**З.М. Лысенко**

# Методические указания к практическим занятиям по функциональному анализу к разделу «Интегральные операторы»

***для студентов III курса дневной формы обучения направления 6.040201 “Математика”***

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова**

**Институт математики, экономики и механики**

**Кафедра математического анализа**

# Методические указания к практическим занятиям по функциональному анализу к разделу «Интегральные операторы»

***для студентов III курса дневной формы обучения направления 6.040201 “Математика”***

**Одесса**

**2014**

**Учебное издание**

**Лысенко Зоя Михайловна**

**Методические указания к практическим занятиям по функциональному анализу к разделу «Интегральные операторы»**

***для студентов III курса дневной формы обучения направления 6.040201 “Математика”***

**Печатается в авторской редакции**

**З.М. Лысенко, “Методические указания к практическим занятиям по функциональному анализу к разделу «Интегральные операторы»”**

**Составитель:**

**Лысенко З.М.**, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу ОНУ ім. І.І. Мечникова

**Рецензенты:**

**Кореновский А.А.**, доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа ИМЭМ ОНУ им. И.И. Мечникова

**Леончик Е.Ю.**, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа ИМЭМ ОНУ им. И.И. Мечникова

**Башкарёв П.Г.**, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики ОГЭУ

Печатается по решению Ученого Совета ИМЭМ

Протокол № _________________ от _______________

## Содержание

§1. Уравнения Фредгольма 2-го рода……………………………………..5

§2. Уравнения Вольтерра 2-го рода………………………………………15

§3. Уравнение Абеля………………………………………………………20

§4. Понятие о резольвенте………………………………………………...22

§5. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами…………………...26

§6. Общий случай уравнения Фредгольма…………………………………….30

§7. Сопряженное уравнение Фредгольма…………………………..……37

§8. Теоремы Фредгольма……………………………………………………42

§9. Примеры нефредгольмовых интегральных уравнений………………..49

Задания для самостоятельного решения…………………………………55

Литература……………………………………………………………………60

Начало теории интегральных уравнений было заложено в начале 20-го века в работах И.Фредгольма, который исходил из идеи аппроксимации интеграла конечными интегральными суммами. Позже Э.Шмидт предложил новый подход к построению теории линейных интегральных уравнений, основанный на представлении ядра интегрального оператора в виде суммы вырожденного ядра и ядра, малого по норме. Это позволило упростить вывод основных теорем Фредгольма. В настоящее время теория линейных интегральных уравнений Фредгольма излагается в курсе функционального анализа как приложение теории компактных операторов, заложенной Ф.Риссом.

Предлагаемые методические указания состоят из девяти параграфов, в которых рассмотрены свойства интегральных операторов Фредгольма в классе квадратично суммируемых функций, основные методы решений уравнений Фредгольма, теоремы Фредгольма, нефредгольмовые операторы.

Основная часть параграфов построена в форме теоретических и практических упражнений с подробными объяснениями. В конце указаний приведены задания для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов III курса математических специальностей для подготовки к соответствующему модулю по курсу «Функциональный анализ». Их можно использовать также при чтении спецкурсов, связанных с изучением интегральных операторов.

## §1. Уравнение Фредгольма 1-го рода.

Будем рассматривать интегральные уравнения вида:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x),\ -\infty\le a<x<b\le+\infty,\quad (1)$$

в которых $\varphi$ — неизвестная функция из $L_2(a;b)$ , $f$ (свободный член) — заданная функция из $L_2(a;b)$, ядро $K(x,s)$ определено в основном квадрате $\Pi=\{(x,s)\,|\,a<x<b,\quad a<s<b\}$ и подчинено условию:

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dxds = B^2<\infty, \quad (2)$$

то есть $K\in L_2(\Pi)$. Заметим, что переменные $x$ и $s$ мы считаем вещественными, тогда как числовой параметр $\lambda$, функции $\varphi, f$ и $K$ могут принимать, вообще говоря, комплексные значения.

Уравнение (1) называется однородным, если $f(x)\equiv 0$, и неоднородным, если $f(x)\ne 0$.

Уравнение (1) называют уравнением Фредгольма 2-го рода.

Уравнением Фредгольма 1-го рода называют уравнение вида:

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

(здесь неизвестная функция $\varphi$ стоит только под знаком интеграла).

Введем интегральный оператор (оператор Фредгольма)

$$(\boldsymbol{K}\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds,$$

где $\varphi\in L_2(a;b), K\in L_2(\Pi)$.

**Упражнение 1.** Показать, что оператор Фредгольма является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_2(a;b)$ и его норма

$$\|\boldsymbol{K}\|\le B,$$

где число $B$ определяется условием (2).

Решение. Из условия (2), в силу теоремы Фубини, вытекает, что интеграл

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds$$

существует для почти всех $x \in (a;b)$. Тогда из неравенства Коши-Шварца следует:

$$|(\boldsymbol{K}\varphi)(x)|^2 = \left|\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\right|^2 \le \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \cdot \|\varphi\|^2.$$

Отсюда

$$\|\boldsymbol{K}\varphi\|^2 = \int_a^b |(\boldsymbol{K}\varphi)(x)|^2 ds \le \int_a^b \left\{\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \cdot \|\varphi\|^2\right\} dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dsdx \cdot \|\varphi\|^2 = B^2 \cdot \|\varphi\|^2.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{K}\varphi\| \le B \cdot \|\varphi\|$$

и, следовательно,

$$\|\boldsymbol{K}\| \le B.$$

Линейность оператора $\boldsymbol{K}$ следует из линейности интеграла Лебега.

□

**Упражнение 2.** Доказать, что композиция операторов Фредгольма также есть оператор Фредгольма.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — операторы Фредгольма с ядрами, соответственно, $K(x,s)$ и $L(x,s)$, где

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds = B^2 < \infty$$

и

$$\int_a^b \int_a^b |L(x,s)|^2 dxds = D^2 < \infty.$$

Имеем:

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x)=\int_a^b L(x,s)\,ds\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Повторный интеграл

$$\int_a^b |L(x,s)|\,ds\int_a^b |K(s,t)\varphi(t)|\,dt \tag{4}$$

существует, так как внутренний интеграл есть квадратично суммируемая функция от $s$, а тогда ее произведение на квадратично суммируемую функцию $|L(x,s)|$ суммируемо при почти всех $x$. Из существования интеграла (4) вытекает суммируемость функции $|L(x,s)K(s,t)\varphi(t)|$ в основном квадрате $a<s,t<b$ и, в силу теоремы Фубини, в интеграле (3) можно изменить порядок интегрирования:

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x)=\int_a^b \varphi(t)\,dt\int_a^b L(x,s)K(s,t)\,ds$$

Поменяем местами $s$ и $t$:

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x)=\int_a^b \varphi(s)\,ds\int_a^b L(x,t)K(t,s)\,dt\,.$$

Если обозначить

$$\int_a^b L(x,t)K(t,s)\,dt=M(x,s),$$

то

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x)=\int_a^b M(x,s)\varphi(s)\,ds\,.$$

Далее, из неравенства Коши-Шварца

$$|M(x,s)|^2\le\int_a^b |L(x,t)|\cdot|K(t,s)|\,dt\le\int_a^b |L(x,t)|^2\,dt\cdot\int_a^b |K(t,s)|^2\,dt\,.$$

Интегрируем полученное неравенство по $s$:

$$\int_a^b |M(x,s)|^2 ds \le \int_a^b ds \left\{ \int_a^b |L(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |K(t,s)|^2 dt \right\} =$$

$$= \int_a^b |L(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b ds \int_a^b |K(t,s)|^2 dt = B^2 \cdot \int_a^b |L(x,t)|^2 dt.$$

Полученное неравенство интегрируем по $x$:

$$\int_a^b dx \int_a^b |M(x,s)|^2 ds \le B^2 \int_a^b dx \int_a^b |L(x,t)|^2 dt = B^2 D^2.$$

Итак:

$$\int_a^b \int_a^b |M(x,s)|^2 dxds \le B^2 D^2 < \infty.$$

Следовательно оператор $\boldsymbol{LK}$ — Фредгольмов.

□

**Упражнение 3.** Показать, что операторы Фредгольма не коммутируют.

Решение. Пусть $N(x,s)$ — ядро оператора $\boldsymbol{KL}$, $M(x,s)$ — ядро оператора $\boldsymbol{LK}$. При решении упражнения 2 было показано, что

$$N(x,s) = \int_a^b K(x,t) L(t,s) dt,$$

$$M(x,s) = \int_a^b L(x,t) K(t,s) dt.$$

Пусть, например, $a = 0, b = 1, K(x,s) = 1, L(x,s) = x - s.$ Тогда

$$M(x,s) = \int_0^1 (x-t) dt = x - \frac{1}{2},$$

$$N(x,s) = \int_0^1 (t-s) dt = \frac{1}{2} - s.$$

Ясно, что $M(x,s) \ne N(x,s), 0 < x, s < 1.$

$$(\boldsymbol{KL}\varphi)(x) = \int_0^1 N(x,s)\varphi(s) ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - s\right)\varphi(s) ds,$$

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x) = \int_0^1 M(x,s)\varphi(s) ds = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\varphi(s) ds.$$

Выберем $\varphi(x)=1\in L_2(0;1)\Rightarrow$

$$(\boldsymbol{KL}\varphi)(x)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-s\right)ds=0;$$

$$(\boldsymbol{LK}\varphi)(x)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi(s)ds=x-\frac{1}{2}.$$

Значит, $\boldsymbol{KL}\neq\boldsymbol{LK}$.

□

Из упражнения 2 следует, что степень оператора Фредгольма является оператором Фредгольма. Обозначим через $K_n(t,s)$ ядро оператора $\boldsymbol{K}^n$. Тогда

$$(\boldsymbol{K}^n\varphi)(s)=\int_a^b K_n(x,s)\varphi(s)ds.$$

Очевидно, что $K_1(x,s)=K(x,s)$.

Ядро $K_n(x,s)$ называется $n$-м итерированным ядром по отношению к $K(x,s)$. Поскольку

$$\boldsymbol{K}^n\varphi=\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{K}^{n-1}\varphi\right),$$

то, как следует из (3),

$$K_n(x,s)=\int_a^b K(x,t)\cdot K_{n-1}(t,s)dt. \tag{5}$$

Таким образом, (5) — рекуррентная формула для итерированных ядер. В частности,

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)\cdot K(t,s)dt$$

$$K_3(x,s)=\int_a^b K(x,t)\cdot K_2(t,s)dt$$

и т.д.

