1)}(t)=$$

$$= \frac{(-1)^{n-i-1}(n-i)!}{\pi_\omega^{n-i-1}(t)} y^{(i+1)}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Використовуючи ці асимптотичні співвідношення, а також асимптотичні співвідношення (5.1) - (5.3) та уведені позначення μ_i, γ, γ_i і C_i із (5.32) отримуємо співвідношення виду

$$\frac{y^{(i+1)}(t)|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} =$$
$$= \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \left(\operatorname{sign}\, [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}\right) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times$$
$$\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}\right) [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{5.33}$$

В силу леми 1.2 про властивості повільно змінних функцій існує неперервно диференційовна нормалізована повільно змінна при $y^{(i-1)} \to Y_{i-1}$ функція $L_{0i-1} : \Delta_{Y_{i-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$\lim_{\substack{y^{(i-1)} \to Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{L_{i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 1, \quad \lim_{\substack{y^{(i-1)} \to Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{y^{(i-1)} L'_{0i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 0. \tag{5.34}$$

З використанням цих умов, (1.24) і (5.4) знаходимо

$$\left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}\right)' = \frac{\nu_i y^{(i+1)}(t)|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \times$$
$$\times \left(\gamma_i + (\gamma - \gamma_i) \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - \right.$$
$$\left. - \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i-1)}(t) L'_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}\right) =$$
$$= \frac{y^{(i+1)}(t)|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} [\nu_i \gamma_i + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому (5.33) може бути записаним у виді

$$\left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}\right)' =$$
$$= \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i \left(\operatorname{sign}\, [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}\right) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1} L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{i-j-1}\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_1 до t і враховуючи, що дріб під знаком похідної в силу умови $\gamma_i \neq 0$ прямує або до нуля, або до $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$, одержимо

$$\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i-\gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} =$$

$$= \nu_i\alpha_0(-1)^{n-i-1}\gamma_i\left(\operatorname{sign}[\pi_\omega(t)]^{n-i-1}\right) C_i J_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Звідси насамперед випливає, що виконується друга з нерівностей (5.9). Крім того, звідси і (5.33) на підставі еквівалентності функцій L_{i-1} і L_{0i-1} при $y^{(i-1)} \to Y_{i-1}$ знаходимо, що

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{J_i'(t)}{\gamma_i J_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

звідки з урахуванням (5.4) при $j=i$ випливає справедливість першої із умов (5.12).

З отриманого співвідношення також маємо при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y^{(i)}(t)}{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma_i-\gamma}{\gamma_i}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \nu_i\,|C_i\gamma_i J_i(t)|^{\frac{1}{\gamma_i}}[1+o(1)]. \tag{5.35}$$

Інтегруючи тепер це співвідношення на проміжку від t_1 до t, з урахуванням умови $\gamma\gamma_i \neq 0$ і використанням третього твердження леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій, знаходимо, що

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma}{\gamma_i}}}{L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \frac{\nu_i\nu_{i-1}\gamma}{\gamma_i}\,|\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma_i}} J_{ii}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

тобто справедливими є асимптотичне зображення (5.15) і перша із нерівностей (5.9). Крім того, із (5.35) і (5.15) випливає, що

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} = \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{5.36}$$

Згідно з цим співвідношенням справджується умова (5.11) і з (5.4) випливає справедливість другої із умов (5.12), а також асимптотичних співвідношень (5.14). Теорему доведено.

Доведення теореми 5.2. Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}-$ $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язок диференціального рівняння (0.1). Тоді згідно з теоремою 5.1 виконуються умови (5.8)-(5.12), (5.36) і для даного розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (5.13)-(5.15). В силу умови (5.36)

$$\ln|y^{(i-1)}(t)| = [1 + o(1)] \ln|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тому, враховуючи, що функція L_{i-1} задовольняє умову S, отримуємо

$$L_{i-1}(y^{(i-1)}(t)) = L_{i-1}\left(\nu_{i-1} e^{[1+o(1)]\ln|J_{ii}(t)|}\right) =$$
$$= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Приймаючи до уваги це зображенння, запишемо (5.15) у виді

$$|y^{(i-1)}(t)|^\gamma = |\gamma_i C_i| \left|\frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i} L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки отримуємо (5.16). Теорему доведено.

Доведення теореми 5.3. Спочатку розглянемо співвідношення

$$\frac{|Y|^\gamma}{L_{0i-1}(Y)} = |\gamma_i C_i| \left|\frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i} [1 + y_n], \tag{5.37}$$

де $L_{0i} : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ - неперервно диференційовна повільно змінна при $Y \to Y_{i-1}$ функція, що задовольняє умови (5.34), яка існує в силу леми 1.2 про властивості повільно змінних функцій.

Обрав довільним чином число $d \in \left]0, \left|\frac{\gamma_i}{\gamma}\right|\right[$, покажемо, що при деякому $t_0 \in]a, \omega[$ співвідношення (5.37) однозначно визначає, визначену на множині $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, де $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \left\{y \in \mathbb{R} : |y| \le \frac{1}{2}\right\}$, неперервно диференційовну неявну функцію $Y = Y(t, y_n)$ виду

$$Y(t, y_n) = \nu_{i-1} \left|J_{ii}(t)\right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z(t, y_n)}, \tag{5.38}$$

де функція z така, що

$$|z(t,y_n)| \le d \quad \text{при} \quad (t,y_n) \in [t_0,\omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,y_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Покладаючи в (5.37)

$$Y = \nu_{i-1}\,|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}, \tag{5.39}$$

знаходимо, що

$$z = a(t) + b(t,y_n) + Z(t,z), \tag{5.40}$$

де

$$a(t) = \frac{\gamma_i}{\gamma}\cdot\frac{\ln\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}\right| + \frac{1}{\gamma_i}\ln|\gamma_i C_i|}{\ln|J_{ii}(t)|}, \quad b(t,y_n) = \frac{\gamma_i}{\gamma}\cdot\frac{\ln[1+y_n]}{\ln|J_{ii}(t)|},$$
$$Z(t,z) = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\ln L_{0i-1}\left(\nu_{i-1}\,|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)}{\ln|J_{ii}(t)|}.$$

Тут згідно з умовою (5.17) і лемою 1.2 про властивості повільно змінних функцій

$$\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z} = Y_{i-1} \quad \text{рівномірно за} \quad z\in[-d,d],$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} b(t,y_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}},$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad z\in[-d,d].$$

Оскільки

$$\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}L'_{0i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)}{L_{0i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}+z}\right)},$$

то в силу (5.11) і другої з умов (5.34) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad z\in[-d,d].$$

Згідно з цими умовами існує число $t_1 \in [a, \omega[$ таке, що

$$\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_s}{\gamma}+z} \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad (t,z) \in [t_1, \omega[\times[-d,d],$$

$$|a(t)+b(t,v_1,y_2)+Z(t,z)| \leq d \ \text{ при } (t,y_n,z) \in [t_1,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \times [-d,d]$$

і

$$|Z(t,z_1)-Z(t,z_2)| \leq \frac{1}{2}|z_1-z_2| \ \text{ при } t \in [t_1,\omega[\ \text{ s } z_1, z_2 \in [-d,d].$$

Підібрав таким чином число t_1, позначимо через $\mathbf{B}$ банахів простір неперервних і обмежених на множині $\Omega = [t_1, \omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функцій $z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ з нормою

$$\|z\| = \sup\left\{|z(t,y_n)| : (t,y_n) \in \Omega\right\}.$$

Вилучим із нього підпростір $\mathbf{B}_0$ тих функці з $\mathbf{B}$, для яких $\|z\| \leq d$, і розглянемо на $\mathbf{B}_0$, обрав попереду довільним чином число $\nu \in (0,1)$, оператор

$$\Phi(z)(t,y_n) = z(t,y_n) - \nu\left[z(t,y_n) - a(t) - b(t,y_n) - Z(t,z(t,y_n)\right]. \quad (5.41)$$

Із вказаних вище властивостей функцій $a,\ b$ і Z ясно, що $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$ і $\|\Phi(z_1)-\Phi(z_2)\| \leq \left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1-z_2\|$ для будь яких $z_1,\ z_2 \in \mathbf{B}_0$.

