Лекции по математическому анализу

Анатолий КОРЕНОВСКИЙ

Кафедра математического анализа
Институт математики, экономики и механики

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

31 октября 2011 г.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды

Пусть на множестве E задана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Предположим, что для любого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n \to \infty$.

Пусть на множестве E задана последовательность функций

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

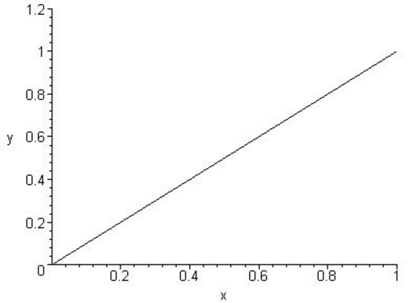
Предположим, что для любого фиксированного $x \in E$ числовая последовательность $f_n(x)$ имеет предел при $n \to \infty$.
Тогда для $x \in E$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$, где f – некоторая функция, определенная на E. Эту функцию называют предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и говорят, что эта последовательность сходится к функции f поточечно.

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.

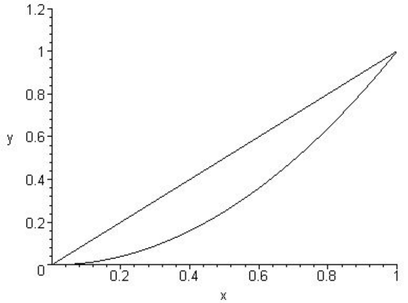
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



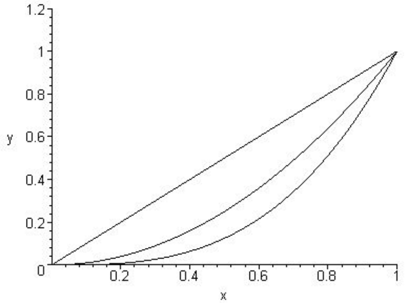
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



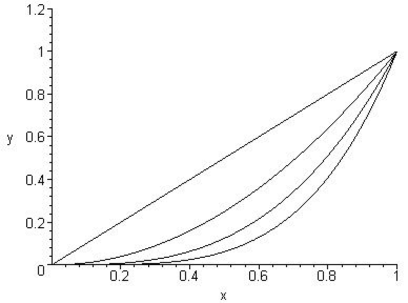
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



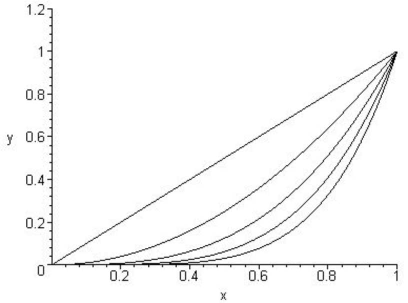
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



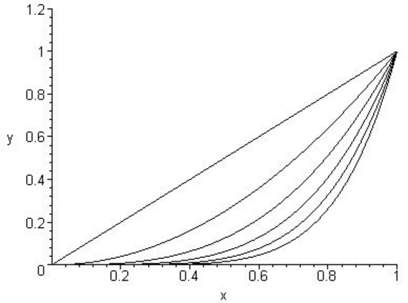
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



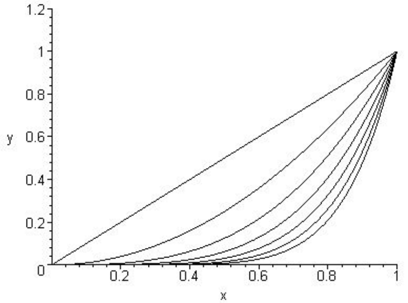
Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$.



Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$.



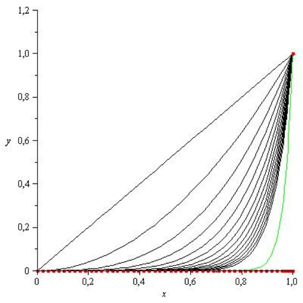
Пример 1.

Если $0 \le x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$
Поэтому $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n =$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



Пример 1.

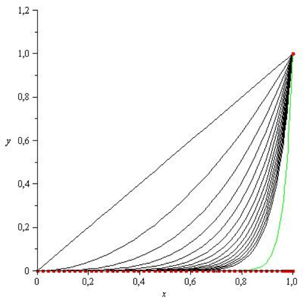
Если $0 \le x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$

Поэтому $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n =$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



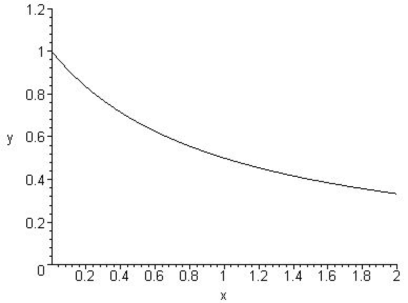
Получили, что последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций $f_n(x) = x^n$ сходится к разрывной функции f. To Note

Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.

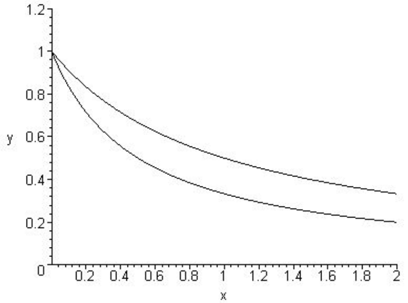
Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



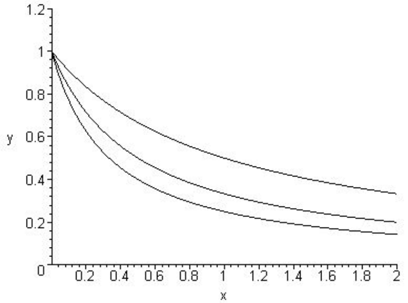
Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



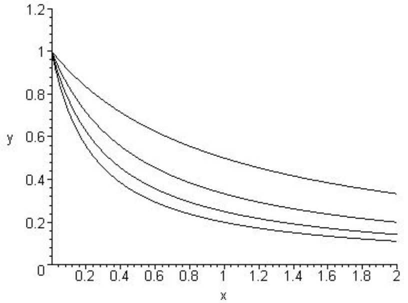
Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



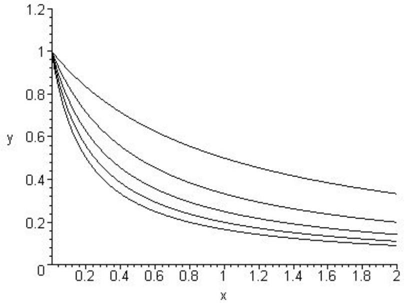
Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



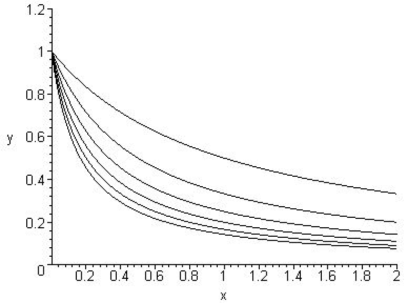
Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.



