АНОТАЦІЯ

Дрожжина А.В. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — математика. — Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, 2020.

Підготовка дисертації здійснювалася на кафедрі диференціальних рівнянь, геометрії та топології факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І.І. Мечникова.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

в якому $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \cdots \times \Delta_{Y_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\Delta_{Y_{i-1}}$ – деякий однобічний окіл Y_{i-1}, Y_{i-1} дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $i = 1, \ldots, n$. Предметом дослідження є $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язки цього рівняння, умови їх існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. Клас $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків був уведений в роботах В.М. Євтухова і виявився достатньо широким класом монотоних розв'язків. Він містить в собі правильно, повільно і швидко змінні при $t \uparrow \omega$ розв'язки, а також деякі типи сингулярних розв'язків.

Розв'язок y даного диференціального рівняння n-го порядку називається $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i-1)}(t) = Y_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

Згідно з результатами В.М. Євтухова множина всіх можливих типів таких розв'язків за своїми асимптотичними при $t \uparrow \omega$ властивостями розпадається на $n+2$ неперетинних множин, що відповідають наступним значенннямм λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}, \ \lambda_0 = 1, \ \lambda_0 = \pm\infty,$$

$$\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \ (i = 1, \ldots, n-1).$$

При $n = 2$, тобто для диференціального рівняння другого порядку, асимптотика $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків встановлювалась в роботах В. М. Євтухова і Л.І. Кусік. При $n \geq 2$ у роботах В.М. Євтухова, А.М. Самойленко, а також у роботах В.М. Євтухова і О.М. Клопота були одержані асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно диференціальних рівнянь виду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}\left(y^{(j)}\right),$$

де α_0, $\alpha_i \in \{-1; 1\}$, p, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, \ldots, m)$– неперервні функції, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, $\varphi_{ij-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервні і правильно змінні функції при $y^{(j-1)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$.

Перші результати про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями були отримані в роботах V. Marić, M. Tomić, S.D. Taliaferro, В.М. Євтухова, Л.О. Кирилової і деяких інших авторів для диференціальних рівнянь другого порядку виду

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y).$$

Правильно змінна функція є добутком степеневої і повільно змінної функції. Тому дослідження рівнянь з правильно змінними нелінійностями було пов'язано з бажанням поширити на такі рівняння результати отримані на протязі XX століття для рівнянь зі степеневими нелінійностями, зокрема, для узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера, частинні випадки яких виникають в багатьох галузях природознавства.

В дисертаційній роботі кожний з вказаних вище $n+2$ типів $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння n-го порядку загального виду вивчається окремо при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$, суть якої полягає в тому, що на будь-якому з таких розв'язків рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до рівняння

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}\left(y^{(j-1)}\right),$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна правильно змінна функція порядку σ_{j-1} при $y^{(j)} \longrightarrow Y_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Наприклад, у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$ умова $(RN)_{\lambda_0}$ визначається наступним чином.

Будемо казати, що функція f у диференціальному рівнянні задовольняє умову $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$, якщо існують числа $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $t_0 \in [a, \omega[$, неперервна функція $p : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ і неперервні правильно змінні при $z_{j-1} \to Y_{j-1}$ $(j = 1, ..., n)$ функції $\varphi_{j-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \to]0, +\infty[$ порядків σ_{j-1} $(j = 1, ..., n)$ такі, що для будь-яких неперервно диференційовних функцій $z_{j-1} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_{j-1}}$ $(j = 1, ..., n)$, які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{j-1}(t) = Y_{j-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_{j-1}(t)}{z_{j-1}(t)} = \frac{a_{0j}}{\lambda_0 - 1} \quad (j = 1, ..., n),$$

де

$$a_{0j} = (n-j)\lambda_0 - (n-j-1) \quad (j = 1 \dots, n),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), ..., z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=1}^{n} \varphi_{j-1}(z_{j-1}(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Для кожного з $n+2$ вказаних вище можливих значень параметру λ_0 при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ розроблено методику дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків розглядаємого в дисертації диференціального рівняння n- го порядку загального виду. Вона базується на застосуванні апріорних асимптотичних властивостях $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, асимптотичних властивостей правильно змінних функцій, побудованих раніше підходів і методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями.

З використанням даної методики у другому розділі дисертації одержано результати про умови існування і асимптотику $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків розглядаємого диференціального рівняння n-го порядку у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\ldots,\frac{n-2}{n-1}\right\}$, у третьому і четвертому розділах– у випадках $\lambda_0 = 1$ і $\lambda_0 = \pm\infty$ відповідно, у п'ятому - у випадках, коли $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ $(i = 1,\ldots,n-1)$. Перший розділ дисертації містить огляд досліджень асимптотичної поведінки розв'язків рівнянь зі степеневими та правильно змінними нелінійностями.

В дисертаційній роботі для кожного з $n+2$ можливих значень параметру λ_0 при виконанні умови $(RN)_{\lambda_0}$ вперше для розглядаємого диференціального рівняння n-го порядку загального виду:

1) встановлено необхідні умови існування $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків;

2) отримано асимптотичні при $t\uparrow\omega$ зображення $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно у неявному вигляді;

3) одержано достатні умови існування $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$-розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями і вирішено питання про кількість таких розв'язків;

4) при незначних додаткових обмеженнях на деякі з функцій φ_{j-1} $(j\in\{1,\ldots,n\})$ з неявних асимптотичних формул для $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$–розв'язків одержано явні асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Питання про фактичне існування $P_\omega(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$– розв'язків зі знайденими асимптотичними зображеннями вирішувалось шляхом зведення за допомогою деяких перетворень до питання про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у систем квазілінійних диференціальних рівнянь і застосуванням для таких систем відомих результатів, що були отримані раніше в роботах В.М. Євтухова і А.М. Самойленка.

Одержані в дисертації результати проілюстровано на прикладі важливого класу нелінійних диференціальних рівнянь n-го порядку виду

$$y^{(n)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i p_i(t)\prod\limits_{j=1}^{n}\varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})}{\sum\limits_{i=k+1}^{m}\alpha_i p_i(t)\prod\limits_{j=1}^{n}\varphi_{ij-1}(y^{(j-1)})},$$

де $\alpha_i\in\{-1;1\}$, $p_i : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_{ij-1} : \Delta_{Y_{j-1}} \longrightarrow]0,+\infty[$ – неперервна і правильно змінна функція порядку σ_{ij-1} при $y^{(j)}\longrightarrow Y_{j-1}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Усі результати є новими, вони математично обґрунтовані й повністю викладені у наукових публікаціях автора.

Ключові слова: диференціальні рівняння n-го порядку загального виду, правильно змінні функції, асимптотичні зображення розв'язків, $P_\omega(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1},\lambda_0)$– розв'язки, необхідні і достатні умови існування.