**Упражнение 4.** Вывести формулу, выражающую итерированные ядра через данное ядро.

Решение. Так как $\boldsymbol{K}^n = \boldsymbol{K}^{n-1} \cdot \boldsymbol{K}$, то

$$K_n(x,s) = \int_a^b K_{n-1}(x,t_{n-1}) \cdot K(t_{n-1},s)\,dt_{n-1},$$

$$K_{n-1}(x,t_{n-1}) = \int_a^b K_{n-2}(x,t_{n-2}) \cdot K(t_{n-2},t_{n-1})\,dt_{n-2}.$$

Отсюда

$$K_n(x,s) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K_{n-2}(x,t_{n-2}) \cdot K(t_{n-2},t_{n-1})\,dt_{n-2} \right\} \cdot K(t_{n-1},s)\,dt_{n-1} =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K_{n-2}(x,t_{n-2}) \cdot K(t_{n-2},t_{n-1}) \cdot K(t_{n-1},s)\,dt_{n-1}dt_{n-2}.$$

По индукции

$$K_n(x,s) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,t_1) \cdot K(t_1,t_2) \ldots K(t_{n-1},s)\,dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1}.$$

□

Перепишем уравнение Фредгольма 2-го рода в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x). \tag{6}$$

Обозначим: $(A\varphi)(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds + f(x)$. Тогда (6) примет вид:

$$\varphi(x) = A\varphi(x). \tag{7}$$

Из уравнения (7) следует, что функция φ(x) – неподвижная точка оператора A. Таким образом, вопрос существования решения уравнения (6) — это вопрос существования неподвижной точки оператора $A$. В полных пространствах, а таковым является пространство $L_2(a;b)$, оператор сжатия имеет и притом единственную неподвижную точку, которую можно найти методом последовательных приближений.

**Упражнение 5.** Исследовать, при каких условиях на параметр $\lambda$ оператор

$$(A\varphi)(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x),$$

действующий в пространстве $L_2(a;b)$, является оператором сжатия.

Решение. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in L_2(a;b)$. Тогда

$$\left|(A\varphi_1)(x)-(A\varphi_2)(x)\right|^2=\left|A\big(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\big)\right|^2=$$

$$=\left|\lambda\int_a^b K(x,s)\big(\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\big)ds\right|^2\le|\lambda|^2\left\{\int_a^b|K(x,s)|\cdot|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds\right\}^2\le$$

$$\le|\lambda|^2\int_a^b|K(x,s)|^2ds\cdot\int_a^b|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|^2ds=|\lambda|^2\int_a^b|K(x,s)|^2ds\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|^2.$$

Отсюда:

$$\|A\varphi_1-A\varphi_2\|^2=\int_a^b|A\varphi_1(x)-A\varphi_2(x)|^2dx\le$$

$$\le\int_a^b\left\{|\lambda|^2\int_a^b|K(x,s)|^2ds\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|^2\right\}dx=$$

$$=|\lambda|^2\int_a^b\int_a^b|K(x,s)|^2dxds\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|^2.$$

Таким образом,

$$\|A\varphi_1-A\varphi_2\|\le|\lambda|\cdot B\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Следовательно, если

$$|\lambda|<\frac{1}{B},$$

то $A$ — оператор сжатия.

□

**Упражнение 6.** Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода (1) при условии, что

$$|\lambda|<\frac{1}{B}.$$

Решение. Пусть $I$ — тождественный оператор: $(I\varphi)(x)=\varphi(x)$ для любой функции $\varphi\in L_2(a;b)$. Тогда уравнение (1) в операторной форме имеет вид:

$$\varphi(x)=(A\varphi)(x),$$

где $A=f(x)I+\lambda\boldsymbol{K}$. Как показано при решении упражнения 5, оператор $A$ — сжимающий. Следовательно, неподвижную точку этого оператора можно искать методом последовательных приближений, а именно: за начальное приближение примем, например, $\varphi_0(x)\equiv f(x)$; далее, если некоторое приближение $\varphi_{n-1}(x)$ уже построено, то положим $\varphi_n(x)=A\varphi_{n-1}(x)\equiv f(x)I+\lambda\boldsymbol{K}\varphi_{n-1}(x)$.

Имеем, следовательно:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}\varphi_0(x)=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}f(x),\\
&\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}(f(x)+\lambda\boldsymbol{K}f(x))=\\
&=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}f(x)+\lambda^2\boldsymbol{K}^2f(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\boldsymbol{K}f(x)+\lambda^2\boldsymbol{K}^2f(x)+\ldots+\lambda^n\boldsymbol{K}^nf(x).
\end{aligned}$$

Согласно принципу сжатых отображений, последовательные приближения $\varphi_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf(x)$ имеют предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf(x)$$

(напомним, что сходимость здесь понимается в среднеквадратичном смысле). Полученный ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf$ будет единственной неподвижной точкой оператора $A$, а значит будет единственным решение уравнения (1).

□

**Определение.** Ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m\boldsymbol{K}^mf$ называют рядом Неймана интегрального уравнения (1).

Таким образом, имеет место следующая

**Теорема 1.** Если ядро интегрального уравнения квадратично суммируемо и $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b \left| K(x,s) \right|^2 dxds,$$

то ряд Неймана для этого уравнения сходится в среднем к квадратично суммируемому решению уравнения (1). Такое решение — единственно.

**Упражнение 7.** Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(s) ds = 1. \tag{8}$$

<u>Решение.</u> Здесь $a = 0, b = 1, f(x) = 1, K(x,s) = 1, B = 1.$ По теореме 1 последовательные приближения для (8) сходятся в круге $|\lambda| < 1.$

Ряд Неймана для уравнения в этом случае имеет вид:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Однако, уравнение (8) можно легко решить, не прибегая к методу последовательных приближений. Действительно, пусть

$$C = \int_0^1 \varphi(s) ds.$$

Тогда из (8) следует:

$$\varphi(x) = 1 + \lambda C, \tag{9}$$

и дело сводится к отысканию неизвестной константы $C$. Подставляя (9) в (8), получаем:

$$(1-\lambda)C = 1.$$

При $\lambda = 1$ это уравнение не разрешимо и, значит, при $\lambda = 1$ интегральное уравнение (8) решений не имеет. Пусть теперь $\lambda \neq 1$. Тогда $C = \dfrac{1}{1-\lambda}$ и, следовательно, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$. Подставив эту функцию $\varphi$ в (8), найдем, что равенство выполнено. Заметим, что при $|\lambda| \geq 1$ ряд Неймана расходится, и метод последовательных приближений не применим.

□

**Упражнение 8.** Исследовать на разрешимость интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(s)\,ds = f(x). \tag{10}$$

(в отличие от упражнения 7, свободный член есть произвольная функция из $L_2(0;1)$).

Полагаем по-прежнему

$$C = \int_0^1 \varphi(s)\,ds,$$

что дает нам $\varphi(x) = f(x) + \lambda C$; проинтегрировав это равенство в пределах от 0 до 1, получим уравнение для определения $C$:

$$(1-\lambda)C = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{11}$$

Если $\lambda \neq 1$, то

$$C = \frac{1}{1-\lambda} \int_0^1 f(x)\,dx$$

и

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 f(x)\,dx;$$

подстановкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет уравнению (10), которое, следовательно, разрешимо и имеет единственное решение при $\lambda \neq 1$.

Пусть теперь $\lambda = 1$. Уравнение (11) примет вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

Если функция $f(x)$ такова, что равенство (12) не имеет места, то уравнение (10) не имеет решения. Если же равенство (12) выполнено, то постоянная $C$

остается неопределенной; подстановка показывает, что при $\lambda = 1$ уравнение (10) имеет бесконечное множество решений вида

$$\varphi(x) = f(x) + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

□

## §2. Уравнения Вольтерра 2-го рода.

Уравнение Фредгольма (1) будем называть уравнением Вольтера 2-го рода, если нижний предел интегрирования $a$ конечен, а ядро $K(x,s)$ обращается в нуль при $s > x$. Поэтому в уравнении Вольтера

$$(\boldsymbol{K}\varphi)(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + \int_x^b K(x,s)\varphi(s)ds =$$

$$= \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds$$

Таким образом, уравнение Вольтерра имеет вид:

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

Будем предполагать, что ядро ограничено:

$$|K(x,s)| \le M$$

в треугольнике $\{(x,s): a \le x \le b, a \le s \le x\}$, а свободный член $f \in L_1(a;b)$.

**Упражнение 9.** Показать, что для $m$-й итерации $K_m(x,s)$ ядра $K(x,s)$ уравнения Вольтерра имеет место оценка:

$$|K_m(x,s)| \le \frac{M^m (x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \text{ где } s < x. \tag{13}$$

<u>Решение.</u> Пусть $m = 2$. Имеем

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)dt.$$

Если $s > x$, то при $t < s$ $K(t,s) = 0$, если же $t > s$, то тем более $t > x$ и тогда $K(x,t) = 0$. В обоих случаях подынтегральная функция равна нулю и $K_2(t,s) = 0$.

Пусть теперь $s < x$. Тогда

$$K_2(x,s) = \int_a^s K(x,t)K(t,s)dt + \int_s^x K(x,t)K(t,s)dt + \int_x^b K(x,t)K(t,s)dt =$$
$$= \int_s^x K(x,t)K(t,s)dt.$$

По индукции мы получим, что для любого $m$

$$K_m(x,s) = \begin{cases} 0, & s > x, \\ \int_s^x K_{m-1}(x,t)K(t,s)dt, & s < x. \end{cases}$$

Докажем (13). При $m = 1$ (13) выполняется. Пусть (13) выполняется для $m-1$ :

$$\left|K_{m-1}(x,s)\right| \le \frac{M^{m-1}(x-s)^{m-2}}{(m-2)!} \ .$$

Тогда

$$\left|K_m(x,s)\right| = \left|\int_s^x K_{m-1}(x,t)K(t,s)dt\right| \le$$
$$\le \int_s^x \left|K_{m-1}(x,t)\right| \cdot \left|K(t,s)\right|dt \le \int_x^s \frac{M^m(x-t)^{m-2}}{(m-2)!}dt = \frac{M^m}{(m-1)!}(x-s)^{m-1}.$$

□

**Упражнение10.** Доказать, что ряд Неймана

$$f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \left(\boldsymbol{K}^m f\right)(x) \tag{14}$$

сходится в $L_1(a;b)$ и его сумма является решением уравнения Вольтерра 2-го рода.