Отже, оператор Φ відображає простір $\mathbf{B}_0$ в себе і є на ньому оператором стиску. Тому згідно до принципу стислих відображень існує єдина функція $z \in \mathbf{B}_0$ така, що $z = \Phi(z)$. В силу (5.41) ця неперервна на множині Ω функція є єдиним розв'язком рівняння (5.40), що задовольняє умову $\|z\| \leq d$. Із (5.40)) з урахуванням цієї умови і властивостей функцій $a,\ b,\ Z$ випливає, що даний розв'язок прямує до нуля при $t \uparrow \omega$ рівномірно за $y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Неперервна диференційовність цього розв'язку на множині $[t_0, \omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, де t_0- деяке число з проміжку $[t_1, \omega[$ безпосередньо випливає із відомої локальної теореми про існування неявної функції, що визначається співвідношенням (5.40). В силу заміни (5.39) одержаній функції z відповідає неперервно диференційовна на множині $[t_0, \omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функція Y виду (5.38), яка є розв'язком рівняння (5.37) і задовольняє умови

$$Y(t, y_n) \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad (t, y_n) \in [t_0, \omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{5.42}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t, y_n) = Y_{i-1} \quad \text{рівномірно за} \quad y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{5.43}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\gamma J_{ii}(t)\frac{\partial Y(t,y_n)}{\partial t}}{\gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, y_n)} = 1 \quad \text{рівномірно за} \quad y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{5.44}$$

Застосовуючи тепер до диференціального рівняння (0.1) перетворення

$$\begin{gathered} y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!}\, y^{(i-1)}(t)[1 + y_j(t)] \\ j = 1, \dots, i-1, \\ \\ y^{(j)}(t) = (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}} \cdot \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\, y^{(i-1)}(t)[1 + y_j(t)] \\ j = i, \dots, n-1, \\ \\ y^{(i-1)}(t) = Y(t, y_n(t)) \end{gathered} \tag{5.45}$$

і враховуючи, що функція $y^{(i-1)}(t) = Y(t, y_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ і $y_n(\tau) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ задовольняє рівняння

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left|\frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i} [1 + y_n(t)],$$

одержимо з використанням знакових умов (5.8), (5.9) систему диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} y'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[(i-j)(y_{j+1}-y_j) - \frac{\gamma_i}{\gamma}h_1(t)(1+y_j)(1+y_i)\right] \\ j=1,\dots,i-2, \\ \\ y'_{i-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[-y_{i-1} - \frac{\gamma_i}{\gamma}h_1(t)(1+y_{i-1})(1+y_i)\right], \\ \\ v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[(j-i)(1+y_j) - (j+1-i)(1+y_{j+1}) - \right. \\ \\ \qquad \left. - \frac{1}{\gamma_i}h_2(t)(1+y_j) + \frac{1}{\gamma}h_1(t)(1+y_j)(\gamma-\gamma_i-\gamma_i y_i)\right] \\ j=i,\dots,n-2, \\ \\ y'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[\frac{(-1)^{n-i-1}\gamma J_{ii}(t)[\pi_\omega(t)]^{n-i}G(t,y_1,\dots,y_n)}{(n-i-1)!\gamma_i J'_{ii}(t)Y(t,y_n)} + \right. \\ \\ \qquad +(n-i-1)(1+y_{n-1}) - \frac{1}{\gamma_i}h_2(t)(1+y_{n-1}) + \\ \\ \qquad \left. +\frac{1}{\gamma}h_1(t)(1+y_{n-1})(\gamma-\gamma_i-\gamma_i y_i)\right], \\ \\ y'_n = \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\left[(1+y_n)(1+y_i) - (1+y_n) - \frac{1}{\gamma}H(t,y_n)(1+y_n)(1+y_i)\right], \end{cases}$$

в якій

$$h_1(t) = \frac{\pi_\omega(t)J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}, \quad h_2(t) = \frac{\pi_\omega(t)J'_i(t)}{J_i(t)},$$

$$H(t,y_n) = \frac{Y(t,y_n)L'_{0i-1}(Y(t,y_n))}{L_{0i-1}(Y(t,y_n))}, \qquad G(t,y_1,\dots,y_n) =$$

$$= f(t, z_0(t,y_1,\dots,y_n),\dots,z_n(t,y_1,\dots,y_n)), \quad z_j(t,y_1,\dots,y_n) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{i-j-1}(t)}{(i-j-1)!}Y(t,y_n)(1+y_{j+1}) & \text{при} \quad j=\overline{0,i-2}, \\ Y(t,y_n) & \text{при} \quad j=i-1, \\ (-1)^{j-i}\frac{(j-i)!}{\pi_\omega^{j-i}(t)}\frac{\gamma_i}{\gamma}\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}Y(t,y_n)(1+y_j) & \text{при} \quad j=\overline{i,n-1}. \end{cases}$$

Тут в силу умов (5.12), (5.42), (5.43) і другої з умов (5.34)

$$\lim_{t\uparrow\omega} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} h_2(t) = -\frac{1}{\gamma_i} \tag{5.46}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega} H(t, y_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad y_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{5.47}$$

Крім того, відповідно до умов (5.42)-(5.44), (5.10)-(5.12)

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} z_j(t, y_1, \dots, y_n) = Y_j, \\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\frac{\partial z_j(t,y_1,\dots,y_n)}{\partial t}}{z_j(t,y_1,\dots,y_n)} = i - j - 1 \ (j = \overline{0, n-1}) \end{gathered} \tag{5.48}$$

рівномірно за $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, де

$$\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R} \, : \, |y_j| \leq \frac{1}{2} \ (j = \overline{1, n}) \right\}.$$

Тому згідно з виконанням умови $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ має місце зображення

$$G(t, y_1, \dots, y_n) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t, y_1, \dots, y_n))[1 + r_1(t, y_1, \dots, y_n)],$$

де функція $r_1 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервна і така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Звідси з урахуванням зображень (5.7) і виду функцій z_j $(j = \overline{0, n-1})$ знаходимо

$$G(t, y_1, \dots, y_n) = \alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i + i + 1 - n} \left| \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{1-\gamma_i} \times$$

$$\times |Y(t, y_n)|^{1-\gamma} \prod_{j=0}^{i-2} |1 + y_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + y_j|^{\sigma_j} \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(z_j(t, y_1, \dots, y_n) \right) [1 + r_1(t, y_1, \dots, y_n)].$$

Оскільки в силу умов (5.48)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|z_j(t,y_1,\dots,y_n)|}{\ln|\pi_\omega(t)|}=i-j-1\quad (j=\overline{0,n-1})$$