Пример 2.

Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$.

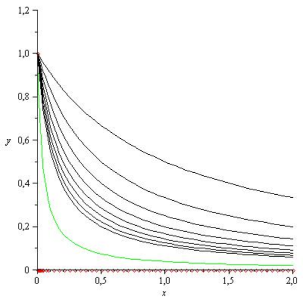


Пример 2.

Итак, для $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$,
имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

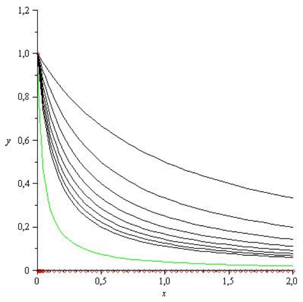


Пример 2.

Итак, для $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $(x \geq 0)$, имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$



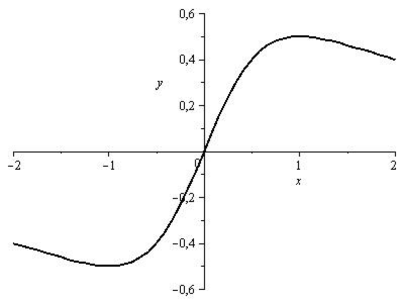
Снова получили, что последовательность непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ функций $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ сходится к разрывной функции f.

Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Каждая функция f_n – нечетная.

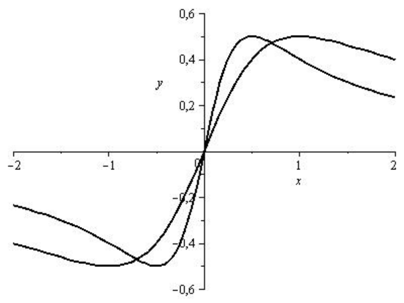
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



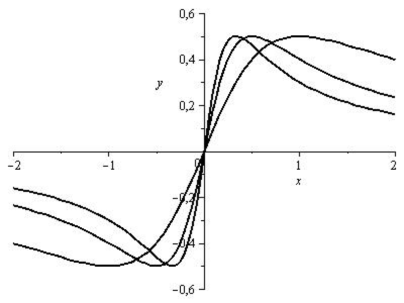
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



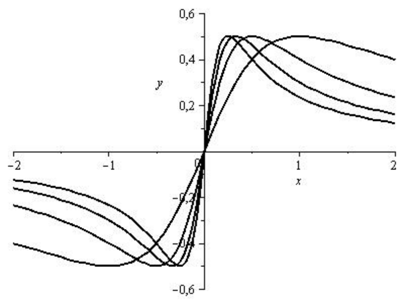
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



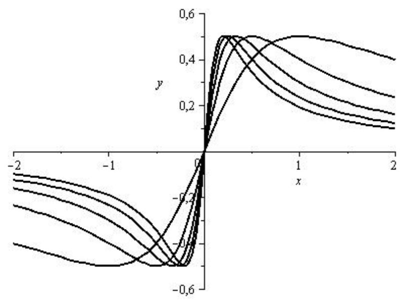
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



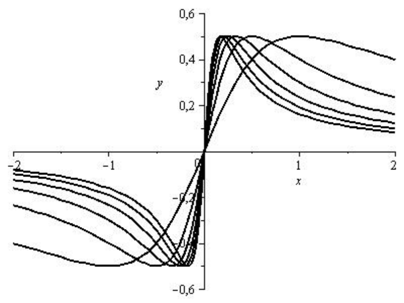
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Каждая функция f_n – нечетная.



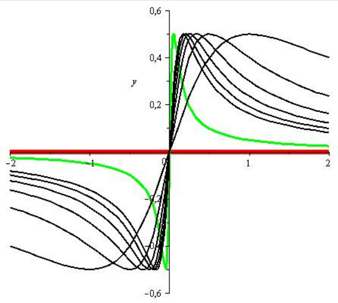
Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Из неравенства

$$2|a| \le 1 + a^2$$

получим, что
$|f_n(x)| \le \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \le \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$.
Если же $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.
Ясно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

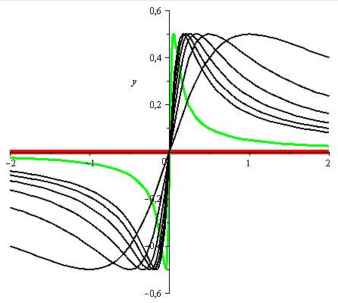


Пример 3.

Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Из неравенства

$$2|a| \le 1 + a^2$$

получим, что
$|f_n(x)| \le \frac{|nx|}{1+|nx|^2} \le \frac{1}{2}$, $(x \in \mathbb{R})$.
Если же $x = \frac{1}{n}$, то $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.
Ясно, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =$



$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теперь последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится к непрерывной функции $f \equiv 0$.

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Предположим, что для каждого фиксированного $x \in E$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится. Обозначим его сумму через $f(x) \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В этом случае будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на множестве E к функции f.

Замечание. Ясно, что поточечная сходимость функционального ряда эквивалентна поточечной сходимости последовательности его частичных сумм $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Пример 4.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $(x \in \mathbb{R})$. При каждом фиксированном $x \neq 0$ этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{1+x^2}$ $(|q| < 1)$. Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \quad (x \neq 0).$$

Если $x = 0$, то, очевидно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 = 0$.

Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

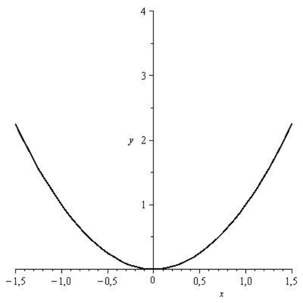
т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



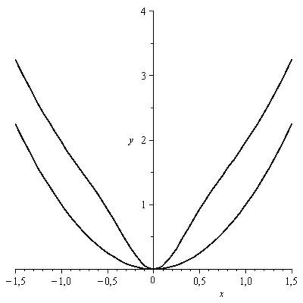
т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

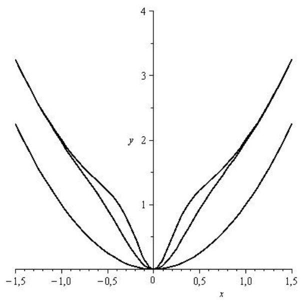
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

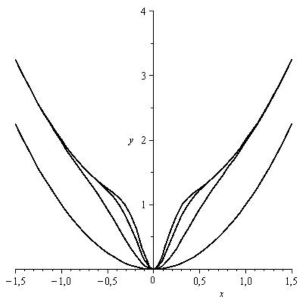


Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



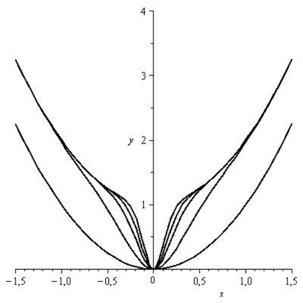
т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.