<u>Решение.</u> Из упражнения 9 следует, что

$$\left|K_m(x,s)\right| \le \frac{M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Отсюда

$$\left|\lambda^m \left(\boldsymbol{K}^m f\right)(x)\right| = |\lambda|^m \left|\int_a^x K_m(x,s) f(s) ds\right| \le$$

$$\le |\lambda|^m \int_a^x \left|K_m(x,s)\right| \cdot \left|f(s)\right| ds \le \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} \int_a^b \left|f(s)\right| ds.$$

Так как ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!}$$

сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (14) сходится равномерно и абсолютно. Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \left(\boldsymbol{K}^m f\right)(x)$$

и покажем, что эта функция будет решением уравнения Вольтерра. Последовательные приближения связаны рекуррентным соотношением:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\left(\boldsymbol{K}\varphi_{n-1}\right)(x),$$

то есть

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_{n-1}(s) ds. \qquad (15)$$

Так как

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \left(\boldsymbol{K}^m f\right)(x),$$

то $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на $(a;b)$. Ядро $K(x,s)$ ограничено, поэтому

$$K(x,s)\varphi_{n-1}(s) \underset{n\to\infty}{\to} K(x,s)\varphi(s)$$

равномерно по $s$. Отсюда следует, что в (15) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Выполнив предельный переход, найдем, что

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds.$$

Решение $\varphi(x)$ суммируемо, так как оно получено сложением суммируемой функции $f(x)$ и ограниченной функции

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \boldsymbol{K}^m f(x);$$

ограниченность этой функции следует из оценки:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m (\boldsymbol{K}^m f)(x)\right| \le \int_a^b |f(s)|\,ds \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^m M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \int_a^b |f(s)|\,ds \cdot |\lambda| \cdot M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(|\lambda| M (b-a)\right)^{m-1}}{(m-1)!} = \int_a^b |f(s)|\,ds \cdot |\lambda| \cdot M \cdot e^{|\lambda| M (b-a)}$$

□

**Упражнение 11.** Доказать, что уравнение Вольтерра имеет единственное решение.

<u>Доказательство.</u> Пусть уравнение Вольтерра имеет два суммируемых решения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Их разность $w(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$w(x) = \lambda(\boldsymbol{K}w)(x).$$

Отсюда

$$w(x) = \lambda^2 \left(\boldsymbol{K}^2 w\right)(x)$$

$$\ldots\ldots$$

$$w(x) = \lambda^m \left(\boldsymbol{K}^m w\right)(x),$$

то есть

$$w(x) = \lambda^m \int_a^b K_m(x,s) w(s)\,ds.$$

Функция $w(x) \in L_1(a;b)$, так как $\varphi, \psi \in L_1(a;b)$.

Используя решение упражнения 10, получаем оценку:

$$|w(x)| = \left|\lambda^m \int_a^b K_m(x,s)w(s)\,ds\right| \le |\lambda|^m \int_a^b |K_m(x,s)|\cdot|w(s)|\,ds \le$$

$$\le |\lambda|^m \frac{M^m (b-a)^{m-1}}{(m-1)!} \int_a^b |w(s)|\,ds,$$

где $m$ — любое натуральное.

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим $|w(x)| \le 0$, откуда следует, что $w(x)$ эквивалентна нулю.

□

Из упражнений 10 и 11 вытекает следующая

**Теорема 2.** Если свободный член уравнения Вольтерра суммируем в промежутке $(a;b)$, то это уравнение имеет суммируемое на $(a;b)$ решение, которое при любом значении параметра $\lambda$ можно построить по методу последовательных приближений. Суммируемое решение уравнения Вольтерра единственно.

**Замечание.** Если отказаться от требования суммируемости решения в теореме 2, то утверждение о единственности решения перестает быть верным. П.С. Урысоном были построены примеры уравнений Вольтерра, имеющих, кроме одного суммируемого решения, еще бесконечное множество несуммируемых решений. Приведем один из таких примеров. Положим $a=0, b=1, f(x)\equiv 0$ и зададим ядро равенством

$$K(x,s) = \begin{cases} se^{\frac{1}{x^2}-1}, & \textit{если } s < xe^{1-\frac{1}{x^2}}, \\ x, & \textit{если } xe^{1-\frac{1}{x^2}} \le s \le x, \\ 0, & \textit{если } s > x. \end{cases}$$

В основном квадрате $0 \le x \le 1, 0 \le s \le 1$ ядро ограничено:

$$0 \le K(x,s) \le x \le 1.$$

Уравнение

$$\varphi(x)-\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds=0$$

имеет суммируемое решение φ(x), эквивалентное нулю; в силу теоремы 2 других суммируемых решений это уравнение не имеет. В то же время оно имеет бесконечное множество несуммируемых решений

$$\varphi(x)=\frac{C}{x},$$

где $C$ — произвольная константа. В этом легко убедиться простой подстановкой.

## §3. Уравнение Абеля

Одно из первых интегральных уравнений было изучено Абелем. Это уравнение имело вид:

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}}ds=f(x).$$

Будем также называть уравнением Абеля несколько более общее уравнение

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}ds=f(x), \qquad (16)$$

где $0<\alpha<1,\ f\in C^1[a;b]$. Уравнение (16) можно рассматривать как уравнение Вольтерра 1-го рода с неограниченным ядром специального вида.

Уравнение (16) решается следующим образом. Допустим, что существует решение этого уравнения. Заменим в уравнении $x$ на $t$, обе части полученного равенства умножим на $\dfrac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по $t$ в пределах от $a$ до $x$:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}ds=\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\equiv F(x).$$

В повторном интеграле изменим порядок интегрирования:

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha}} = F(x). \tag{17}$$

Во внутреннем интеграле сделаем подстановку $y = \dfrac{t-s}{x-s}$. Тогда

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}} =$$

$$= \int_0^1 y^{(1-\alpha)-1}(1-y)^{\alpha-1}dy = B(1-\alpha,\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Отсюда и из уравнения (17) следует

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt. \tag{18}$$

Таким образом, решение уравнение (16), если оно существует, необходимо представляется формулой (18). Отсюда также следует единственность решения уравнения Абеля.

Докажем теперь, что функция (18) на самом деле является решением уравнения (16). Подставим эту функцию в левую часть уравнения (16) и положим

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \int_a^x \frac{F'(s)}{(x-s)^{\alpha}}\,ds = g(x). \tag{19}$$

Достаточно доказать, что $g(x) = f(x)$. Рассматривая уравнение (19) как уравнение Абеля с неизвестной $F'(x)$ и применяя к этому уравнению только что описанный прием, получим

$$F'(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(s)\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds = \frac{d}{dx}\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Отсюда:

$$\int_a^x F'(s)\,ds = F(x) - F(a) = \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Учитывая, что $F(a) = 0$, получим:

$$F(x)=\int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt .$$

С другой стороны,

$$F(x)=\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt .$$

Таким образом,

$$\int_a^x \frac{w(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt=0, \text{ где } w(t)\overset{d}{\equiv}g(t)-f(t).$$

Полученное уравнение есть однородное уравнение Абеля с неизвестной $w(x)$. Оно имеет очевидное решение $w(x)$, эквивалентное нулю, которое, как доказано выше, единственно. Таким образом, $w(x)$, эквивалентное нулю, откуда $g(x)=f(x)$почти всюду на [a,b].

## §4. Понятие резольвенты.

Вернемся к уравнению Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x).$$

Пусть $|\lambda|<\frac{1}{B}$. Тогда это уравнение имеет единственное квадратично суммируемое решение, которое можно представить в виде ряда Неймана

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left(\boldsymbol{K}^m f\right)(x),$$

или, подробнее,

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b K_m(x,s)f(s)ds . \tag{20}$$

Наша ближайшая цель — доказательство того, что в ряде (20) можно переставить знаки суммы и интегрирования.

Выполним пока эту перестановку формально:

$$f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)f(s)ds .$$

**Упражнение 12.** Доказать, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$$

сходится при $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ в среднем в основном квадрате.

<u>Доказательство.</u> Согласно (2),

$$\|K(x,s)\|_{L_2(\Pi)} = B.$$

Взяв в упражнении 2 в качестве $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}^{n-1}$, получим рекуррентное соотношение:

$$B_n^2 \le B^2 B_{n-1}^2 \le B^2\left(B^2 B_{n-2}^2\right) < \ldots < \underbrace{B^2 \cdot B^2 \ldots B^2}_{n} = B^{2n}.$$

Отсюда

$$B_n \le B^n.$$

Тогда

$$\left\|\sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^{m-1} K_m(x,s)\right\| \le \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^{m-1} \|K_m(x,s)\| \le \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^{m-1} B^m \le \sum_{m=n+1}^{\infty} |\lambda|^{m-1} B^m =$$

$$= B \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(|\lambda| \cdot B\right)^{m-1} = B \frac{\left(|\lambda| B\right)^{n+1}}{1 - |\lambda| B} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

**Определение.** Сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$ называется резольвентой ядра $K(x,s)$ или уравнения (1) и обозначается через $\Gamma(x,s,\lambda)$, так что

$$\Gamma(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$$

(напомним, что резольвента определена в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$).

Поскольку ряд сходится в $L_2(\Pi)$, то резольвента $\Gamma(x,s,\lambda) \in L_2(\Pi)$.

**Упражнение 13.** Доказать, что

$$\int_a^b \Gamma(x,s,\lambda) f(s) ds = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} \int_a^b K_m(x,s) f(s) ds.$$

Доказательство.

$$\left\|\int_a^b \Gamma(x,s,\lambda)\, f(s)ds-\sum_{m=1}^{n}\lambda^{m-1}\int_a^b K_m(x,s)\, f(s)ds\right\|^2=\left\|\int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)\, f(s)ds\right\|^2=$$

$$=\int_a^b\left|\int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)\, f(s)ds\right|^2 dx.$$

Внутренний интеграл оценим по неравенству Коши-Шварца, а затем воспользуемся неравенством треугольника и ограниченностью оператора К:

$$\left\|K^n\varphi\right\|\le B^n\left\|\varphi\right\|.$$

Тогда получим:

$$\int_a^b\left|\int_a^b \sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)\, f(s)ds\right|^2 dx\le\| f\|^2\int_a^b\int_a^b\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)\right|^2 dxds=$$

$$=\| f\|^2\left\|\sum_{m=n+1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)\right\|^2\le\| f\|^2\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}|\lambda|^{m-1}B^m\right)^2=$$

$$=\| f\|^2 B^2\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(|\lambda|B\right)^{m-1}\right)^2=\| f\|^2 B^2\left(\frac{\left(|\lambda|B\right)^n}{\lambda-|\lambda|B}\right)^2\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

□

Из (20) и упражнения 13 следует, что решение уравнения Фредгольма можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x)= f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,s,\lambda)\, f(s)ds.$$

**Замечание.** Ряд

$$\Gamma(x,s,\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)$$

определяет резольвенту в круге $|\lambda|<\dfrac{1}{B}$ комплексной плоскости для почти всех значений $x$ и $s$. Строго говоря, резольвенту, хотя она и представляется степенным рядом, нельзя считать аналитической функцией от $\lambda$ в упомянутом круге, так как при некоторых $x$ и $s$ ряд может и расходиться.