рівномірно за $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ і функції L_j $(j=\overline{0,n-1})$ при $j\neq i-1$ задовольняють умову S, то співвідношення для G може бути записаним у виді

$$G(t,y_1,\dots,y_n)=\frac{\alpha_0 C_i(n-i)!p(t)|\pi_\omega(t)|^{\mu_i}}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}}|Y(t,y_n)|^{1-\gamma}L_{i-1}(Y(t,y_n))\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{i-2}|1+y_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=i}^{n-1}|1+y_j|^{\sigma_j}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1}L_j\left(\nu_j|\pi_\omega(t)|^{i-j-1}\right)[1+r_2(t,y_1,\dots,y_n)],$$

де функція $r_2:[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}\longrightarrow\mathbb{R}$ неперервна і така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}r_2(t,y_1,\dots,y_n)=0\quad \text{рівномірно за}\quad (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

звідки з урахуванням виду функції J_i маємо

$$G(t,y_1,\dots,y_n)=\frac{\alpha_0 C_i(n-i)!J'_i(t)}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}}\times$$

$$\times|Y(t,y_n)|^{1-\gamma}L_{i-1}(Y(t,y_n))\prod_{j=0}^{i-2}|1+y_{j+1}|^{\sigma_j}\times$$

$$\times\prod_{j=i}^{n-1}|1+y_j|^{\sigma_j}[1+r_2(t,y_1,\dots,y_n].$$

Нарешті, враховуючи, що $Y(t,y_n)$ є розв'язком рівняння (5.37) і справджуються умови (5.35), (5.42), (5.43), а також вид функцій J_i і J_{ii}, знаходимо

$$G(t,y_1,\dots,y_n)=\frac{\alpha_0\nu_{i-1}(n-i)!J'_i(t)Y(t,y_n)}{|\gamma_i||\pi_\omega(t)|^{n-i-1}\left|\frac{\gamma}{\gamma_i}J_{ii}(t)\right|^{\gamma_i}\left|\frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)}\right|^{\gamma_i-1}(1+y_n)}\times$$

$$\times\prod_{j=0}^{i-2}|1+y_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=i}^{n-1}|1+y_j|^{\sigma_j}[1+r_3(t,y_1,\dots,y_n]=$$

$$= \frac{\alpha_0 \nu_{i-1}(n-i)! J_i'(t) J_{ii}'(t) Y(t,y_n)}{|\gamma||\pi_\omega(t)|^{n-i-1}|J_i(t)||J_{ii}(t)|} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2} |1+y_{j+1}|^{\sigma_j} \prod\limits_{j=i}^{n-1} |1+y_j|^{\sigma_j}}{1+v_n} [1 + r_3(t, y_1, \dots, y_n],$$

де функція $r_3 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ неперервна і така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_3(t, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Тоді з вживанням нерівностей (5.9) маємо

$$\frac{(-1)^{n-i-1} \gamma J_{ii}(t) [\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, y_1, \dots, y_n)}{(n-i-1)! \gamma_i J_{ii}'(t) Y(t, y_n)} =$$

$$= \frac{n-i}{\gamma_i} \frac{\pi_\omega(t) J_i'(t)}{J_i(t)} \frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2} |1+y_{j+1}|^{\sigma_j} \prod\limits_{j=i}^{n-1} |1+y_j|^{\sigma_j}}{1+y_n} [1 + r_3(t, y_1, \dots, y_n)].$$

В силу цього зображення, а також умов (5.46), (5.47), отримана вище система диференціальних рівнянь має наступний вид

$$\begin{cases} y_j' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_j(t, y_1, \dots, y_n) + (i-j)(y_{j+1} - y_j) \right], \\ j = 1, \dots, i-2, \\ y_{i-1}' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_{i-1}(t, y_1, \dots, y_{n-1}) - y_{i-1} \right], \\ y_j'(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_j(t, y_1, \dots, y_n) + (j-i+1)(y_j - y_{j+1}) \right] \\ j = i, \dots, n-2, \\ y_{n-1}' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_{n-1}(t, y_1, \dots, y_n) - (n-i) \left(\sum\limits_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} y_k + \sum\limits_{k=i}^{n-2} \sigma_k y_k \right) \right. \\ \qquad \left. + (n-i)(1-\sigma_{n-1}) y_{n-1} + (n-i) y_n + Y_{n-1}(y_1, \dots, y_n) \right], \\ y_n' = \frac{J_{ii}'(t)}{J_{ii}(t)} \left[f_n(t, y_1, \dots, y_n) - y_i + Y_n(y_1, \dots, y_n) \right], \end{cases} \tag{5.49}$$

де функції f_i $(i = \overline{1, n})$ неперервні на множині $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ і такі, що

$$\lim_{\tau \to +\infty} f_i(\tau, y_1, \dots, y_n) = 0 \ (i = \overline{1, n}) \text{ рівномірно за } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}},$$

$$
Y_{n-1}(y_1,\ldots,y_n) = -(n-i)\left[\frac{\prod\limits_{k=0}^{i-2}|1+y_{k+1}|^{\sigma_k}\prod\limits_{k=i}^{n-1}|1+y_k|^{\sigma_k}}{1+y_n}-\right.
$$

$$
\left.-1-\sum_{k=1}^{i-1}\sigma_{k-1}y_k-\sum_{k=i}^{n-1}\sigma_k y_k+y_n\right], \quad Y_n(y_1,\ldots,y_n)=y_iy_n.
$$

Тут

$$
Y_j(0,\ldots,0)=0,
$$

$$
\lim_{|y_1|+\cdots+|y_n|\to 0}\frac{\partial Y_j(y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_k}=0 \quad (k=\overline{1,n}) \quad \text{при} \quad j=n-1,n.
$$

Таким чином маємо систему диференціальних рівнянь (5.27), в якій

$$
h(t)=\frac{1}{\pi_\omega(t)}, \quad h_n(t)=\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}.
$$

Ці функції відмінні від нуля на проміжку $]t_0,\omega[$ і згідно з означеннями функцій π_ω, $J_{ii}(t)$ а також умовами (5.9), (5.12) мають наступні властивості

$$
\operatorname{sign} h(t)=\begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega=+\infty,\\ -1, & \text{якщо} \quad \omega<+\infty,\end{cases},
$$

$$
\operatorname{sign} h_n(t)=\operatorname{sign}\ J_{ii}(t)=\nu_i\nu_{i-1}\operatorname{sign}(\gamma\gamma_i)
$$

$$
\int\limits_{t_0}^{t} h(s)\,ds == \ln|\pi_\omega(\tau)|\Bigg|_{t_0}^{t} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,
$$

$$
\int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\,ds = \ln|J_{ii}(\tau)|\Bigg|_{t_0}^{t} \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega
$$

$$
\lim_{t\uparrow\omega}\frac{h_n(t)}{h(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}=0,
$$

$$
\lim_{t\uparrow\omega}h_n^{-1}(t)\left(\frac{h_n(t)}{h(t)}\right)'=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{\pi_\omega(t)J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\right)'}{\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}}=
$$

$$
=\lim_{t\uparrow\omega}\left[1+\frac{\pi_\omega(t)J'_i(t)}{\gamma_iJ_i(t)}+\frac{\pi_\omega(t)J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}\right]=0,
$$

тобто поряд з умовами (5.30), (5.31) виконуються умови (5.28) і (5.29).