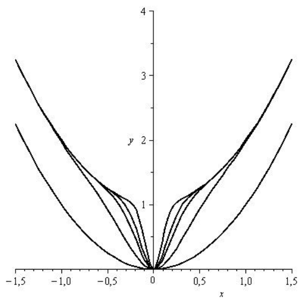
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



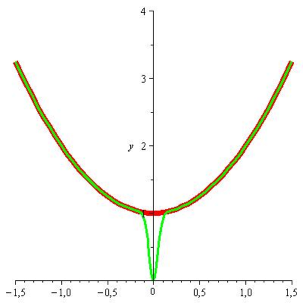
Продолжение примера 4.

Итак,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

т. е. сумма ряда, слагаемые которого – непрерывные функции, оказалась разрывной функцией.



§1. Равномерная сходимость

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций f_n $(n = 1, 2, \dots)$, сходящаяся на E поточечно к функции f. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ **сходится равномерно** к функции f на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий только от ε (и не зависящий от x), что для каждого $n \geq N$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x) : \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x):\ \forall n \geq N\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x): \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x.

Определение поточечной сходимости на множестве E в кванторах можно записать следующим образом:

$$\forall x \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, x): \ \forall n \geq N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

а равномерной сходимости – так:

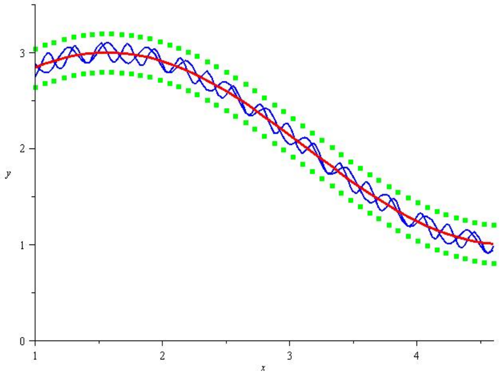
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В определении поточечной сходимости номер N зависит, вообще говоря, от ε и от x, а в определении равномерной сходимости N зависит только от ε и не зависит от x. Иначе говоря, поточечная сходимость будет равномерной, если для заданного $\varepsilon > 0$ номер N можно подобрать так, чтобы он был пригоден сразу для всех $x \in E$.

Геометрический смысл равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \; \forall n \geq N \; \forall x \in E \; \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

состоит в том, что начиная с номера N (т. е. при $n \geq N$) графики функций $f_n(x)$ расположены в ε-полосе графика функции f.



Теперь видно, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем свойство поточечной сходимости, т. е. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.

Теперь видно, что свойство равномерной сходимости не слабее, чем свойство поточечной сходимости, т. е. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. Обратное неверно. Может оказаться, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для $x \in E$ найдется номер $N = N(\varepsilon, x)$, но для всех сразу $x \in E$ номер N, не зависящий от x, может и не существовать.

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(x \in E \equiv [0,1])$. Мы уже видели, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Если бы последовательность $\{x^n\}$ сходилась к функции f равномерно, то неравенство $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших n $(n \ge N(\varepsilon))$ должно было быть выполненным сразу для всех $x \in E$.

Пример 1.

Пусть $f_n(x) = x^n$ $(x \in E \equiv [0,1])$. Мы уже видели, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Если бы последовательность $\{x^n\}$ сходилась к функции f равномерно, то неравенство $|x^n - f(x)| < \varepsilon$ при достаточно больших n $(n \ge N(\varepsilon))$ должно было быть выполненным сразу для всех $x \in E$. Но это не так, поскольку при фиксированном n имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$, так что в любой левой полуокрестности точки $x_0 = 1$ найдется такая точка $x_1 < 1$, что $x_1^n > \frac{1}{2}$.

Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$.

Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \ \forall N \, \exists n \geq N \; (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

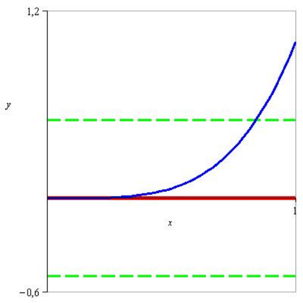
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \forall N \, \exists n \geq N \; (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



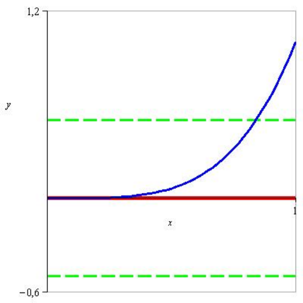
Продолжение примера 1.

Поэтому, если мы возьмем $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, то получим неравенство $|x_1^n - 0| \geq \varepsilon_0$. Окончательно имеем

$$\exists \varepsilon_0 \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \; \forall N \, \exists n \geq N \; (n = N)$$

$$\exists x_1 = x_1(\varepsilon, n) \in E :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$



Это означает, что данная последовательность не является равномерно сходящейся на множестве E.

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$.

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды
Равномерная сходимость

В этом примере "плохие" точки x_1, т. е. такие, в которых выполнено неравенство $\left|f_n(x_1) - f(x_1)\right| \geq \varepsilon_0$, находятся вблизи точки $x_0 = 1$. Если же мы отделимся от x_0, т. е. рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ на множестве $E_\delta = [0, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ – произвольное число, то сходимость данной последовательности к функции $f(x) \equiv 0$ на множестве E_δ уже будет равномерной. Действительно, в этом случае

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon \quad (0 \leq x \leq 1 - \delta),$$

если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

Пример 2.

Для последовательности функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in E \equiv \mathbb{R})$ ранее мы показали, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Пример 2.

Для последовательности функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in E \equiv \mathbb{R})$ ранее мы показали, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$.

Продолжение примера 2

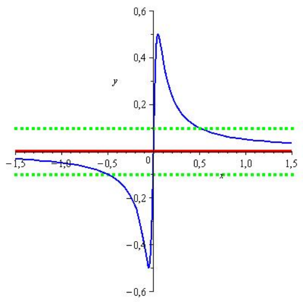
Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.