**Упражнение 14.** С помощью резольвенты найти решение уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\left(xe^s\right)\varphi(s)ds=1,\text{ где } |\lambda|<\sqrt{\frac{2}{e-1}}.$$

Решение. $K(x,s)=xe^s$. Согласно (5)

$$K_m(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K_{m-1}(t,s)dt,$$

$$K_2(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K(t,s)dt=\int_0^1 xe^t\cdot te^s dt=xe^s\int_0^1 te^t dt=xe^s.$$

Ясно, что все итерированные ядра будут иметь вид:

$$K_m(x,s)=xe^s.$$

Тогда резольвента имеет вид:

$$\Gamma(x,s,\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)=xe^s\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}=xe^s\frac{1}{1-\lambda}.$$

Решением уравнения будет

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\Gamma(x,s,\lambda)f(s)ds=1+\lambda\int_0^1\frac{xe^s}{1-\lambda}\cdot 1ds=$$

$$=1+\frac{\lambda x}{1-\lambda}\int_0^1 e^s ds=1+\frac{\lambda x}{1-\lambda}(e-1).$$

Отметим, что

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 xe^s dxds=\int_0^1 xdx\int_0^1 e^s ds=\frac{e-1}{2}$$

и, как следует из условия, $|\lambda|<\dfrac{1}{B}=\sqrt{\dfrac{2}{e-1}}$.

## §5. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.

Ядро $K(x,s)$ называется вырожденным, если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от $x$, а другая только от $s$:

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(s). \tag{21}$$

Можно считать, что функции $a_k(x)$, также, как и функции $b_k(s)$, между собой линейно независимы (в противном случае можно было бы уменьшить число слагаемых в сумме (21)). Будем считать, что $a_k, b_k \in L_2(a;b)\left(k=\overline{1,n}\right)$. Тогда $K(x,s) \in L_2(\Pi)$.

Подставив в интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds - f(x) = 0 \tag{22}$$

выражение (21), получим:

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds - f(x) = 0.$$

Допустим, что уравнение (22) имеет решение. Обозначим

$$C_k = \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds.$$

Тогда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x). \tag{23}$$

Следовательно, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к определению постоянных $C_k \left(k=\overline{1,n}\right)$. Из (23) получаем:

$$\varphi(s)b_k(s) = f(x)b_k(s) + \lambda \sum_{m=1}^{n} C_m a_m(s)b_k(s),$$

$$\int_a^b \varphi(s)b_k(s)ds = \int_a^b f(x)b_k(s)ds + \lambda \sum_{m=1}^{n} C_m \int_a^b a_m(s)b_k(s)ds.$$

Обозначим:

$$\int_a^b f(x)b_k(s)ds = f_k, \int_a^b a_m(s)b_k(s)ds = \alpha_{km}.$$

Тогда получаем систему:

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^{n} \alpha_{km} C_m = f_k, \quad k = \overline{1,n}\ . \tag{24}$$

Если эта система неразрешима, то интегральное уравнение (16) также неразрешимо. Предположим, что (24) имеет решение $C_1,...,C_n$. Подставим эти коэффициенты в равенство (23) и докажем, что построенная таким образом функция $\varphi(x)$ есть решение уравнения (22). Действительно, подставив в (22) выражение (23) и произведя очевидные преобразования, приведем левую часть уравнения к виду

$$\lambda\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\left\{C_k-\int_a^b b_k(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{m=1}^{n} C_m a_m(s)\right]ds\right\},$$

что равно нулю в силу уравнений (24).

Таким образом, интегральное уравнение (16) и системы линейных уравнений (18) эквивалентны. Определитель системы (18) равен

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & ... & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & ... & -\lambda\alpha_{2n} \\ ... & .... & ... & .... \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & ... & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Определитель $D(\lambda)$ есть многочлен относительно $\lambda$ степени не выше $n$, который отличен от тождественного нуля, так как $D(0)=1$. Следовательно, $D(\lambda)$ имеет не более $n$ различных корней.

Если $\lambda$ не совпадает ни с одним из этих корней, то наше интегральное уравнение с вырожденным ядром имеет решение при любом свободном члене, и это решение единственное; соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Если же $\lambda$ совпадает с одним из корней определителя $D(\lambda)$, то при произвольно взятом свободном члене интегральное уравнение, вообще говоря, неразрешимо.

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет при этом нетривиальные решения. Установим вид этих решений. Так как определитель системы (24) равен нулю, то система имеет некоторое число $p\,(1\le p\le n)$

линейно независимых нетривиальных решений. Пусть это будут $C_k^{(j)},\ k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p}$.

Тогда функции

$$\varphi_j(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(j)} a_k(x)$$

являются нетривиальными решениями однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds=0, \tag{26}$$

ядро которого определено формулой (21).

Как известно, всякое решение однородной системы, соответствующей системе (24), имеет вид:

$$C_k=\sum_{j=1}^{p} J_j C_k^{(j)},$$

где $J_j$ — произвольные постоянные.

Учитывая эквивалентность системы (24) и уравнения (22), легко убедиться в том, что общее решение уравнения (26) при значении $\lambda$, совпадающем с каким-либо корнем определителя $D(\lambda)$, имеет вид

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{p} J_j\varphi_j(x),$$

где $J_j$ — произвольные постоянные.

**Упражнение 15.** Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t\right)\varphi(t)\,dt=x.$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\varphi(t)\,dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\varphi(t)\,dt+x.$$

Введем обозначения:

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\varphi(t)\,dt,\;C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt,\;C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\varphi(t)\,dt\,. \tag{27}$$

Тогда интегральное уравнение примет вид:

$$\varphi(x)=C_1\lambda x+C_2\lambda\sin x+C_3\lambda\cos x+x\,. \tag{28}$$

Подставляя (28) в равенства (27), получим

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)\cos t dt,$$

$$C_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)t^2 dt,$$

$$C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)\sin t dt,$$

или

$$C_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt\right)-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t dt-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt=\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt+C_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cdot t^2 dt\right)-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cdot t^2 dt=\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t dt+C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных $C_1,C_2,C_3$:

$$\begin{cases} C_1-\lambda\pi C_3=0,\\ C_2+4\lambda\pi C_3=0,\\ -2\lambda\pi C_1-\lambda\pi C_2+C_3=0. \end{cases} \tag{29}$$

Определитель этой системы

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda\\ 0 & 1 & 4\pi\lambda\\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0\,.$$

Система (29) имеет единственное решение

$$C_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\;C_2=-\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\;C_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Подставляя найденные значения в (28), получим решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\left(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x\right) + x.$$

□

## §6. Общий случай уравнения Фредгольма.

Решение интегрального уравнения с невырожденным ядром можно заменить решением двух интегральных уравнений, одно из которых разрешимо методом последовательных приближений (или через резольвенту), а другое уравнение имеет вырожденное ядро.

Рассмотрим уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds = f(s), \tag{30}$$

где $\int_a^b\int_a^b \left|K(x,s)\right|^2 dxds = B^2 < \infty$.

Пусть $\varphi_k(x)\,(k=1,2,...)$ — полная ортонормированная система в $L_2(a;b)$. Тогда система

$$\varphi_k(x)\varphi_m(s),\ k,m=1,2,... \tag{31}$$

ортонормирована и полна в основном квадрате $\Pi = (a;b)\times(a;b)$. Отсюда ядро $K(x,s)$ раскладывается в ряд Фурье по функциям (31):

$$K(x,s) = \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km}\varphi_k(x)\varphi_m(s), \tag{32}$$

(ряд сходится по норме пространства $L_2(\Pi)$).

При этом имеет место равенство Парсеваля:

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\left|A_{km}\right|^2 = B^2. \tag{33}$$

Зададим произвольное $R>0$ и будем рассматривать уравнение (30) при условии $|\lambda| \le R$.

Из ряда (32) выделим частичную сумму

$$K''(x,s)=\sum_{k,m=1}^{n} A_{km}\varphi_k(x)\varphi_m(s).$$

Ясно, что $K''(x,s)$ — вырожденное ядро.

Положим

$$K'(x,s)\overset{d}{=}K(x,s)-K''(x,s).$$

Ряд Фурье функции $K'(x,s)$ является остатком ряда Фурье функции $K(x,s)$:

$$K'(x,s)=\sum_{k>n,m>n} A_{km}\varphi_k(x)\varphi_m(s).$$

Равенство Парсеваля в этом случае имеет вид:

$$\sum_{k>n,m>n} \left|A_{km}\right|^2 = D^2 < \infty, \tag{34}$$

где

$$D^2=\int_a^b\int_a^b \left|K'(x,s)\right|^2 dxds.$$

Ряд (34) является остатком сходящегося ряда (33) и потому его сумма сколь угодно мала при достаточно больших $n$. Выберем $n$ настолько большим, чтобы было

$$D<\frac{1}{2R}.$$

Тогда

$$|\lambda|D<\frac{1}{2}.$$

Таким образом, ядро $K(x,s)$ представлено в виде суммы двух ядер:

$$K(x,s)=K'(x,s)+K''(x,s), \tag{35}$$

из которых первое имеет характер «малого ядра», а второе — характер вырожденного ядра. Подставим (35) в уравнение (30), которое перепишем следующим образом:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K'(x,s)\varphi(s)ds = f(x)+\lambda\int_a^b K''(x,s)\varphi(s)ds. \qquad (36)$$

Положим

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K'(x,s)\varphi(s)ds=\psi(x). \qquad (37)$$

Чтобы выразить $\varphi(x)$ через новую неизвестную функцию $\psi(x)$, надо решить интегральное уравнение (37). Так как $|\lambda|D<\frac{1}{2}$, то, по теореме 1, уравнение (37) разрешимо и имеет единственное решение. Пусть $\Gamma'(x,s,\lambda)$ — резольвента уравнения (37). Тогда решение этого уравнения запишется в виде:

$$\varphi(x)=\psi(x)+\lambda\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda)\psi(s)ds. \qquad (38)$$