Крім того, неважко перевірити, що в одержаній системі виду (5.27) матриці $C_n = (c_{ik})_{i,k=1}^n$ і $C_{n-1} = (c_{ik})_{i,k=1}^{n-1}$ мають наступні властивості

$$\det C_{n-1} = (-1)^{i-1}(i-1)!(n-i)!\gamma_i, \quad \det C_n = (-1)^{i-1}(i-1)!(n-i)!$$

і

$$\det[C_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{i-1}\prod_{k=1}^{i-1}(k+\rho)\times$$

$$\times\left[\prod_{m=1}^{n-i}(m-\rho) - (n-i)!\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{\sigma_j}{(j-i)!}\prod_{m=1}^{j-i}(m-\rho) - (n-i)!\sigma_i\right],$$

де E_{n-1}– одинична матриця розміру $(n-1)\times(n-1)$.

Із виду характеристичного многочлена матриці $_{n-1}$ ясно, що він має $i-1$ коренів $\rho_k = -k \quad (k = \overline{1, i-1})$, а решта його $n-i$ коренів є коренями алгебраїчного рівняння (5.17), яке в силу умов теореми не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тому матриця C_{n-1} не має власних значень з нульовою дійсною частиною.

Отже показано, що для системи диференціальних рівнянь (5.49) виконанні всі умови леми 5.1. Відповідно до цієї леми система (5.49) має хоча б один розв'язок $(y_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(t_1 \in [t_0, \omega[)$, який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$. Більш того, якщо l- число коренів (з урахуванням кратних) рівняння (5.17) з від'ємною дійсною частиною, то згідно з лемою 5.1 у випадку $\omega = +\infty$ у даній системи існує $l+i$- параметрична сім'я таких розв'язків при виконанні нерівності $\nu_i\nu_{i-1}\gamma < 0$ і $l+i-1$- параметрична сім'я - при виконані нерівності $\nu_i\nu_{i-1}\gamma > 0$, а у випадку $\omega < +\infty$- існує $n-i-l+1$-параметрична сім'я при виконанні нерівності $\nu_i\nu_{i-1}\gamma < 0$ і $n-i-l$-параметрична сім'я при виконанні нерівності $\nu_i\nu_{i-1}\gamma > 0$. Кожному такому розв'язку системи (5.49) відповідає в силу замін (5.45) і першої з умов (5.34) розв'язок $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t_1 \in [a, \omega[)$ диференціального рівняння

(0.1), що припускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (5.13) – (5.15). Використовуючи ці зображення і умови (5.8) – (5.12) неважко переконатися в тому, що він є $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язком. Теорему повністю доведено.

§5.4. Приклади

Оберемо довільним чином число $i \in \{1, \dots, n-1\}$ і з'ясуємо питання про умови існування та асимптотику $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$- розв'язків для двох класів диференціальних рівнянь n-го порядку, що розглядалися у якості прикладів в попередніх розділах дисертації.

Спочатку розглянемо диференціальне рівняння (2.28). Припустимо, що для нього при деяких $s \in \{1, \dots, l\}$ і $r \in \{l+1, \dots, m\}$ виконуються при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(i - j - 1) \tag{5.50}$$

і при $k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}$ нерівності

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj})(i - j - 1), \tag{5.51}$$

де

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Покажемо, що при виконанні цих нерівностей права частина рівняння (2.28) задовольняє умову $RN_{\frac{n-i-1}{n-i}}$.

Нехай $z_j : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_j}$ $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ – довільні неперервно диференційовні функції, що задовольняють умови (5.5). В силу цих умов

$$\ln |z_j(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення, а також зображення

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \ \ (k = \overline{1,m}; j = \overline{0,n-1}),$$

де $L_{kj}(y^{(j)}) : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0,+\infty[$ - неперервна повільно змінна функція при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, і перше твердження леми 1.7 про властивості повільно змінних функцій, будемо при $k \in \{1,\dots,l\} \setminus \{s\}$ мати

$$\ln \left(\frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} ((\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln |z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - L_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) -$$

$$- \ln p_s(t) + + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} \right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln |\pi_\omega(t)| \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right) =$$

$$= |\ln |\pi_\omega(t)|| \left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right)$$

при $t \uparrow \omega$. Звідси згідно з умовами (5.50) випливає, що вираз, розташований ліворуч, прямує до $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ і тому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod\limits_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всіх} \quad k \in \{1,\dots,l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогічно, з використанням (5.51) отримуємо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}\right)=0 \quad \text{при всіх} \quad k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}.$$

В силу цих граничних співвідношень

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}{\sum\limits_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}\left(z_j(t)\right)}=\frac{\alpha_s p_s(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t)\prod\limits_{j=0}^{n-1}\varphi_{rj}(z_j(t))}[1+o(1)]$$

при $t\uparrow\omega$, тобто має місце асимптотичне співвідношення (5.6), в якому

$$\alpha_0=\alpha_s\alpha_r,\quad p(t)=\frac{p_s(t)}{p_r(t)},\quad \varphi_j(z_j(t))=\frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)}\quad (j=0,1,\dots,n-1),$$

причому тут φ_j - неперервна правильно змінна при $z_j \longrightarrow Y_j$ функція порядку $\sigma_j=\sigma_{sj}-\sigma_{rj}$ і її повільно змінна складова L_j дорівнює відношенню повільно змінних складових L_{sj} і L_{rj} функцій φ_{sj} і φ_{rj}.

Отже, права частина рівняння (2.28) задовольняє умову $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$. Тому у випадку, коли при деяких $s\in\{1,\dots,l\}$, $r\in\{l+1,\dots,m\}$ виконуються умови (5.50)), (5.51)), для рівняння (2.28) справедливі теореми 5.1. - 5.3 із заміною в умовах цих теорем сталих $\alpha_0,\ \sigma_j\ (j=0,1,\dots,n-1)$ і функцій $p,\ \varphi_j,\ L_j\ (j=0,1,\dots,n-1)$ на вказані вище сталі і функції.

Якщо $\omega_*\in]a,\omega[$, то нерівності (5.50), (5.51) при заміні в них ω на ω_* запишуться у виді

$$\beta\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1}(\sigma_{sj}-\sigma_{kj})(i-j-1)>0 \text{ при } k\in\{1,\dots,l\}\setminus\{s\}, \tag{5.52}$$

$$\beta\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i-1}}^{n-1}(\sigma_{rj}-\sigma_{kj})(i-j-1)>0, \text{ при } k\in\{l+1,\dots,m\}\setminus\{r\}. \tag{5.53}$$

При виконанні цих нерівностей права частина рівняння (2.28) буде задовольняти умову $RN_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ при заміні в ній ω на ω_*.

Таким чином, при виконанні нерівностей (5.52) і (5.53) для диференціального рівняння (2.28) будуть справедливими твердження висновків 5.1 - 5.3 (з заміною в них α_0, σ_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ і функцій p, φ_j, L_j $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ на вказані вище сталі і функції) про умови існування і асимптотику сингулярних $P_{\omega_*}\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$ - розв'язків.