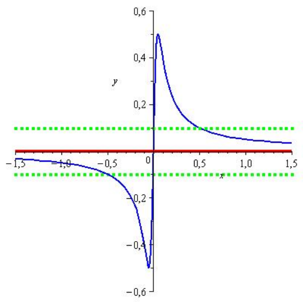
Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



Продолжение примера 2

Однако при фиксированном n наибольшее значение функция $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ достигает в точке $x_n = \frac{1}{n}$ и это значение равно $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ не может быть выполненным сразу для всех $x \in \mathbb{R}$.



Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т. е.

To Note

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right): \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right):$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right): \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right):$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно.

Продолжение примера 2

$$\exists \varepsilon_0 \ \left(\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\right) : \ \forall N \ \exists n \geq N \ (n = N) \ \exists x_1 \ \left(x_1 = \frac{1}{n}\right) :$$

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0.$$

Если же зафиксировать число $\delta > 0$, то нетрудно показать, что на множестве $E_\delta = [\delta, +\infty)$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ сходится равномерно. Действительно, неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon \quad (x \in E_\delta)$$

выполнено, если только $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$ не зависит от $x \in E_\delta$.

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *равномерно сходящимся* на множестве E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Определение. Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если он сходится поточечно на E и последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда на множестве E.

Другими словами, определение равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, сходящегося к функции f на множестве E, можно сформулировать следующим образом.

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого.

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого. Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – остаток после n-го слагаемого.
Тогда $S_n(x) + r_n(x) = f(x)$, а равномерная сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий только от ε), что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Но так как $|S_n(x) - f(x)| = |r_n(x)|$, то получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n \geq N \ \forall x \in E \ \ |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что остаток ряда равномерно стремится к нулю. Таким образом, получили следующее эквивалентное определение равномерной сходимости ряда.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков после n-го слагаемого $\{r_n\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если последовательность его остатков после n-го слагаемого $\{r_n\}$ равномерно сходится к нулю на множестве E.

Это определение более выгодно по сравнению с предыдущим тем, что оно использует лишь слагаемые исходного ряда и не использует сумму самого ряда $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Пример 1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится на интервале $(-1, 1)$, т. к. он представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$. Исследуем его на равномерную сходимость.

Пример 1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится на интервале $(-1, 1)$, т. к. он представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$. Исследуем его на равномерную сходимость. Для этого рассмотрим остаток $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. При фиксированном x и $n \to \infty$ имеем $r_n(x) \to 0$. Это означает, что данный ряд сходится при каждом x, т. е. поточечно.

Продолжение примера 1

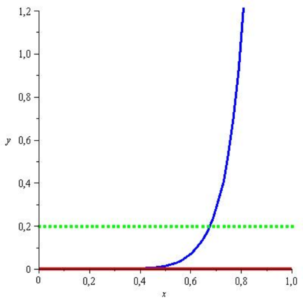
Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения.

Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1,1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.

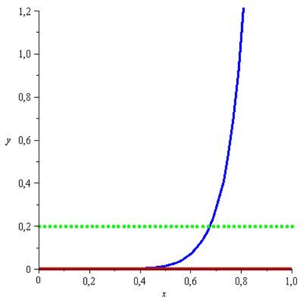
Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1, 1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.



Продолжение примера 1

Если же зафиксировать n и устремить x к $1-0$, то получим, что $\frac{x^{n+1}}{1-x} \to +\infty$, т. е. если x близок к 1, то $r_n(x)$ принимает большие значения. Это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon$ сразу для всех $x \in (-1,1)$ не может быть выполненным, каким бы большим номер n мы ни выбрали.



Таким образом, наш ряд сходится на $(-1,1)$, но неравномерно.

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно.

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Продолжение примера 1

С другой стороны, на любом отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится равномерно. Действительно, в этом случае

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad (x \in [-q, q]).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на $[-q, q]$, т. е. данный ряд равномерно сходится на $[-q, q]$.

Пример 2.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Пример 2.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Имеем

$$r_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)^n}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

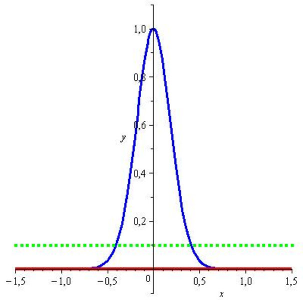
Если x фиксировано, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что ряд является сходящимся при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. он сходится поточечно.

Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.

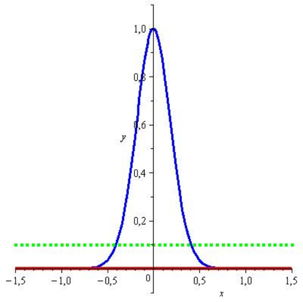
Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.



Продолжение примера 2

Если зафиксируем n, то при $x \to 0$, что $r_n(x) \to 1$, а это означает, что неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} < \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ не может выполняться сразу для всех $x \in \mathbb{R}$, каким бы большим номер n мы ни взяли.



Таким образом, $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, но неравномерно. Следовательно, данный ряд сходится на $\mathbb{R}$ неравномерно.

Замечание. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Рассмотрим величины

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \, .$$

Тогда определение равномерной сходимости этого ряда на множестве E можно сформулировать следующим образом.

Замечание. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Рассмотрим величины

$$\mu_n = \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = \sup_{x \in E} |r_n(x)|.$$

Тогда определение равномерной сходимости этого ряда на множестве E можно сформулировать следующим образом. Данный ряд сходится равномерно на множестве E, если $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n = 0$.

Действительно, если $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\mu_n < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, а значит ряд сходится равномерно.

Действительно, если $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $\mu_n < \varepsilon$, т. е. для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, а значит ряд сходится равномерно. Обратно, если $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю, то для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$. Поэтому и $\mu_n = \sup_{x \in E} |r_n(x)| \leq \varepsilon$, т. е. $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 3.