Подставив (38) в (36), получим новое интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (30):

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K''(x,s)\left\{\psi(x)+\lambda\int_a^b \Gamma'(s,t,\lambda)\psi(t)dt\right\}ds = f(x). \qquad (39)$$

Докажем, что ядро уравнения (39) вырожденное. Изменим порядок интегрирования в двойном интеграле уравнения (39):

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b \psi(s)\left\{K''(x,s)+\lambda\int_a^b K''(x,t)\Gamma'(t,s,\lambda)dt\right\}ds = f(x)\ . \qquad (40)$$

Ядром этого уравнения является выражение, стоящее в фигурных скобках. $K''(x,s)$ — вырожденное ядро. Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int_a^b K''(x,t)\Gamma'(t,s,\lambda)dt=\int_a^b \sum_{k,m=1}^{n} A_{km}\varphi_k(x)\varphi_m(t)\Gamma'(t,s,\lambda)dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\int_a^b \sum_{m=1}^{n} A_{km}\varphi_m(t)\Gamma'(t,s,\lambda)dt.$$

Получим сумму произведений функций, из которых одна зависит только от $x$, а другая только от $s$. Введем обозначения:

$$\varphi_k(x) = a_k(x),$$

$$\sum_{m=1}^{n} A_{km}\left\{\varphi_m(s) + \lambda\int_a^b \Gamma'(s,t,\lambda)\varphi_m(t)dt\right\} = b_k(s,\lambda).$$

Тогда ядро уравнения (39) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(s,\lambda).$$

Уравнение (33) теперь записывается в виде

$$\psi(x) - \lambda\int_a^b \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(s,\lambda)\right\}\psi(s)ds = f(x). \tag{41}$$

Укажем теперь второй способ сведения общего уравнения Фредгольма к уравнению с вырожденным ядром. Правую часть уравнения (36) обозначим через $F(x)$ и будем рассматривать ее как величину известную. Мы получим тогда уравнение с параметром, удовлетворяющим условию $|\lambda| B' < 1$; решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda) F(s)ds.$$

Подставив сюда вместо $F(x)$ его значение, получим,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda) f(s)ds + \lambda\int_a^b K''(x,s)\varphi(s)ds +$$

$$+\lambda^2\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda)ds\int_a^b K''(s,t)\varphi(t)dt.$$

В двойном интеграле изменим порядок и обозначение переменных интегрирования. Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \lambda\int_a^b \left\{K''(x,s) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x,t,\lambda) K''(t,s)dt\right\}\varphi(s) = \\ = f(x) + \lambda\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda) f(s)ds.\end{aligned} \tag{42}$$

Аналогично предыдущему легко доказать, что уравнение (42) имеет вырожденное ядро. Заметим, что свободный член этого уравнения равен

$$f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma'(x,s,\lambda) f(s)\,ds\ .$$

Вернемся к уравнению (41). Обозначим

$$\alpha_{km}=\alpha_{km}(\lambda)=\int_a^b a_m(s) b_k(s,\lambda)\,ds,$$

$$C_k=\int_a^b \psi(s)\, b_k(s,\lambda)\,ds,$$

$$f_k=\int_a^b f(s) b_k(s,\lambda)\,ds.$$

По способу, изложенному в §5, для коэффициентов $C_k$ получается система линейных уравнений:

$$C_k-\lambda\sum_{m=1}^{n}\alpha_{km}C_m=f_k\ ,\ k=1,2,...,n\ . \tag{43}$$

Определитель этой системы:

$$D_R(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & ... & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & ... & -\lambda\alpha_{2n} \\ ... & .... & ... & .... \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & ... & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix},\ |\lambda|\le R.$$

Если $\lambda$ таково, что $D_R(\lambda)\ne 0$, то система (42) разрешима, каковы бы ни были $f_k (k=\overline{1,n})$ и решение ее единственно, а тогда исходное интегральное уравнение (30) также разрешимо и имеет единственное решение. Действительно, как следует из §5, уравнение (41) имеет единственное решение вида

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x).$$

Подставив значение $\psi(x)$ в формулу (38), мы найдем решение $\varphi(x)$ уравнения (24). Если $D_R(\lambda)\ne 0$, а $f$(x)=0 почти всюду, то (30) имеет только тривиальное решение.

Пусть теперь $D_R(\lambda)=0$. Тогда система (43), вообще говоря, неразрешима, а значит, вообще говоря, неразрешимо уравнение (30). Итак, пусть $D_R(\lambda)=0$. Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0. \tag{44}$$

Указанным выше способом заменим его однородным уравнением для вспомогательной неизвестной функции $\psi(x)$ (достаточно в (41) положить *f(*x)=0:

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(s)\psi(s)ds=0. \tag{45}$$

Это уравнение, в свою очередь, сводится к однородной системе алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю. Тогда эта система имеет нетривиальные решения. Через $r$ обозначим ранг матрицы системы. Тогда число линейно независимых решений этой системы будет равно $p=n-r, 1\le p\le n$.

Обозначим линейно независимые решения однородной системы через

$$C^{(j)}=\left(C_1^{(j)},C_2^{(j)},...,C_n^{(j)}\right),\ j=\overline{1,p}\ .$$

Тогда решения однородного уравнения (45) будут:

$$\psi^{(j)}(x)=\sum_{k=1}^n C_k^{(j)}a_k(x),\quad j=\overline{1,p}. \tag{46}$$

Отсюда решения уравнения (44) найдутся по формуле (38):

$$\varphi^{(j)}(x)=\psi^{(j)}(x)+\lambda\int_a^b\Gamma'(x,s,\lambda)\psi^{(j)}(s)ds,\quad j=\overline{1,p}.$$

**Упражнение 16.** Доказать, что $\varphi^{(j)}(x)$, j=$\overline{1,p}$, линейно независимы.

<u>Доказательство.</u> Допустим противное. Пусть существуют такие константы $\alpha^{(j)}$, что

$$\sum_{j=1}^p\alpha^{(j)}\varphi^{(j)}(x)\equiv 0.$$

Составим аналогичную сумму для функций $\psi^{(j)}(x)$. В силу соотношения $\psi^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x) - \lambda \boldsymbol{K}' \varphi^{(j)}$, имеем:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} \varphi^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} \{\varphi^{(j)}(x) - \lambda \boldsymbol{K}' \varphi^{(j)}\} =$$

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} \varphi^{(j)}(x) = \lambda \boldsymbol{K}' \left( \sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} \varphi^{(j)}(x) \right) \equiv 0.$$

Подставляя в полученное тождество вместо $\psi^{(j)}(x)$ их значения (46) и меняя порядок суммирования, получим:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} \sum_{k=1}^{n} C_k^{(j)} a_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} C_k^{(j)} \equiv 0.$$

Так как функции $a_k(x)$ линейно независимы, то отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} C_k^{(j)} = 0, k = \overline{1, n}.$$

Запишем это в виде векторного равенства:

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha^{(j)} C^{(j)} = 0.$$

Так как векторы $C^{(j)}$ линейно независимы, то необходимо $\alpha^{(j)} = 0,\ j = \overline{1, p}$. Таким образом, $\varphi^{(j)}(x)$ линейно независимы.

□

Итак, если $D_R(\lambda) = 0$, то однородное уравнение (44) имеет $p$ линейно независимых решений $\varphi^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, p}, \quad 1 \le p \le n$. Тогда все решения (44) имеют вид

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{p} J_j \varphi^{(j)}(x) = 0,$$

где $J_j$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (30), предполагая, что $D_R(\lambda)=0$. Это уравнение в общем случае неразрешимо. Но если оно имеет хотя бы одно решение $\varphi_0(x)$, то таких решений бесконечно много, а именно,

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\sum_{j=1}^{p} J_j\varphi^{(j)}(x) ,$$

где $J_j$ –произвольные постоянные.

**Определение.** Значения параметра $\lambda$, при которых однородное интегральное уравнение (44) имеет только тривиальное решение, будем называть правильным, значение параметра $\lambda$, при котором (44) имеет нетривиальные решения — характеристическим числом.

**Определение.** Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения будем называть собственными функциями этого уравнения.

Из приведенного выше анализа следует:

а) характеристические числа, расположенные в круге $|\lambda|\le R$, совпадают с расположенными в этом круге корнями определителя $D_R(\lambda)$;

б) если $\lambda$ — правильное, то неоднородное интегральное уравнение разрешимо при любом свободном члене и его решение — единственное;

в) данному характеристическому числу соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций;

г) если при характеристическом значении $\lambda$ неоднородное интегральное уравнение разрешимо, то оно имеет бесконечное множество решений.

## §7. Сопряженное уравнение Фредгольма.

Пусть дано уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda(\boldsymbol{K}\varphi)(x)=f(x), \tag{47}$$

где

$$(\boldsymbol{K}\varphi)(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds,$$

при этом $K \in L_2(\Pi)$.

**Упражнение 17.** Найти оператор $\boldsymbol{K}^*$, сопряженный к оператору $\boldsymbol{K}$.

Решение**.** Если $\varphi$ и $\psi$ произвольные квадратично суммируемые функции, то, как следует из определения сопряженного оператора в гильбертовом пространстве,

$$(\boldsymbol{K}\varphi,\psi)=(\varphi,\boldsymbol{K}^*\psi).$$

По определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{K}\varphi,\psi)=\int_a^b(\boldsymbol{K}\varphi)(x)\cdot\overline{\psi(x)}dx=\int_a^b\left\{\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\right\}\overline{\psi(x)}dx=$$

$$=\int_a^b ds\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\overline{\psi(x)}dx=\int_a^b\varphi(s)ds\overline{\int_a^b\overline{K(x,s)}\psi(x)dx}=$$

$$=\int_a^b\varphi(x)dx\overline{\int_a^b\overline{K(s,x)}\psi(s)ds}=\int_a^b\varphi(x)\cdot\overline{(\boldsymbol{K}^*\psi)(x)},$$

где

$$(\boldsymbol{K}^*\psi)(x)=\int_a^b\overline{K(s,x)}\psi(s)ds.$$

□

Обозначим

$$K^*(x,s)=\overline{K(s,x)},$$

т. е. $K^*(x,s)$ получается из данного ядра $K(x,s)$ перестановкой аргументов и заменой полученного выражения на комплексно сопряженне. Например, если $K(x,s)=x+is$, то $K^*(x,s)=\overline{s+ix}=s-ix$. Если ядро вещественное, то . $K^*(x,s)=K(s,x)$.