Тепер розглянемо диференціальне рівняння (3.46). Права частина цього рівняння свідомо задовольняє умову $(RN)_\infty$ і повільно змінна при $y \to Y_0$ складова його нелінійності $\varphi(y) = |y|^\sigma \ln(1 + |y|)$ задовольняє умову (S). При цьому будемо мати

$$\omega = +\infty, \quad \gamma = 1 - \sigma, \quad \gamma_i = 1,$$

$$\mu_i = n - i - 1 + \sigma(i-1), \quad C_i = \frac{1}{(n-i)![(i-1)!]^\sigma},$$

$$J_i(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_i}^{t} p(s) s^{n-i-1+\sigma(i-1)} \ln\left(1 + s^{i-1}\right) ds, & \text{якщо} \quad 1 < i < n, \\ \\ \int\limits_{A_i}^{t} p(s) s^{n-2} \, ds, & \text{якщо} \quad i = 1. \end{cases}$$

Алгебраїчне рівняння (5.17) запишеться у виді

$$\prod_{m=1}^{n-i} (m - \rho) = 0$$

і тому не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Тому згідно з теоремами 5.1 - 5.3 рівняння (3.46) має $P_{+\infty}\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язки (для яких у частинному випадку, коли $i = n-1$ існує скінченна, або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$) тоді і лише тоді, коли виконуються умови

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t J_i'(t)}{J_i(t)} = -1, \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{J_{ii}'(t)}{J_{ii}(t)} = 0,$$

$$\nu_{j-1} = \nu_{i-1} \quad (j = \overline{1, i-1}), \quad \nu_{j-1} = \alpha_0 (-1)^{n-j-1} \quad (j = \overline{i+1, n}),$$

$$\nu_{i-1}(-1)^{n-i}(1-\sigma)J_{ii}(t)>0 \quad \text{при} \quad t>a,$$

$$Y_{j-1}=\pm\infty \quad (j=\overline{1,i-1}), \quad Y_{j-1}=0 \quad (j=\overline{i+1,n}),$$

$$Y_{i-1}=\nu_{i-1}\lim_{t\to+\infty}|J_{ii}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення

$$y^{(j-1)}(t)=\frac{t^{i-j}}{(i-j)!}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j=1,\dots,i-1),$$

$$y^{(j)}(t)=(-1)^{j-i}\frac{(j-i)!}{t^{j-i}}\cdot\frac{J'_{ii}(t)}{(1-\sigma)J_{ii}(t)}\,y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j=i,\dots,n-1),$$

$$y^{(i-1)}(t)=\nu_{i-1}|C_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,|(1-\sigma)J_{ii}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\,[1+o(1)], \quad \text{якщо} \quad 1<i<n,$$

$$y^{(i-1)}(t)=\nu_{i-1}\left|C_i(1-\sigma)J_{ii}(t)\ln\left(1+|J_{ii}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)],$$

якщо $i=1$, причому таких розв'язків $\omega=+\infty$ існує i- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_{i-1}(-1)^n\alpha_0(1-\sigma)<0$ і $i-1$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_{i-1}(-1)^n\alpha_0(1-\sigma)>0$,

Тепер, обрав довільним чином число $\omega_*>a$, вирішимо з використанням наслідків 5.1 - 5.3 питання про умови існування і асимптотику сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0,\dots,Y_{n-1},\pm\infty)$-розв'язків у диференціального рівняння (3.46). Згідно з цими наслідками для існування таких розв'язків необхідно і достатньо, щоб $n-i+\sigma(i-1)=0$ (звідси, зокрема, випливає, що $i\neq1$, $\sigma=-\frac{n-i}{i-1}$) і виконувались умови

$$\nu_{j-1}=(-1)^{i-j-1}\nu_{i-1} \quad (j=\overline{1,i-1}, \quad \nu_{j-1}=\alpha_0 \quad (j=\overline{i+1,n-1})$$

$$\alpha_0\nu_{i-1}(1-\sigma)J_{ii}(t)>0 \text{ при } t\in]a,\omega_*[,$$

$$Y_{j-1}=0 \text{ при } j=\overline{1,i-1},\ Y_{j-1}=\pm\infty \text{ при } j=\overline{i+1,n-1},$$

$$Y_{i-1}=\nu_{i-1}\lim_{t\uparrow\omega}|J_{ii}(t)|^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають при $t \uparrow \omega_*$ асимптотичні зображення

$$y^{(j-1)}(t) = (-1)^{i-j}\frac{(\omega_*-t)^{i-j}}{(i-j)!}\, y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 1, \ldots, i-1),$$

$$y^{(j)}(t) = \frac{(j-i)!}{(\omega_*-t)^{j-i}} \cdot \frac{J'_{ii}(t)}{(1-\sigma)J_{ii}(t)}\, y^{(i-1)}(t)[1+o(1)] \ \ (j = i, \ldots, n-1),$$

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1}|C_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\, |(1-\sigma)J_{ii}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\, [1+o(1)], \text{ якщо } 1 < i < n,$$

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1}|C_i|^{\frac{1}{1-\sigma}} \left|(1-\sigma)J_{ii}(t)\ln\left(1+|J_{ii}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)],$$

якщо $i = 1$, причому таких розв'язків існує $n-i+1$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_{i-1}\alpha_0(1-\sigma) < 0$ і $n-i$- параметрична сім'я, якщо виконується нерівність $\nu_{i-1}\alpha_0(1-\sigma) > 0$.

Звернемо увагу на те, що таких результатів не було отримано навіть при відсутності логарифму у правій частині диференціального рівняння (3.46)

§5.4. Висновки до п'ятого розділу

В п'ятому розділі дисертації для диференціального рівняння n=го порядку загального виду були розглянуті $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язки при $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = \overline{1, n-1})$. Вони складають множину решти з не розглянутих в попередніх розділах всіх можливих типів таких розв'язків. На відміну від попередніх розділів дисертації тут розглядаємий тип розв'язків містить одну з похідних до порядку $n-2$ включно, яка є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$. Цей факт значно ускладнює дослідження таких розв'язків. Незважаючи на це вдалося для кожного $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ визначити додаткову умову $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ на праву частину рівняння (0.1) і при її виконанні отримати необхідні умови існування $P_\omega\left(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язків, а також асимптотичні зображення в неявному виді для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Потім було визначено додаткові (до необхідних) умови, що дозволяють отримані асимптотичні зображення записати у явному виді. Далі було вирішено питання про фактичне існування у диференціального рівняння (0.1) $P_\omega\left(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями, а також про кількість таких розв'язків. При цьому слід зазначити, що достатні умови їх існування лише умови про відсутність чисто уявних коренів у деякого алгебраїчного рівняння відрізняється від необхідних умов їх існування. З одержаних трьох основних теорем п'ятого розділу встановлені три наслідки про умови існування та асимптотичну поведінку при $t\uparrow\omega_*$, де $\omega_*\in]a,\omega[$, сингулярних $P_{\omega_*}\left(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\frac{n-i-1}{n-i}\right)$-розв'язків. Це вдалося зробити завдяки, тому, що в рамках єдиного методу були розглянуті випадки, коли $\omega=+\infty$ і $\omega<+\infty$.