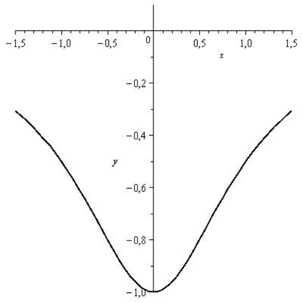
Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

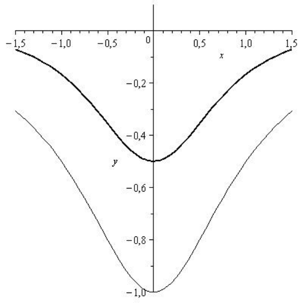
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \le \frac{1}{x^2+n+1} \le \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



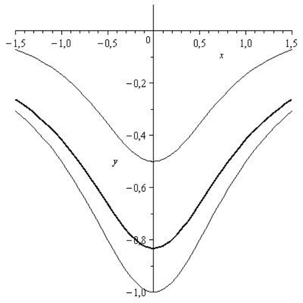
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



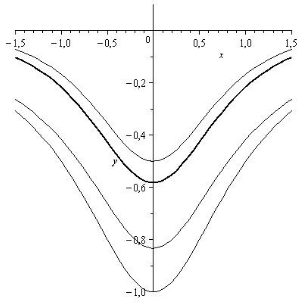
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



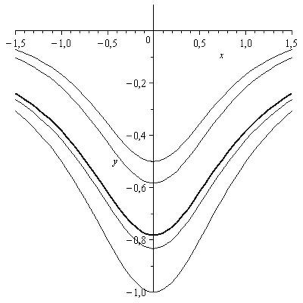
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



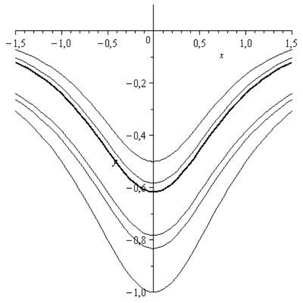
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



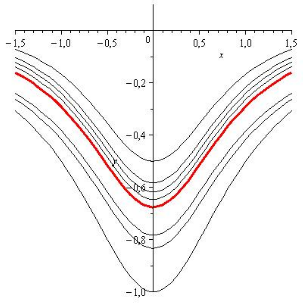
Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.



Пример 3.

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ на множестве $\mathbb{R}$. Данный ряд является рядом лейбницевского типа и поэтому, согласно теореме об оценке остатка ряда лейбницевского типа, $|r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. Таким образом, $\mu_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, и, следовательно, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. To Note 1



Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности).

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходилась на множестве E к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, зависящий только от ε, что для любых $n, m \geq N$ и для любого $x \in E$ было выполнено неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Тема 16. Функциональные последовательности и ряды
Равномерная сходимость

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности).

Для того чтобы последовательность функций $\{f_n\}$ *равномерно сходилась на множестве* E *к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N*, зависящий только от* ε*, что для любых* $n, m \geq N$ *и для любого* $x \in E$ *было выполнено неравенство* $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство.

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N, *зависящий только от* ε, *что для всех* $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ *и для любого* $x \in E$ *выполнялось неравенство* $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$.

Доказанную теорему можно переформулировать для рядов следующим образом.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходился на множестве* E*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N*, зависящий только от* ε*, что для всех* $n \geq N$*,* $p \in \mathbb{N}$ *и для любого* $x \in E$ *выполнялось неравенство* $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$.

Эта теорема вытекает из предыдущей, если учесть, что равномерная сходимость ряда определяется как равномерная сходимость последовательности его частичных сумм.

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{a_n\}$, *такая, что* $|u_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$ *для всех* $x \in E$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд сходится равномерно на* E.

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \in E).$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\{a_n\}$, *такая, что* $|u_n(x)| \leq a_n$ $(n = 1, 2 \dots)$ *для всех* $x \in E$, *и числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд сходится равномерно на* E.

Доказательство.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, рассмотренный выше пример 3 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ показывает, что этот ряд хотя и сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но оценить сверху его слагаемые можно лишь слагаемыми расходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Замечание 2. Признак Вейерштрасса дает достаточное условие не только равномерной, но и абсолютной сходимости ряда. Это сразу следует из неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

<u>**Замечание 3.**</u> Признак Вейерштрасса заключается в том, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где $\alpha_n = \sup\limits_{x \in E} |u_n(x)|$, следует равномерная (и абсолютная) сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве E.

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$.

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \le 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \le \frac{1}{n^2}\frac{\left|n^2x\right|}{1+(n^2x)^2} \le \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Пример 4.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на $\mathbb{R}$. Используя очевидное неравенство $2|a| \leq 1 + a^2$, находим мажорантный числовой ряд

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}\frac{|n^2x|}{1+(n^2x)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный функциональный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

Пример 5.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, поскольку $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$,*

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две функциональные последовательности $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функции $a_n(x)$ ограничены в совокупности, т. е. существует такое M, что $|a_n(x)| \le M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$,*
3. *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на E.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E.

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E *заданы две последовательности функций* $\{a_n(x)\}$ *и* $\{b_n(x)\}$*, такие, что*

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$.*

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости).

Пусть на множестве E заданы две последовательности функций $\{a_n(x)\}$ и $\{b_n(x)\}$, такие, что

1. *при каждом $x \in E$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна,*
2. *функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на E,*
3. *частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ ограничены в совокупности на E, т. е. существует такое число M, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M \ (x \in E,\ n = 1, 2, \dots)$.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на E. to Ex. 6

Доказательства признаков Абеля и Дирихле легко провести, основываясь на критерии Коши и применяя преобразование Абеля (точно так же, как это было сделано при доказательстве признаков Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов).

Доказательства признаков Абеля и Дирихле легко провести, основываясь на критерии Коши и применяя преобразование Абеля (точно так же, как это было сделано при доказательстве признаков Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов).

Рекомендуется провести эти доказательства самостоятельно.

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю.

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле.

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

Пример 6.

Рассмотрим ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность чисел a_n монотонно стремится к нулю. К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ применим признак Дирихле. Для этого рассмотрим суммы $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Имеем

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x =$$

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$.

Продолжение примера 6

$$= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}.$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 2\pi), \quad |S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Если $x \to 0$, то $S_n(x) \to n$, так что в окрестности нуля нарушается равномерная ограниченность сумм $S_n(x)$. Если же $\delta \le x \le 2\pi - \delta$, где $0 < \delta < \pi$, то $|S_n(x)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$ и поэтому на $[\delta, 2\pi - \delta]$ выполнены все условия признака Дирихле, в силу которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Окончание примера 6

На всем интервале $(0, 2\pi)$ признак Дирихле неприменим, но это еще не означает, что ряд сходится неравномерно, поскольку признак Дирихле – лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

Окончание примера 6

На всем интервале $(0, 2\pi)$ признак Дирихле неприменим, но это еще не означает, что ряд сходится неравномерно, поскольку признак Дирихле – лишь достаточное условие равномерной сходимости ряда.

 Покажите самостоятельно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, где последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, где произвольное $0 < \delta < \pi$.

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

Для этого полезно использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] \quad (0 < x < 2\pi)$$

и применить признак Дирихле.

§1.1. Равномерная сходимость и предельный переход

Теорема (о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ *задана последовательность функций* $\{f_n\}$, *сходящаяся к функции* f *равномерно на* $[a, b]$. *Если все функции* f_n *непрерывны в точке* $x_0 \in [a, b]$, *то и предельная функция* f *непрерывна в точке* x_0.