Из упражнения 17 следует, что сопряженный оператор $\boldsymbol{K}^*$ определяется формулой:

$$(\boldsymbol{K}^*\varphi)(x)=\int_a^b K^*(x,s)\varphi(s)ds.$$

Если $\boldsymbol{K}$ — оператор Фредгольма, то $\boldsymbol{K}^*$ тоже есть оператор Фредгольма, поскольку

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dxds = \int_a^b\int_a^b \left|\overline{K(s,x)}\right|^2 dsdx = B^2 .$$

**Упражнение 18.** Доказать, что

$$(\lambda \boldsymbol{K})^* = \bar{\lambda}\boldsymbol{K}^* .$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$(\lambda \boldsymbol{K}\varphi,\psi) = \left(\boldsymbol{K}\varphi,\bar{\lambda}\psi\right) = \left(\varphi,\boldsymbol{K}^*\left(\bar{\lambda}\psi\right)\right) = \left(\varphi,\left(\bar{\lambda}\boldsymbol{K}^*\right)\psi\right).$$

Отсюда получаем требуемое.

□

**Упражнение 19.** Доказать, что

$$K_n^*(x,s) = \overline{K_2(s,x)}.$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку

$$(\boldsymbol{KL})^* = \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{K}^* ,$$

то, полагая $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}$ , находим .$\left(\boldsymbol{K}^2\right)^* = \left(\boldsymbol{K}^*\right)^2$. По индукции получаем

$$\left(\boldsymbol{K}^n\right)^* = \left(\boldsymbol{K}^*\right)^n .$$

Отсюда следует соотношение для итерированных ядер:

$$\overline{K_n(s,x)} = K_n^*(x,s) .$$

□

**Определение.** Уравнение

$$w(x) - \bar{\lambda}\int_a^b K^*(x,s)\,w(s)\,ds = g(x) , \qquad (48)$$

где $g(x)$ — произвольная квадратично суммируемая функция, называется сопряженным с данным уравнением (47).

Если $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$, то уравнение (48) разрешимо по методу последовательных приближений, и решение его единственно. Это решение можно построить через резольвенту $\Gamma^*\left(x,s,\overline{\lambda}\right)$ уравнения (48) по формуле

$$w(x) = g(x) + \overline{\lambda}\int_a^b \Gamma^*\left(x,s,\overline{\lambda}\right) g(s)\,ds\,.$$

Резольвента вычисляется по формуле

$$\Gamma^*\left(x,s,\overline{\lambda}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}^{n-1} K_n^*(x,s)\,.$$

Так как (см. упражнение 19)

$$K_n^*(x,s) = \overline{K_n(s,x)}\ ,$$

то

$$\Gamma^*\left(x,s,\overline{\lambda}\right) = \overline{\Gamma(s,x,\lambda)}\,.$$

**Упражнение 20.** Показать, что в случае вырожденного ядра сопряженные интегральные уравнения сводятся к сопряженным системам линейных алгебраических уравнений.

Решение. Пусть ядро уравнения (47) вырожденное:

$$K(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(s)\,.$$

Тогда (см. §5) это уравнение сводится к системе алгебраических уравнений

$$C_k - \lambda \sum_{m=1}^{n} \alpha_{km}\, C_m = f_k, k = \overline{1,n} \qquad (49)$$

где

$$\alpha_{km} = \int_a^b a_m\,(x) b_k(k) dx.$$

Уравнение, сопряженное с уравнением (47), имеет вид

$$w(x)I - \overline{\lambda}\left(\boldsymbol{K}^* w\right)(x) = g(x)\,.$$

Его ядро тоже вырожденное:

$$K^*(x,s) = \sum_{m=1}^{n} \overline{b_m(x)} \cdot \overline{a_m(s)}\,.$$

В таком случае сопряженное уравнение сводится тоже к алгебраической системе. Построим эту систему. Имеем

$$w(x)-\overline{\lambda}\sum_{m=1}^{n}\overline{b_m(x)}\int_a^b a_m(s)w(s)ds=g(x).$$

Обозначим

$$\int_a^b \overline{a_m(s)}\, w(s)ds = c_m.$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$w(x)-\overline{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}c_m\overline{b_m(x)}=g(x).$$

Умножив обе части этого равенства на $\overline{a_k(x)}$ и проинтегрировав в пределах от $a$ до $b$, получим

$$c_k - \overline{\lambda}\sum_{m=1}^{n}\overline{\alpha}_{km}\,\mathrm{c}_m = \mathrm{g_k},\ \mathrm{k}=\overline{1,n}, \tag{44}$$

где

$$g_k=\int_a^b\overline{\alpha_k(x)}g(x)dx.$$

Системы (49) и (50) линейных алгебраических уравнений, соответствующие сопряженным интегральным уравнениям с вырожденными ядрами, являются сопряженными системами.

□

**Упражнение 21.** Доказать, что в общем случае невырожденного ядра сопряженные интегральные уравнения (47) и (48) можно свести к сопряженным линейным системам.

Доказательство. Сведем уравнения (47) и (48) к интегральным уравнениям с вырожденными ядрами. Применив к уравнению (47) формулу (40), получим:

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b\left\{K''(x,s)+\lambda\int_a^b K''(x,t)\Gamma'(t,s,\lambda)dt\right\}\psi(s)ds=f(x). \tag{51}$$

Чтобы преобразовать уравнение (48), заметим, что если ядро $K(x,s)$ разбито на сумму

$$K(x,s)=K'(x,s)+K''(x,s),$$

то, соответственно,

$$K^*(x,s) = K'^*(x,s) + K''^*(x,s),$$

причем ядро $K''^*(x,s)$ вырожденное и

$$\int_a^b\int_a^b \left|K'^*(x,s)\right|^2 dxds = \int_a^b\int_a^b \left|K'(x,s)\right|^2 dxds = B'^2 .$$

Теперь запишем уравнение (48) в виде:

$$w(x) - \bar{\lambda}\int_a^b K'^*(x,s)w(s)ds = g(x) + \bar{\lambda}\int_a^b K''^*(x,s)w(s)ds .$$

Применив второй из способов, указанных в §6, получим (см. уравнение (42)) интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\begin{gathered} w(x) - \bar{\lambda}\int_a^b \left\{K''^*(x,s) + \bar{\lambda}\int_a^b \Gamma'^*\left(x,t,\bar{\lambda}\right)K''^*(t,s)\right\} w(s)ds = \\ = g(x) + \bar{\lambda}\int_a^b \Gamma'^*\left(x,s,\bar{\lambda}\right)g(s)ds. \end{gathered} \tag{52}$$

Вырожденные ядра уравнений (51) и (52) — сопряженные, а в таком случае, как было сказано выше, эти уравнения сводятся к сопряженным алгебраическим системам.

□

## §8. Теоремы Фредгольма.

В анализе свойства фредгольмовых интегральных уравнений приятно представлять в виде так называемых теорем Фредгольма.

**Теорема I.** Уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут иметь только одну бесконечно удаленную предельную точку.

Доказательство. В комплексной плоскости проведем концентрические окружности с радиусами 1, 2, 3, … Эти окружности разбивают плоскость на счетное число областей. В круге любого радиуса $n$ содержится только конечное число характеристических чисел. Но тогда в каждом кольце

$n < |\lambda| \leq n+1$ их содержится конечное число. Таким образом, множество всех характеристических чисел есть счетное объединение конечных множеств.

Предельная точка характеристических чисел не может находится на конечном расстоянии от начала координат — в противном случае нашелся бы круг, который содержал бы бесконечное множество характеристических чисел.

□

**Теорема II.** Если значение $\lambda$ правильное, то уравнение (30) и сопряженное с ним разрешимы при любой правой части и решения каждого этих уравнений единственные. Соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.

Доказательство. Для уравнения (30) эта теорема уже была доказана в §6. Чтобы доказать эту теорему для сопряженного уравнения, достаточно напомнить, что сопряженные уравнения сводятся к сопряженным линейным системам. Если значение $\lambda$ правильное, то определители обеих систем отличны от нуля. Отсюда вытекает, что не только исходное, но и сопряженное интегральное уравнение разрешимо единственным образом.

□

**Теорема III.** Если значение $\lambda$ характеристическое, то однородное интегральное уравнение и сопряженное к нему интегральное уравнение имеют нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения.

Доказательство. Однородные сопряженные интегральные уравнения сводятся к однородным сопряженным системам. Значение $\lambda$ — характеристическое. Поэтому определители указанных систем равны нулю, обе системы имеют нетривиальные решения и число линейно независимых систем одно и то же для обеих систем. Но каждому решению алгебраической системы отвечает решение соответствующего интегрального уравнения и наоборот, а линейно независимым решениям алгебраической системы отвечают линейно независимые решения интегрального уравнения.

□

**Теорема IV.** Для того, чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного интегрального уравнения.

Таким образом, если данное интегральное уравнение имеет вид

$$\varphi(x)-\lambda(K\varphi)(x)=f(x), \tag{53}$$

то теорема IV утверждает, что необходимым и достаточным условием разрешаемости уравнения (53) является равенство

$$(f,w)=0, \tag{54}$$

где $w(x)$ — любое решение сопряженного уравнения

$$w(x)-\bar{\lambda}\left(K^{*}w\right)(x)=0. \tag{55}$$

Теорема IV тривиальна, если значение $\lambda$ правильное: в этом случае $w(x)\equiv 0$, так что условие (54) выполняется автоматически; в то же время, в силу теоремы II, уравнение (53) разрешимо при любой правой части.

Пусть теперь $\lambda$ характеристическое число. Уравнение (53) сведем (см. §6) к уравнению с вырожденным ядром

$$\psi(x)-\lambda(K''+\lambda K''\Gamma'_{\lambda})\psi=f(x), \tag{56}$$

$$\text{где } (\Gamma'_{\lambda}\varphi)(x)=\int_a^b\Gamma'(x,s,\lambda)\varphi(s)ds.$$

Пусть ядро уравнения имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(s).$$

Повторяя рассуждения из §5, сведем уравнение (56) к системе

$$C_k-\lambda\sum_{m=1}^{n}\alpha_{km}C_m=f_k, \tag{57}$$

где

$$f_k = \int_a^b f(x) b_k(x)\,dx,\ k = \overline{1,n}\,.$$

Для разрешимости системы (57) , а с ней и уравнения (53), необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \overline{J}_k = 0, \tag{58}$$

где $J_k \left(k = \overline{1,n}\right)$ — любое решение сопряженной с (57) однородной системы

$$J_k - \overline{\lambda} \sum_{m=1}^{n} \overline{\alpha}_{km} J_m = 0. \tag{59}$$

Осталось показать, что условия (58) и (54) эквивалентны. Условие (58) приводится к виду

$$\int_a^b f(x) \sum_{k=1}^{n} \overline{J}_k b_k(x)\,dx = \left( f, \sum_{k=1}^{n} J_k \overline{b}_k \right) = 0\,.$$

Функции

$$\sum_{k=1}^{n} J_k \overline{b}_k(x)$$

совпадают с решениями уравнения (55). Действительно, уравнение (55) имеет вид

$$w(x) - \overline{\lambda} \sum_{m=1}^{n} \overline{b_m(x)} \int_a^b \overline{a_m(s)} w(s)\,ds = 0\,.$$

Обозначим

$$\int_a^b \overline{a_m(s)} w(s)\,ds = J_m\,.$$

Тогда

$$w(x) - \overline{\lambda} \sum_{m=1}^{n} J_m \overline{b_m(x)} = 0\,.$$

Умножая на $\overline{a_k(x)}$ и интегрируя, придем к системе (59).