Встановлені результати проілюстровано на класах істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку, що розглядалися і в попередніх розділах. Це дало можливість для таких класів рівнянь описати асимптотичну поведінку всіх можливих типів $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена актуальній задачі щодо асимптотичної поведінки розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку загального виду (0.1). В ній встановлюються умови існування і асимптотичні зображення всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Клас $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків є конкретизованим до рівняння (0.1) класом $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків, який був уведений В.М. Євтуховим в його докторській дисертації [19] при дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера n-го порядку. Цей клас розв'язків містить в собі правильно та швидко змінні при $t \uparrow \omega$ розв'язки, а також різні типи сингулярних розв'язків. За своїми апріорними асимптотичними властивостями він розпадається на $n+2$ неперетинних множин, що відповідають наступним значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\};$$

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_0 = \pm\infty; \quad \lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \ \ (i = \overline{1, n-1}.$$

Різні апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (0.1), що відповідають вказаним вище значенням параметру λ_0 призводять до необхідності їх окремого дослідження. Їх дослідження здійснено у відповідності до даних значень параметру λ_0 в розділах II - V дисертації.

Загальний вид правої частини рівняння (0.1) не дозволяє ефективно використати в процесі дослідження апріорні асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків. Тому в роботі для кожного із вказаних значень параметру λ_0 було визначено умову $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння (0.1), при виконанні якої рівняння стає асимптотично близьким, у деякому сенсі, до рівняння з правильно змінними нелінійностями. Асимптотична теорія істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями активно розвивається в останні 30 років. Перші важливі результати були одержані для таких рівнянь другого порядку в роботах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, В.М. Євтухова та його учнів Л.О. Кирилової, М.О. Білозерової, В.М. Харькова, а також багатьох інших авторів. Потім в роботах В.М. Євтухова і Л.І. Кусік була здійснена спроба їх поширення на диференціальні рівняння другого порядку загального виду. Тут вперше була визначена умова $(RN)_{\lambda_0}$. Найбільш вагомі результати про асимптотику розв'язків істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями причому вже порядку n були одержані в роботах В.М.Євтухова і А.М. Самойленка, а також В.М. Євтухова і А.М. Клопота. Тут для таких рівнянь були встановлені умови існування, а також асимптотичні зображення всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків.

Розроблені для істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями методи дослідження поряд з апріорними асимптотичними властивостями $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків стали важливим підґрунтям для проведеного в дисертації дослідження.

В роботі для кожного з вказаних вище можливих значень параметру λ_0 при умові $(RN)_{\lambda_0}$ на праву частину рівняння n-го порядку загального виду (0.1) вперше були одержані наступні результати:

1) встановлено необхідні умови існування $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння виду (0.1), а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення у неявному виді для таких розв'язків та їх похідних

до порядку $n-1$ включно;

2) визначено додаткову (до необхідних) умову, при виконанні якої отримані асимптотичні зображення можуть бути поданими у явному виді;

3) одержано достатні умови існування у диференціального рівняння $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями, а також з'ясовано питання про кількість таких розв'язків;

4) для кожного $\omega_* \in]a, \omega[$ встановлено необхідні та також достатні умови існування сингулярних $P_{\omega_*}(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння виду (0.1), а також асимптотичні при $t \uparrow \omega_*$ зображення у неявному та явному видах для таких розв'язків і їх похідних до порядку $n-1$ включно, визначено кількість розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями;

5) одержані результати проілюстровано на прикладах двох важливих класів істотно нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, один з яких раніше зовсім не розглядався, а другий є незначним узагальненням рівняння типу Емдена-Фаулера.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Вона виконувалась згідно плану науково-дослідної роботи Одеського національного університету імені І.І. Мечникова у рамках держбюджетних тем кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології: "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь аналітичними та якісними методами"(номер державної реєстрації 0109U003665) і "Функціональні класи в еволюційних системах"(номер державної реєстрації 0116U001492).

Всі отримані в роботі результати є новими і обґрунтовані строгими доведеннями теорем і наслідків. За результатами дисертаційної роботи опубліковано чотири статті, дві з яких [31, 32] надруковані в фахових виданнях, переклад яких індексований у наукометричній базі SCOPUS, та 2 інші [7, 8] у наукових виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України.

Дисертація складається з анотації, вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 104 найменувань, і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 164 сторінки, основний текст займає 121 сторінку.

У вступі обґрунтовується актуальність обраної теми, визначено мету, основні завдання та методи дослідження, а також наукову новизну роботи та теоретичне значення отриманих результатів.

У першому розділі дисертаційної роботи подано огляд досліджень асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями. На підставі цих досліджень визначена задача, вирішення якої може сприяти подальшому розвитку даного напрямку досліджень, а саме задача про умови існування і асимптотичну поведінку $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ - розв'язків диференціального рівняння n-го порядку загального виду (0.1), яке у деякому сенсі є асимптотично близьким до двочленого диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями. Ця задача вирішується у другому - п'ятому розділах дисертації.

Отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані при подальшому дослідженні диференціальних рівнянь n-го порядку загального виду, а також для опису асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь, що є математичними моделями реальних процесів, що вивчаються на практиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений : *дис. ... докт. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление"*. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Москва, 2008. 240 с.

2. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, пер. с англ. А.Д. Мышкиса. М. : *Изд-во иностр. лит.* , 1954. 216 с.

3. Белозерова М.А. Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Математичні студії.* 2008. Т. 29, № 1. С. 52–62.

4. Белозерова М.А. Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным. *Нелінійні коливання.* 2009. Т. 12, № 1. С. 3–15.

5. Белозерова М.А. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями в некотором смысле близкими к степенным : *дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения".* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2009. 121 с.

6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: *Наука.* 1967. 472с.

7. Дрожжина А.В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями *Науковий вісник Ужгородського університету (Математика і інформатика).* 2018. Вип. 1 (32). С. 67–79.

8. Дрожжина А.В. Асимптотика некоторых типов одного класса решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков *Дослідження в математиці та механіці.* 2019. Т. 24, № 2 (34). С. 7–30.

9. Дрожжина А.В. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку *Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей з міжнар. конф., присвяченої 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка (1942–1996) (м. Кам'янець-Подільський, 19–21 травня 2017 р.).* Кам'янець-Подільський, 2017. С. 39.

10. Дрожжина А.В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь *Міжнародна конференція "International Conference of Young Mathematicians": тези доповідей (Kyiv, Ukrain, June 6–8,2019).* Kyiv, 2019. P. 57.

11. Дрожжина А.В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь *Міжнародна конференція "Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV"присвячена 100-річчю з дня народження В. К. Дзядика (1919-1998): тези доповідей (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.).* Київ, 2019. С. 77.

12. Евтухов В.М. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. *Докл. АН СССР.* 1977. Т. 233., № 4. – С. 531 - 534.

13. Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера: *Дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 "Дифференциальніе уравнения"* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1980. – 154 с.

14. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений одного класса

нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Сообщ. АН ГССР.* 1982. Т. 106, №3. – С. 473 - 476.

15. Евтухов В.М. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка *Math. Nachr.* 1984. – Bd. 115. – P. 215 - 236.

16. Евтухов В.М. Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка *Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ.* 1988. Т. 3, № 3. – С. 62 - 65.

17. Евтухов В.М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена - Фаулера n - го порядка *Докл. АН России.* 1992. Т. 324, № 2. – С. 258 - 260.

18. Евтухов В.М. Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n - го порядка типа Эмдена - Фаулера. *Сообщ. АН Грузии.* 1992. Т. 145, № 2. – С. 269 - 273.

19. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений : *Дис. ... д-ра физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. 295 с.

20. Евтухов В.М., Белозерова М.А. Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка *Укр. мат. журн.* 2008. Т. 60, № 3. С. 310–331.