Теорема (о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность функций $\{f_n\}$, сходящаяся к функции f равномерно на $[a, b]$. Если все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in [a, b]$, то и предельная функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить.

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной.

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0, 1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно.

Замечание. В доказанной теореме условие равномерной сходимости нельзя отбросить. В самом деле, выше мы приводили пример последовательности непрерывных функций $f_n(x) = x^n$, которая всюду на $[0,1]$ сходится, но предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна. пример

С другой стороны, требование равномерной сходимости не является необходимым для того, чтобы предельная функция была непрерывной. Другими словами, существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся к непрерывной функции, но неравномерно. Такую последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ мы уже приводили выше в качестве примера. пример

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a, b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.

Доказанная выше теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывных в точке $x_0 \in [a, b]$ функций u_n, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма этого ряда является непрерывной в точке x_0 функцией.

Эта теорема сразу следует из предыдущей, если ее применить к последовательности $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывных в точке x_0 функций как конечной суммы непрерывных функций u_k.

§1.2. Равномерная сходимость и интегрирование

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a, b]$ поточечно к функции f.

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a,b]$ поточечно к функции f.

Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a,b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \text{ ?}$$

Пусть задана последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f_n и пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится на $[a, b]$ поточечно к функции f.
Поставим вопрос: обязана ли функция f быть интегрируемой на $[a, b]$ и верно ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \text{ ?}$$

Отрицательные ответы на эти вопросы дают следующие примеры.

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0, 1]$.

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \dots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \dots, r_n\}$.

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле.

Пример 1.

Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Обозначим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \ldots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на отрезке $[0,1]$, поскольку она имеет лишь конечное число точек разрыва $\{r_1, \ldots, r_n\}$. С другой стороны, легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x)$, где $\mathcal{D}$ – функция Дирихле. Но мы знаем, что функция Дирихле неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Итак, мы построили последовательность интегрируемых функций, сходящуюся к неинтегрируемой функции.

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной.

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

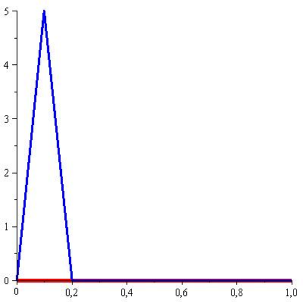
Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

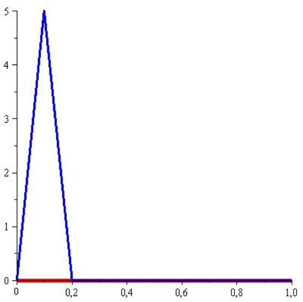
Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



Следующий пример показывает, что даже если предельная функция интегрируема, то предел интегралов не обязан равняться интегралу от предельной функции.

Пример 2.

Положим $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, а на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ и $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ считаем функцию f_n линейной. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, так что предельная функция $f(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$ интегрируема и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.



С другой стороны, легко подсчитать, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, и поэтому предельный переход под знаком интеграла недопустим.

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд?

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\ ?$$

Аналогичный вопрос можно сформулировать и для рядов. Именно, можно ли почленно интегрировать сходящийся ряд? Другими словами, верно ли равенство

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx\ ?$$

Используя построенные выше примеры, легко показать, что ответ на этот вопрос отрицательный в том смысле, что сумма поточечно сходящегося ряда из интегрируемых функций может оказаться неинтегрируемой функцией, а если даже сумма ряда будет функцией интегрируемой, то требуемое равенство все равно нельзя гарантировать.

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности непрерывных функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции f. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности непрерывных функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции f. Тогда существует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком интеграла.

Доказательство.

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о почленном интегрировании ряда с непрерывными слагаемыми).

Пусть $\{u_n\}$ *– последовательность непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *функций такова, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a, b]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

Доказанная теорема для рядов может быть переформулирована следующим образом.

Теорема (о почленном интегрировании ряда с непрерывными слагаемыми).

Пусть $\{u_n\}$ *– последовательность непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *функций такова, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$*. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Доказательство.

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость.

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$.

Из приведенного доказательства теоремы видно, что непрерывность функций f_n была использована лишь для того, чтобы гарантировать их интегрируемость и непрерывность предельной функции f, из которой вытекает ее интегрируемость. Возможность же самого предельного перехода под знаком интеграла обеспечивается условием равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$.
Следующая теорема показывает, что требование непрерывности можно ослабить, и достаточно потребовать лишь интегрируемость.

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности интегрируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к функции f. Тогда предельная функция f интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательности интегрируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность интегрируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций, равномерно на* $[a, b]$ *сходящаяся к функции* f*. Тогда предельная функция* f *интегрируема на* $[a, b]$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство.

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

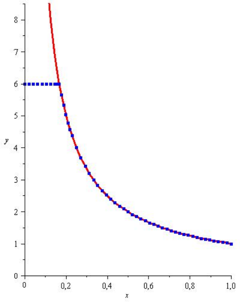
$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0,1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

В завершение приведем еще один пример последовательности интегрируемых функций, поточечно сходящейся к неограниченной, а значит, неинтегрируемой функции.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ n, & 0 < x \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$



Тогда каждая функция f_n интегрируема на $[0,1]$, поскольку она имеет единственную точку разрыва $x_0 = 0$.

Вместе с тем функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ неограничена и, следовательно, неинтегрируема на $[0,1]$.

§1.3. Равномерная сходимость и дифференцирование

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f.

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f.

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, поточечно сходящаяся к функции f. Выше мы приводили примеры, показывающие, что мы не можем гарантировать даже непрерывность функции f. Если же последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то функция f непрерывна.

Зададимся вопросом: можно ли гарантировать дифференцируемость функции f?

Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Пример 1.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$

Пример 1.

Положим

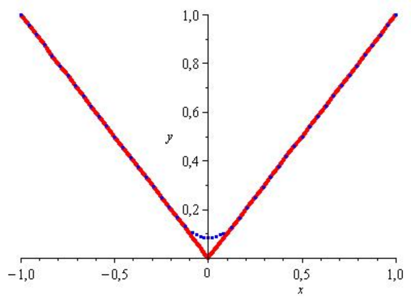
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1, 1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1, 1]$.

Пример 1.

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & |x| \le \frac{1}{n}, \\ |x|, & \frac{1}{n} < |x| \le 1. \end{cases}$$



Легко убедиться в том, что каждая функция f_n дифференцируема на $[-1, 1]$, а последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = |x|$ равномерно на $[-1, 1]$. Вместе с тем предельная функция $f(x) = |x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0 \in [-1, 1]$.