□

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая альтернатива Фредгольма, которой чаще всего пользуются при исследовании интегральных уравнении: либо неоднородное уравнение разрешимо, каковы бы ни была его правая часть, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Первая часть альтернативы имеет место, если параметр правильный, вторая — если параметр собственный.

**Упражнение 17.** Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\left(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t\right)\varphi(t)\,dt=0.$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$\varphi(x)=\lambda\cos^2 x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt+\lambda\cos 3x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt.$$

Введем обозначения

$$C_1=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt,\; C_2=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt. \tag{60}$$

Тогда

$$\varphi(x)=C_1\lambda\cos^2 x+C_2\lambda\cos 3x. \tag{61}$$

Подставляя (61) в (60), получим линейную систему однородных уравнений:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt\right)-C_2\lambda\int_0^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=0,\\ -C_1\lambda\int_0^{\pi}\cos^5 t\,dt+C_2\left(1-\lambda\int_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3t\,dt\right)=0.\end{cases}$$

Так как

$$\int_0^\pi \cos^2 t\cos 2tdt = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^\pi \cos 3t\cos 2tdt = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos^5 tdt = 0,\quad \int_0^\pi \cos^3 t\cos 3tdt = \frac{\pi}{8},$$

то система примет вид

$$\begin{cases} \left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1 = 0, \\ \left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2 = 0. \end{cases} \tag{62}$$

Уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \lambda_2 = \frac{8}{\pi}$ .

При $\lambda = \frac{4}{\pi}$ система (62) примет вид

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 = 0, \\ \frac{1}{2}C_2 = 0. \end{cases}$$

откуда $C_2 = 0, C_1$ — произвольно. Собственная функция будет $\varphi_1(x) = C_1\lambda\cos^2 x$, или, полагая $C_1\lambda = 1$, получим $\varphi_1(x) = \cos^2 x$.

При $\lambda = \frac{8}{\pi}$ система (62) примет вид

$$\begin{cases} (-1)\cdot C_1 = 0, \\ 0\cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0, C_2$ — произвольно и, значит, собственная функция будет $\varphi_2(x) = C_2\lambda\cos 3x$ или, полагая $C_2\lambda = 1$, получим $\varphi_2(x) = \cos 3x$.

□

**Упражнение 18.** Показать, что однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)t\varphi(t)=0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Имеем

$$\varphi(x)=\lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)dt.$$

Полагая

$$C=\int_0^1 t\varphi(t)dt, \tag{63}$$

получим

$$\varphi(x)=C\lambda(3x-2). \tag{64}$$

Подставляя (64) в (63), получим

$$\left\{1-\lambda\int_0^1\left(3t^2-2t\right)dt\right\}C=0.$$

Так как $\int_0^1\left(3t^2-2t\right)dt=0$, то получаем, что $C=0$ и, следовательно $\varphi(x)\equiv 0$.

Итак, данное однородное уравнение при любых $\lambda$ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x)=0$, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

□

**Упражнение 19.** Показать, что уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\left(\sqrt{x}t-\sqrt{t}x\right)\varphi(t)=0$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Имеем

$$\varphi(x)=C_1\lambda\sqrt{x}-C_2\lambda x, \tag{65}$$

где

$$C_1=\int_0^1 t\varphi(t)dt,\ C_2=\int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt. \tag{66}$$

Подставляя (65) в (66), получим

$$\begin{cases} \left(1-\frac{2}{5}\lambda\right)C_1+\frac{\lambda}{3}C_2=0, \\ -\frac{\lambda}{2}C_1+\left(1+\frac{2}{5}\lambda\right)C_2=0. \end{cases} \tag{67}$$

Определитель этой системы

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{150}\ .$$

Если $\lambda\in\boldsymbol{R}$, то $D(\lambda)\neq 0$, откуда из (67) получаем $C_1=C_2=0$. Значит, для всех действительных $\lambda$ данное уравнение имеет лишь одно тривиальное решение.

□

## §9. Примеры нефредгольмовых интегральных уравнений.

В этом параграфе будут приведены примеры интегральных уравнений, для которых требование квадратичной суммируемости ядра в основном квадрате будет нарушаться. Иными словами, мы рассмотрим примеры нефредгольмовых интегральных уравнений. Будет показано, что свойства таких уравнений отличаются, вообще говоря, от свойств интегральных уравнений Фредгольма.

$1^\circ$. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-s|}\varphi(s)ds=f(x). \tag{68}$$

Ядро этого уравнения $K(x,s)=e^{-|x-s|}$ не квадратично суммируемо, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x,s)|^2 dxds=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|x-s|}ds,$$

где внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-s|}ds = \int_{-\infty}^{x} e^{-2(x-s)}ds + \int_{x}^{+\infty} e^{-2(s-x)}ds = 1.$$

Уравнение будем решать с помощью преобразования Фурье. Для этого умножим уравнение на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixt}$ и проинтегрируем по $x$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\varphi(x)dx = \Phi(t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x)dx = F(t)$$

и вычислим двойной интеграл

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|}\varphi(s)dsdx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)ds\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|}dx.$$

Во внутреннем интеграле сделаем замену $x = s + y$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt-|x-s|}dx = e^{-ist}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt-|y|}dy =$$

$$= e^{-ist}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{y(1-it)}dy + \int_{0}^{+\infty} e^{-y(1+it)}dy\right] = \frac{2e^{-ist}}{1+t^2}.$$

Теперь

$$\mathrm{I} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\left(1+t^2\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist}\varphi(s)ds = \frac{2}{1+t^2}\Phi(t).$$

Мы приходим к уравнению:

$$\left(1 - \frac{2\lambda}{1+t^2}\right)\Phi(t) = F(t).$$

Если $\lambda < \frac{1}{2}$, то $1 - \frac{2\lambda}{1+t^2} \neq 0$. В этом случае

$$\Phi(t) = \frac{1+t^2}{1+t^2-2\lambda}F(t) \qquad (60)$$

и, применяя обратное преобразование Фурье, мы приходим к решению исходного интегрального уравнения (68)

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\Phi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{1+t^2}{1+t^2-2\lambda}F(t)dt. \qquad (70)$$

Если же $\lambda\geq\frac{1}{2}$, то функция $\Phi(t)$, определяемая формулой (69), вообще говоря, не суммируема, а в таком случае уравнение (68) неразрешимо. Итак, значения параметра, при которых нефредгольмово уравнение (68) не всегда имеет решение, не изолированы, а заполняют луч $\lambda\geq\frac{1}{2}$. Напомним, что для уравнений Фредгольма такая ситуация невозможна: из теорем Фредгольма I и II вытекает, что значения $\lambda$, для которых уравнение Фредгольма не всегда разрешимо, расположены изолировано.

Заметим еще, что значения $\lambda>\frac{1}{2}$, при которых уравнение (68) может оказаться неразрешимым, не являются характеристическими числами этого уравнения. Действительно, если $f(x)\equiv 0$, то $F(t)\equiv 0$, а тогда из уравнений (69) и (70) вытекает, что $\varphi(x)=0$. Таким образом, при любом $\lambda$ однородное уравнение (68) имеет только тривиальное решение. Это значит, что интегральное уравнение (68) не имеет характеристических чисел.

$2^\circ$. Пусть $\Gamma$ — замкнутый гладкий контур, расположенный в комплексной плоскости. Интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\, t\in\Gamma$$

расходится в обычном смысле, однако он существует, если его рассматривать в смысле главного значения. Именно, вырежем точку $t$ окружностью радиуса $\varepsilon$ с центром в $t$; оставшуюся часть контура $\Gamma$ обозначим через $\Gamma_\varepsilon$. Сингулярный интегральный оператор $S$ определяется формулой:

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}v.p.\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

Интеграл $\frac{1}{\pi i} v.p.\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ называется сингулярным интегралом. Сингулярные интегралы играют большую роль в теории функций комплексного переменного и в ее приложениях, благодаря известной теореме о предельных значениях интеграла типа Коши, доказанной Ю.В. Сохоцким, и, позднее, И. Племелем. Пусть $z$ — произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на $\Gamma$. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} v.p.\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где $\varphi \in L_2(\Gamma)$. У аналитической вне $\Gamma$ функции $\Phi(z)$ почти всюду на $\Gamma$ существуют конечные угловые предельные значения $\Phi^+(t) = \lim\limits_{\substack{z\to t \\ z\in D^+}} \Phi(z)$ и $\Phi^-(t) = \lim\limits_{\substack{z\to t \\ z\in D^-}} \Phi(z)$. Здесь $D^+$ — область на плоскости, ограниченная кривой $\Gamma$ , $D^-$ — область, дополняющая $D^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости. Эти предельные значения выражаются формулами Ю.В. Сохоцкого — И.Племеля:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{aligned} \tag{71}$$

или, в операторной форме,

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + S)\varphi,$$

$$\Phi^-(t) = \frac{1}{2}(-\mathrm{I} + S)\varphi.$$

Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична внутри $\Gamma$ и непрерывна вплоть до $\Gamma$. Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ вне $\Gamma$ и, следовательно, $\Phi^-(t) \equiv 0$. Отсюда и из формул (71)

$$\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \equiv 0. \tag{72}$$

Эта формула показывает, что $\lambda = 1$ есть характеристическое число сингулярного интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \frac{\lambda}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0, \tag{73}$$

и этому характеристическому числу соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций — ими являются предельные на $\Gamma$ значения функций, аналитических внутри $\Gamma$ и непрерывных вплоть до $\Gamma$.