21. Євтухов В.М., Дрожжина А.В. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівняннь вищих порядків *Міжнародна*

конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях": тези доповідей (м. Чернівці, 17–18 вересня 2018 р.). Чернівці, 2018. С. 65.

22. Дрожжина А.В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь *Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування. Матеріали міжнародної наукової конференціїї, присвяченної 100-річчу від дня народження професора С.Д. Едельмана. (м. Чернівці, 16–19 вересня 2020 р.).* Чернівці, 2020. С. 118-119.

23. Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Дифференц. уравнения.* 2005. Т. 41, № 8. С. 1053–1061.

24. Евтухов В.М., Клопот А.М. Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями *Укр. мат. журн.* 2013. Т. 65, № 3. С. 354–380.

25. Евтухов В.М., Клопот А.М. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями *Дифференц. уравнения.* 2014. Т. 50, № 5. С. 584–600.

26. Евтухов В.М., Кусик Л.И. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех.* 2009. Т. 14, вип. 20. С. 57–74.

27. Евтухов В.М., Кусик Л.И. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка *Дифференциальные*

уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 424 – 438.

28. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений *Укр. мат. журн.* 2010. Т. 62, № 1. С. 52–80.

29. Евтухов В.М., Самойленко А.М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями *Дифференц. уравнения 2011.* Т. 47, № 5. С. 628–650.

30. Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью *Дифференц. уравнения.* 2008. Т. 44, № 3 . - С. 308-322.

31. Евтухов В.М., Дрожжина А.В. Асимптотика быстро меняющихся решений дифференциальных уравнений, асимптотически близких к уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями *Нелінійні коливання.* 2019. Т.22, № 3. С. 350–368.

32. Евтухов В.М., Дрожжина А.В. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений *Укр. мат. журн.* 2019. Т.71, № 12. С. 1624–1644.

33. Изюмова Д.В. Об условиях колеблемости и неколеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Дифференц. уравнения.* 1966. Т. 11, № 12. – С. 1572 - 1586.

34. Изюмова Д.В. Заметки о колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Сообщ. АН ГССР.* 1967.

Т. 17, № 1. – С. 19 - 24.

35. Изюмова Д.В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка *Тр. Тбилис. ун-та.* 1968. Т. 129. – С. 157 - 178.

36. Изюмова Д.В., Кигурадзе И.Т. Некоторые замечания о решениях уравнения $u'' + a(t)f(u) = 0$ *Дифференц. уравнения.* 1968. Т. 4, № 4. – С. 589 - 605.

37. Квиникадзе Г.Г., Кигурадзе И.Т. О быстро растущих решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений *Сообщ. АН ГССР.* 1982. Т. 106, № 3. – С. 465 - 468.

38. Квиникадзе Г.Г. Об исчезающих в бесконечности решениях задачи Кнезера *Сообщ. АН ГССР.* 1985. Т. 118, № 2. С. 241–244.

39. Квиникадзе Г.Г. О кнезеровских решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений *Докл. расшир. заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ.* 1985. Т. 1, № 3. С. 47–53.

40. Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений *Докл. АН СССР.* 1962. 144, № 1. С. 33 - 36.

41. Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + (t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0.$ *Математический сборник.* 1964. Т. 65, №2. С. 172–187.

42. Кигурадзе И.Т. Заметка об ограниченности решений дифференциальных уравнений *Тр. Тбилис. ун-та.* 1965. Т. 110. С. 103 - 108.

43. Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка *Докл. АН СССР.* 1968. Т. 181, № 5. С. 1054–1057.

44. Кигурадзе И.Т. О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1969. Т. 33, № 6. С. 1373–1398.

45. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений *Тбилиси: Изд-во "Тбилис". ун-та.* 1975.

46. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : *Наука* , 1990. 430 с.

47. Кирилова Л.О. Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена–Фаулера *Наук. вісник Чернівецького ун-ту.* Чернівці : Рута, 2004. Вип. 228. С. 30–35.

48. Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Нелінійні коливання.* 2005. Т. 8, № 1. С. 18–28.

49. Кириллова Л.А. Асимптотические представления решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к уравнениям типа Эмдена-Фаулера : *Дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2006. 147 с.

50. Клоков Ю.А. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений *Успехи мат. наук.* 1958. Т. 80, № 2. – С. 189 - 194.

51. Клопот А.М. Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка *Нелинейные колебания.* 2012. Т. 15, № 4. С. 447–465.

52. Клопот А.М. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями *Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.* 2013. Т. 18, № 3(19). С. 16–34.

53. Клопот А.М. Асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями : *Дис. ... канд. физ.-мат. наук : [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2015. 148 с.

54. Костин А.В. Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена–Фаулера *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 200, № 1. С. 28–31.

55. Костин А.В., Евтухов В.М. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения *Докл. АН СССР.* 1976. Т. 231, № 5. С. 1059–1062.

56. Костин А.В. Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений *Дифференц. уравнения.* 1987. Т. 23, № 3. С. 524–526.

57. Костин А.В. Асимптотика правильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений : *Дис. ... докт. физ.-мат. наук : [спец.]*

01.01.02 "Дифференциальные уравнения" Академия наук Украинской ССР, Институт математики. Киев, 1991 282 с.

58. Кусик Л.И. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Нелінійні коливання.* 2011. Т. 14, № 3. С. 333–349.

59. Кусик Л.И. Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Вісник Одеського нац. ун-ту.* 2012. Т.17, Вип. 1–2(13–14). Матем. і механ. С. 80–97.

60. Олехник С.Н. Асимптотическое поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка *Дифференциальные уравнения.* 1969. Т. 5, № 11.– С. 2093 - 2095.

61. Олехник С.Н. Об ограниченности и неограниченности решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка *Дифференциальные уравнения.* 1972. Т. 8, № 9.– С. 1701 - 1704.

62. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения (пер. с итал. Н.Я. Виленкина, с предисл. В.В. Немыцкого). М. :*Изд-во "иностр. лит."* 1954. Т. 2. 415 с.

63. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции (пер. с англ. И.С. Шиганова, под редакцией В.М. Золотарева). М. : *Наука.* 1985. 144 с.

64. Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных и разностных уравнений второго порядка: *Дис. ... канд. физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"* Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 2009. 139 с.

65. Чантурия Т.А. О неколеблющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Сообщ. АН Грузии.* 1969. Т. 55, № 1. С. 17–20.

66. Чантурия Т.А. Асимптотика решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. *Сообщ. АН ГССР.* 1970 Т. 57, № 2. С. 289–292.

67. Чантурия Т.А. Об асимптотическом представлении решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка *Дифференц. уравнения.* 1970. Т. 6, № 6. С. 948–961.

68. Чантурия Т.А. Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)|u|^n \operatorname{sign} u$. *Дифференц. уравнения.* 1972. Т. 8, № 7. С. 1195–1206.

69. Чантурия Т.А. Об асимптотическом поведении колеблющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. *Дифференц. уравнения.* 1975. Т. 11, № 7. С. 1232–1245.

70. Шевело В.Н., Штелик В.Г. Некоторые вопросы осцилляции решений нелинейных неавтономных уравнений второго порядка. *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 149, № 2. – С. 276 - 279.

71. Шевело В.Н. Задачи, методы и основные результаты теории осцилляции решений нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений *Тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механ.* 1965. Т. 2. – С. 142 -152.