Пример 2.

Последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к функции f, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$ (т. к. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$).

Пример 2.

Последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к функции f, тождественно равной нулю на $\mathbb{R}$ (т. к. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$). Вместе с тем $f_n'(x) = \cos nx$ и эта последовательность не имеет предела при $n \to \infty$, например, в точке $x_0 = \pi$.

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.
Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Первый пример показывает, что предел равномерно сходящейся последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой функцией в некоторой точке x_0, несмотря на то, что существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.
Во втором примере существует $f'(x_0)$, но не существует $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.
Таким образом, для того чтобы гарантировать возможность предельного перехода под знаком дифференцирования, т. е. равенство

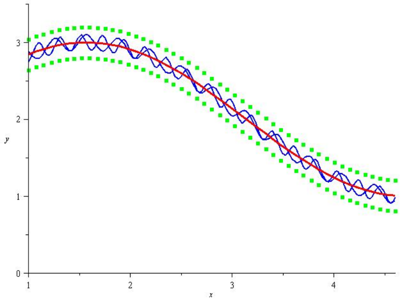
$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x),$$

при естественном условии, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f, мало потребовать равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ к функции f.

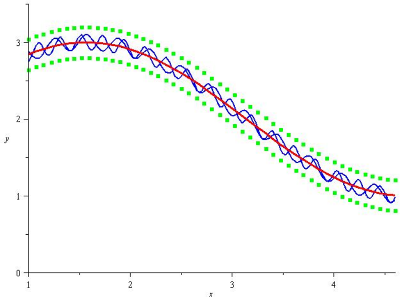
Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения.

Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.

Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Это совершенно естественно и с геометрической точки зрения. Действительно, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что графики функций f_n находятся в ε-полосе графика предельной функции f.



Но в этой полосе графики функций f_n могут быть какими угодно и вовсе не обязательно, чтобы касательные к этим графикам в фиксированной точке x_0 имели какое-то предельное положение, т. е. стабилизировались.

Теорема (о дифференцировании предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Предположим, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится, а функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$*. Тогда исходная последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к непрерывно дифференцируемой функции* f*, причем для любого* $x \in [a, b]$ *справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Теорема (о дифференцировании предела последовательности непрерывно дифференцируемых функций).

Пусть $\{f_n\}$ *– последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$ *функций. Предположим, что в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится, а функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$*. Тогда исходная последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к непрерывно дифференцируемой функции* f*, причем для любого* $x \in [a, b]$ *справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Доказательство.

Доказанную теорему для рядов можно переформулировать следующим образом.

Доказанную теорему для рядов можно переформулировать следующим образом.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{u_n\}$, такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на всем отрезке $[a, b]$, его сумма является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции.

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему к последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

В двух последних теоремах мы предполагали непрерывность производных. Это существенно использовалось при доказательстве, т. к. оно основывалось на применении формулы Ньютона – Лейбница. Вместе с тем, при сформулированных условиях мы смогли гарантировать непрерывность производной предельной функции. Следующая теорема не содержит условия непрерывности производных функций f_n и, естественно, не гарантирует непрерывность производной у предельной функции.

Теорема (о дифференцировании предела последовательности дифференцируемых функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ *задана последовательность дифференцируемых функций* $\{f_n\}$, *сходящаяся в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *и такова, что функциональная последовательность* $\{f_n'\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$. *Тогда последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится на всем отрезке* $[a, b]$ *к некоторой функции* f, *причем эта функция* f *дифференцируема на* $[a, b]$ *и справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Теорема (о дифференцировании предела последовательности дифференцируемых функций).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность дифференцируемых функций $\{f_n\}$, сходящаяся в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ и такова, что функциональная последовательность $\{f_n'\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на всем отрезке $[a, b]$ к некоторой функции f, причем эта функция f дифференцируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Доказательство.

Упражнение. Сформулируйте и докажите самостоятельно аналог последней теоремы для рядов.

§1.4. Перестановка предельных переходов

Теорема (о предельном переходе в пределе функциональной последовательности).

Пусть на множестве E *задана последовательность функций* $\{f_n\}$*, равномерно сходящаяся к функции* f *на* E*. Пусть* x_0 *– предельная точка множества* E *и при каждом* n *существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = y_n$*. Тогда последовательность* $\{y_n\}$ *имеет конечный предел* y_0 *и существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$*.*

Теорема (о предельном переходе в пределе функциональной последовательности).

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к функции f на E. Пусть x_0 – предельная точка множества E и при каждом n существует $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = y_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный предел y_0 и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Доказательство.

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что при указанных условиях можно менять местами предельные переходы, а именно,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Замечание. Доказанная теорема утверждает, что при указанных условиях можно менять местами предельные переходы, а именно,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

В случае, если условия теоремы не выполнены, такое равенство может оказаться неверным.

Аналог доказанной теоремы для рядов имеет следующий вид.

Теорема (о почленном переходе к пределу).

Пусть на множестве E задан равномерно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Пусть x_0 – предельная точка множества E и для любого n существует $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = \alpha_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится и существует

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Замечание. Эта теорема дает достаточные условия, при которых сумму и предел можно менять местами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Доказательство критерия Коши

<u>Необходимость.</u> Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если возьмем произвольные $n, m \geq N$, то для любого $x \in E$ получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие теоремы (условие Коши).

Продолжение доказательства критерия Коши

<u>Достаточность.</u> Пусть выполнено условие Коши.

Продолжение доказательства критерия Коши

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Зафиксируем $x \in E$ и получим числовую последовательность $\{f_n(x)\}$, которая, согласно условию Коши, является фундаментальной и, следовательно, сходящейся. Обозначим ее предел через $f(x)$. Так как $x \in E$ произвольное, то, проделав эту операцию для всех $x \in E$, получим функцию $f(x)$.

Окончание доказательства критерия Коши

Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к $f(x)$ равномерно на E. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Зафиксируем $n \geq N$, $x \in E$ и устремим $m \to \infty$. Тогда получим $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Это неравенство выполнено для любого $n \geq N$ и для всех $x \in E$, а это и означает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на E. $\blacksquare$

Доказательство признака Вейерштрасса

В силу условия теоремы, имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \quad (x \in E).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по условию, то, в силу критерия Коши для числовых рядов, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \ge N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. Но тогда и неравенство $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ будет выполненным для всех $x \in E$, т. е. выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда, в силу которого исходный ряд сходится равномерно на E. $\blacksquare$

Доказательство теоремы о непрерывности предела

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Возьмем произвольное $n \geq N$. Так как f_n непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $|x - x_0| < \delta$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

и теорема доказана. ◼

Доказательство теоремы о предельном переходе под знаком интеграла

Случай непрерывных функций

В силу теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, предельная функция f непрерывна на $[a, b]$, а значит и интегрируема на $[a, b]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Интегрируя это неравенство, получаем, что при всех $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

и теорема доказана. $\blacksquare$

Доказательство теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай непрерывных функций

Эта теорема является простым следствием предыдущей. Действительно, функции $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ непрерывны как суммы конечного числа непрерывных функций u_k, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно на $[a, b]$. Тогда, по уже доказанной теореме,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f_n(x)\,dx \ \to \ \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

Доказательство равенства производится точно так же, как и в предыдущей теореме, при условии, что $\int_a^b f(x)\,dx$ существует. Поэтому достаточно доказать лишь интегрируемость на $[a,b]$ функции f. Для этого воспользуемся критерием интегрируемости в терминах колебаний, согласно которому функция f интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π отрезка $[a,b]$, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$, где $\omega_i(f)$ – колебания функции f на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$.

Продолжение доказательства теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай интегрируемых функций

Зададим $\varepsilon > 0$ и, пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\{f_n\}$, найдем такое N, что для всех $n \geq N$ и для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если $n \geq N$, то

$$\left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|f\left(x'\right) - f_n\left(x'\right)\right| + \left|f_n\left(x'\right) - f_n\left(x''\right)\right| + \left|f_n\left(x''\right) - f\left(x''\right)\right| <$$

$$< \left|f_n\left(x'\right) - f_n\left(x''\right)\right| + 2\varepsilon.$$

Окончание доказательства теоремы о почленном интегрировании ряда

Случай интегрируемых функций

Отсюда следует, что при любом разбиении $\omega_i(f) \le \omega_i\left(f_n\right) + 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i\left(f_n\right)\Delta x_i + 2\varepsilon(b-a).$$

Первое слагаемое справа мало в силу интегрируемости f_n, т. е. существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения Π, диаметр которого $d(\Pi) < \delta$, первое слагаемое справа будет меньшим, чем ε. Поэтому, в силу критерия интегрируемости в терминах колебаний, получаем, что функция f интегрируема на $[a, b]$. $\square$

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$.

Доказательство теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Обозначим $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. По теореме о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций получаем, что функция φ непрерывна на $[a, b]$. Положим $g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$. Применим на отрезке с концами x_0 и x теорему о предельном переходе под знаком интеграла к последовательности $\{f_n'(t)\}$. Тогда получим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right)$$

(последнее равенство справедливо в силу формулы Ньютона – Лейбница).

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

По условию теоремы существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Тогда из равенства $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x_0))$ следует, что существует и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, т. е. мы показали, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$. Обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и получим, что $g(x) = f(x) - f(x_0)$, а так как функция g дифференцируема (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции φ) и $g'(x) = \varphi(x)$ (в силу формулы Ньютона – Лейбница), то отсюда следует, что функция f также дифференцируема и $f'(x) = \varphi(x)$, т. е. функция f имеет производную, эта производная непрерывна и справедливо равенство, которое утверждается в формулировке теоремы.

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Осталось показать, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно на $[a, b]$. Имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \le |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (f(x) - f(x_0))| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\,.$$

Второе слагаемое справа мало при достаточно больших n, а первое оцениваем так:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \left(f_n'(t) - \varphi(t)\right)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|f_n'(t) - \varphi(t)\right|\,dt.$$

Ококнчание доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай непрерывно дифференцируемых функций

Теперь остается учесть, что последовательность $\{f_n'\}$ сходится к функции φ равномерно на $[a, b]$, и тем самым завершается доказательство теоремы.

Зададим $\varepsilon > 0$. По критерию Коши, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n'\}$, существует такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $\varphi_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Тогда $\left|\varphi_{n,m}'(x)\right| < \varepsilon$ и, в силу формулы Лагранжа,

$$\left|\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}\left(x_0\right)\right| \leq \left|\varphi_{n,m}'(\xi)\right| \cdot \left|x - x_0\right| \leq \varepsilon \left|x - x_0\right|.$$

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Отсюда следует, что

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\varphi_{n,m}(x)| \leq |\varphi_{n,m}(x) - \varphi_{n,m}(x_0)| + |\varphi_{n,m}(x_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Из этого неравенства видно, что последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет условию критерия Коши, а значит, она равномерно сходится.

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела
Случай дифференцируемых функций

Обозначим $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее, для $n, m \geq N$ имеем

$$|\varphi_{n,m}(x+h) - \varphi_{n,m}(x)| \leq \varepsilon|h| \quad (x, x+h \in [a,b]).$$

Это неравенство можем переписать так:

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right| \leq \varepsilon.$$

Устремим $n \to \infty$ и тогда получим

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h}\right| \leq \varepsilon \quad (m \geq N).$$

Продолжение доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Зафиксируем $m \geq N$ и найдем такое $\delta > 0$, что для всех h, удовлетворяющих условию $0 < |h| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left| \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - f'_m(x) \right| < \varepsilon.$$

Тогда получим, что

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'_m(x) \right| < 2\varepsilon \quad (0 < |h| < \delta).$$

Если в неравенстве $|f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$ $(n, m \geq N)$ перейдем к пределу при $n \to \infty$ (как уже доказано, он существует), то получим

$$\left| \varphi(x) - f'_m(x) \right| \leq \varepsilon,$$

где обозначено $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

Окончание доказательства теоремы о дифференцировании под знаком предела

Случай дифференцируемых функций

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \varphi(x) \right| \leq 3\varepsilon \quad (0 < |h| < \delta).$$

Это означает, что существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad (x \in [a,b]).$$

$\blacksquare$

Доказательство теоремы о перестановке предельных переходов

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь равномерной сходимостью, найдем такой номер N, что для всех $n, m \geq N$ и для каждого $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Устремляя $x \to x_0$, получаем, что $|y_n - y_m| \leq \varepsilon$ для всех $n, m \geq N$, т. е. последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна. В силу критерия Коши, существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Окончание доказательства теоремы о перестановке предельных переходов

Имеем

$$|f(x) - y_0| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y_0|\,.$$

Если $n \geq N$, то для всех $x \in E$, в силу равномерной сходимости, справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Если x достаточно близко к x_0, т. е. $|x - x_0| < \delta$, то $|f_n(x) - y_n| < \varepsilon$. При $n \geq N$ имеем также $|y_n - y_0| < \varepsilon$. Тогда и $|f(x) - y_0| \leq 3\varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$, а это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. $\blacksquare$