72. Atkinson F.V. On second-order non-linear oscillations. *Pasif. J. Math.* 1955. V. 5, № 1. P. 643–647.

73. Belohorec S. Neoscilatorcke riesenia istej nelinearnej differensialnej rovnice druheho radu *Mat. Fuz. Cas.* 1962. V. 12, № 4. P. 253–262.

74. Belohorec S. On some properties of the equation $y''(x)+f(x)y^{\alpha}(x)=0,\ 0<\alpha<1$ *Math. Cas.* 1967. V. 17, № 1. P. 10–19.

75. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. *Cambridge University Press.* 1987. 494 p.

76. Drozhzhyna A.V. Asymptotic Representations of Rapid Varying Solutions of Differential Equations Asymptotically Close to the Equations with Regularly Varying Nonlinearities *QUALITDE – 2019: abstracts of the Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Diff. Eq. (Tbilisi, December 7–9, 2019).* Tbilisi, 2019. P. 57-59.

77. Emden R. Gaskugeln Anwendungen der mechanishen Warmen-theorie auf Kosmologie metheorologishe Probleme. *Leipzig : Teubner.* 1907. 118 p.

78. *Thomas L.* The calculation of atomic fields. *Proc. Cambridge Filos. Soc.* 1927. V. 3. P. 542–548.

79. Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1914. V. 45. P. 289–350.

80. Fowler R.H. The solutions of Emden's and similar differential equations. *Month. Notices. Roy. Astr. Soc.* 1930. V. 91. P. 63–91.

81. Evtukhov V.M., Shebanina E.V. Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations *Mem. Differential Equations Math. Phys.* Tbilisi. 1998. V. 13. - P. 150-153.

82. Emden R. Gaskugeln Anwendungen der mechanishen Warmen-theorie auf Kosmologie metheorologishe Probleme. *Leipzig : Teubner.* 1907. 118 p.

83. Thomas L. The calculation of atomic fields *Proc. Cambridge Filos. Soc.* 1927. V. 3. P. 542–548.

84. Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1914. V. 45. P. 289–350.

85. Fowler R.H. The solutions of Emden's and similar differential equations. *Month. Notices. Roy.* Astr. Soc. 1930. V. 91. P. 63–91.

86. Fowler R.H. Further studies of Emden's and similar differential equations *Quart. J. Math.* 1931. V. 2, № 2. P. 259–288.

87. Fowler R.H. The form near infinity of real continuous solutions of a certain differential equation of the second order. *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1914. V. 45. P. 289–350.

88. Fermi E. Un metodo statistico par la determinazione di alcun proprieta dell'atome. *Rend. Accad. Naz. Linceicl. Sci. Fys. Mat. Nat.* 1927. V. 6. P. 602–607.

89. Hardy G.H. Some results concerning the behavior at infinity of a real and continuous solution of an algebraic differential equations of the first order. *Proc. London Math. Soc. Ser. V.* (2) 10. 1912. P. 451–468.

90. Heidel I.W., Hinton D.B. The existense of oscillatory solutions for a nonlinear differential equation. *SIAM I. Math. Anal.* 1972. V. 3, № 2. – P. 344 - 351.

91. Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. *Math. (Cluj)* 1930. V. 4. P. 38–53.

92. Kiguradze I.T. On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations. *Ann. Math. pur. ed. apple.* 1969. V. 81. – P. 169 - 192.

93. Kiguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. *Arch. Math. (Brno).* 1978. – V. 14, № 1. – P. 21 - 44.

94. Kiguradze I.T. On asymptotic behavior of solution of non-linear non-autonomous ordinary differential equation. *Qual. Theory Differ. Equations.* V. 1. – Amsterdam e. a. – 1981.– P. 507 - 554.

95. Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G. On strongly increasing solutions of nonlinear ordinary differential equations. *Ann. Math. pura ed appl.* 1982. V.130. – P. 67 - 87.

96. Lane J. H. On the theoretical temperature of the Sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and depending of the laws of gases known to terrestrial experiment. *Amer. J. Sci. and Arts., 2 nd series.* 1870. V. 50. - P. 57-74.

97. Marić V., Tomić M. Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = p(t)\varphi(y)$. *Math. Z.* 1976. 149. P. 161–166.

98. Marić V.,Tomić M. Regular variation and asymptotic properties of solutions of nonlinear differential equations. *Publ. Inst. Math.* 1977. V. 21, № 5 P. 119–129.

99. Marić V. Regular Variation and Differential Equations. *Springer-Verlag.* New York LLC (Seria : Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 140 p.

100. Polvani G., Ascoli G., Giacomini A. Questioni riguardanti il magnetron. *Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano.* 1936. V. 10. - P. 279-338.

101. Taliaferro S. D. On the positive solutions of $y'' + \psi(t)y^{-\lambda} = 0$. *Nonlinear anal.* 1978. V. 3. P. 437–444.

102. Taliaferro S. D. Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \Phi(t)f(y)$. *SIAM J. Math. Anal.* 1981. V. 12. P. 853–865.

103. Thomas L. The calculation of atomic fields. *Proc. Cambridge Filos. Soc.* 1927. V. 3. P. 542–548.

104. Wong J. S. W. Some stability conditions for $x'' + \alpha(t)f(x) = 0$. *SIAM. J.Appl. Math.* 1967. V. 15, № 4. P. 889–892.

ДОДАТОК

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Асимптотика быстро меняющихся решений дифференциальных уравнений, асимптотически близких к уравнениям с правильно меняющимися нелинейностями. *Нелінійні коливання.* 2019. Т.22, № 3. С. 350–368.

2. Дрожжина А. В. Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку, що є асимптотично близькими до рівнянь з правильно змінними нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету "Математика і інформатика"*, 2018. Вип. 1 (32). С. 67–79.

3. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.*. 2019. Т.71, № 12. С. 1624–1644.

4. Дрожжина А. В. Асимптотика некоторых типов одного класса решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков. *Дослідження в математиці та механіці.* 2019. Т. 24, № 2 (34). С. 7–30.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку. *Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей з міжнар. конф., присвяченої 75-річчю від дня народження Д.І. Мартинюка* (м. Кам'янець-Подільський, 19–21 травня 2017 р.). Кам'янець-Подільський, 2017. С. 39.
2. Евтухов В. М., Дрожжина А. В. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь вищих порядків. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях.* (м. Чернівці, 17–18 вересня 2018 р.). Чернівці, 2018. С. 65.
3. Дрожжина А. В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *International Conference of Young Mathematicians.* (Kyiv, Ukrain, June 6–8,2019). Kyiv, 2019. P. 57.
4. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. *Функціональні методи в теорії наближень, диференціальних рівняннях та обчислювальній математиці IV.* (с.Світязь, 20-26 червня, 2019 р.). Київ, 2019. С. 77.
5. Drozhzhyna A. V. Asymptotic Representations of Rapid Varying Solutions of Differential Equations Asymptotically Close to the Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *QUALITDE – 2019: abstracts of the Intern. Workshop on the Qualitative Theory of Diff. Eq.* (Tbilisi, December 7–9, 2019). Tbilisi, 2019. P. 57–59.
6. Дрожжина А. В. Асимптотичні зображення розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь. *Сучасні проблеми ди-*

ференціальних рівнянь та їх застосування. (м. Чернівці, 16–19 вересня 2020 р.). Чернівці, 2020. С. 118–119.