Пусть теперь $\varphi(z)$ аналитична вне $\Gamma$, непрерывна вплоть до $\Gamma$ и $\varphi(\infty) = 0$. Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ внутри $\Gamma$, $\Phi^{+}(t) \equiv 0$ и

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \equiv 0. \tag{74}$$

Это равенство означает, что уравнение (73) имеет еще одно характеристическое число $\lambda = -1$, которому также соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций; на этот раз ими являются предельные значения функций, аналитических вне $\Gamma$, обращающихся в нуль на бесконечности и непрерывных вплоть до $\Gamma$. Как видим, нефредгольмово уравнение (73) существенно отличается от фредгольмовых уравнений, у которых, как следует из теоремы III Фредгольма, каждому характеристическому числу соответствует только конечное число линейно независимых собственных функций.

$3^{\circ}$. Пусть $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ — единичный круг и пусть $|\lambda| > 1$. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \frac{\lambda}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{t}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau - \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{t}{\tau}\varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{75}$$

Докажем, что этому уравнению удовлетворяет функция

$$\varphi(t) = \frac{t}{\lambda t - 1}. \tag{76}$$

Имеем

$$\varphi(t)=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda(\lambda t-1)}$$

Функция $\varphi_1(z)=\dfrac{1}{\lambda}$ аналитична внутри $\Gamma$, а функция $\varphi_2(z)=\dfrac{1}{\lambda(\lambda z-1)}$ аналитична вне $\Gamma$ и $\varphi_2(\infty)=0$. Обе функции непрерывны вплоть до $\Gamma$. По формулам (72) и (74)

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{\lambda},\quad \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t}d\tau=-\frac{1}{\lambda(\lambda t-1)}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda(\lambda t-1)}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда, подставив (76) в левую часть уравнения (75), получим:

$$\frac{t}{\lambda t-1}+\lambda t\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda(\lambda t-1)}\right)-\lambda t\cdot\frac{1}{\lambda}\equiv 0.$$

Следовательно, для всех $\lambda$ таких, что $|\lambda|>1$, однородное уравнение (75) имеет нетривиальное решение (76). Это значит, что любое $\lambda$, $|\lambda|>1$, является характеристическим числом уравнения (75) и совокупность этих чисел заполняет всю внешность единичного круга. Для фредгольмовых же уравнений, согласно теореме I Фредгольма, подобная ситуация невозможна.

**Задания для самостоятельного решения.**

**I.** Проверить, какие из заданных функций являются решениями указанных интегральных уравнений:

1. $\varphi(x)=1;\quad \varphi(x)+\int\limits_0^1 x\left(e^{xt}-1\right)\varphi(t)\,dt=e^x-x;$ ответ: да.

2. $\varphi(x)=2e^x\left(x-\dfrac{1}{3}\right);\quad \varphi(x)+2\int\limits_0^1 e^{x-t}\varphi(t)\,dt=2xe^x;$ ответ: да.

3. $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\dfrac{\pi}{2}};\quad \varphi(x)-\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\,dt=1;$ ответ: да.

4. $\varphi(x)=\sqrt{x};\quad \varphi(x)-\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt=\sqrt{x}+\dfrac{x}{15}\left(4x^{\frac{3}{2}}-7\right),$

где $K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, 0\le x\le t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, t\le x\le 1;\end{cases}$ ответ: да.

5. $\varphi(x)=e^x;\quad \varphi(x)+\lambda\int\limits_0^1 \sin xt\varphi(t)\,dt=1;$ ответ: нет.

6. $\varphi(x)=\cos x;\quad \varphi(x)-\int\limits_0^{\pi}\left(x^2+t\right)\cos t\varphi(t)\,dt=\sin x;$ ответ: нет.

7. $\varphi(x)=xe^{-x};\quad \varphi(x)-4\int\limits_0^{\infty} e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt=(x-1)e^{-x};$ ответ: да.

8. $\varphi(x)=\cos 2x;\quad \varphi(x)-3\int\limits_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)\,dt=\cos x,$

где $K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, t\le x\le \pi;\end{cases}$ ответ: да.

9. $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x,$ где C — произвольная постоянная;

$\varphi(x)-\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin x\dfrac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)\,dt=0;$

ответ: да.

**II.** Решить следующие интегральные уравнения Абеля:

1. $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\alpha} = x^n \quad (0<\alpha<1);$ ответ: $\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}.$

2. $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x;$ ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x-t}}dt.$

3. $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = e^x;$ ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left( x^{-\frac{1}{2}} + e^x \int_0^x e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \right).$

4. $\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}} = x^{\frac{1}{2}};$ ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{2}.$

**III.** Построить резольвенты для следующих ядер:

1. $K(x,t) = e^{x+t}; a=0, b=1;$ ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\lambda}, |\lambda| < \frac{2}{e^2-1}.$

2. $K(x,t) = \sin x \cos t; a=0, b=\frac{\pi}{2};$ ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{2\sin x\cos t}{2-\lambda}, |\lambda|<2.$

3. $K(x,t) = xe^t; a=-1, b=1;$ ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}, |\lambda| < \frac{e}{2}.$

4. $K(x,t) = (1+x)(1-t); a=-1, b=0;$

ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}, |\lambda| < \frac{3}{2}.$

5. $K(x,t) = x^2t^2; a=-1, b=1;$ ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}, |\lambda| < \frac{5}{2}.$

6. $K(x,t) = xt; a=-1, b=1;$ ответ: $R(x,t;\lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda}, |\lambda| < \frac{3}{2}.$

**IV.** Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

1. $\varphi(x)-4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 x\varphi(t)dt=2x-\pi;$ ответ: $\varphi(x)=\frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x+2x-\pi$.

2. $\varphi(x)-\int\limits_{-1}^{1}e^{\arcsin x}\varphi(t)dt=tgx;$ ответ: $\varphi(x)=tgx$.

3. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}tgt\varphi(t)dt=ctgx;$ ответ: $\varphi(x)=\frac{\pi}{2}\lambda+ctgx$.

4. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\cos(q\ln t)\varphi(t)dt=1;$ ответ: $\varphi(x)=\frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$ .

5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\arccos t\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ ответ: $\varphi(x)=\frac{-\pi^2\lambda}{8(\lambda-1)}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\lambda\neq1.$

6. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos t\varphi(t)dt=\sin x;$ ответ: $\varphi(x)=\frac{2}{2-\lambda}\sin x,\lambda\neq2.$

7. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x-t)\varphi(t)dt=\cos x;$ ответ: $\varphi(x)=2\frac{2\cos x+\pi\lambda\sin x}{4+\pi^2\lambda^2}.$

**V.** Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

1) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi/4}\sin^2 x\varphi(t)dt=0;$ ответ: $\lambda_1=\frac{8}{\pi-2};\quad \varphi_1(x)=\sin^2 x.$

2) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)dt=0;$ ответ: нет характеристических чисел и собственных функций.

3) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin t\varphi(t)dt=0;$ ответ: $\lambda_1=\frac{1}{\pi};\quad \varphi_1(x)=\sin x.$

4) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=0;$

ответ: $\lambda_1=-\frac{2}{\pi};\lambda_2=\frac{2}{\pi};\ \varphi_1(x)=\sin x;\varphi_2(x)=\cos x.$

5) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(45x^2\ln t-9t^2\ln x\right)\varphi(t)\,dt=0;$

ответ: действительных характеристических чисел и собственных функций нет.

6) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(2xt-4x^2\right)\varphi(t)\,dt=0;$ ответ: $\lambda_1=\lambda_2=3, \varphi(x)=x-2x^2$.

7) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(5xt^2+4x^2t\right)\varphi(t)\,dt=0;$ ответ: $\lambda_1=\frac{1}{2};\quad \varphi_1(x)=\frac{5}{2}x+\frac{10}{3}x^2.$

8) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(5xt^3+4x^2t+3xt\right)\varphi(t)\,dt=0;$ ответ: $\lambda_1=\frac{1}{4};\quad \varphi_1(x)=\frac{3}{2}x+x^2.$

9) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{sh}x\right)\varphi(t)\,dt=0;$ ответ: $\lambda_1=-\frac{e}{2};\quad \varphi_1(x)=\operatorname{sh}x.$

10) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(x\operatorname{ch}t-t^2\operatorname{sh}x\right)\varphi(t)\,dt=0;$ ответ: нет.

11) $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{ch}x\right)\varphi(t)\,dt=0;$

ответ: действительных характеристических чисел и собственных функций нет.

**VI.** Исследовать на фредгольмовость и решить следующие интегральные уравнения с помощью преобразования Фурье:

1) $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt,$ где $\lambda<\frac{1}{2},$

$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0,\\ 0, x<0;\end{cases}$ ответ: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}\left(1+\sqrt{1-2\lambda}\right)}{2\sqrt{1-2\lambda}}, x>0,\\ \dfrac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}\left(1-\sqrt{1-2\lambda}\right)}{2\sqrt{1-2\lambda}}, x<0.\end{cases}$

2) $\varphi(x)=f(x)+\frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt,$

где $f(x)=\begin{cases}0, x>0,\\ e^{x}, x<0;\end{cases}$ ответ: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0,\\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, x<0.\end{cases}$

3) $\varphi(x)=f(x)-\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-t)^{2}}\varphi(t)dt;$

ответ: $\varphi(x)=-\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\Phi(w)e^{ixw}}{1+e^{-\frac{w^{2}}{4}}}dw$, где $\Phi(w)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

## Литература


1. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин Элементы теории функций и функционального анализа //М., Наука, 1976.
2. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа // М., Наука, 1965.
3. И.Г.Петровский Лекции по теории интегральных уравнений // Изд-во МГУ, 1984.
4. С.Г.Михлин Лекции по линейным интегральным уравнениям// Физматгиз, 1959.
5. М.Рид, Б.Саймон Методы современной математической физики. Функциональный анализ, т.1 // М., Мир, 1977.
6. У.Рудин Функциональный анализ // М. Мир, 1975.
7. В.А.Садовничий Теория операторов// М., Изд-во МГУ, 1979.
8. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов Функциональный анализ // М., Наука, 1977.
9. Ф. Рисс, Б.Секефальви-Надь Лекции по функциональному анализу // М., Мир, 1979.
10. М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И.Макаренко Интегральные уравнения // М., Наука, 1976.
11. В.А.Треногин Функциональный анализ // М., Наука, 1980.
12. А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани Теоремы и задачи функционального анализа // М., Наука, 1979.
13. В.А.Треногин, Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева Задачи и упражнения по функциональному анализу // М., Наука, 1984.
14. В.В.Городецкий, Н.И.Нагнибида, П.П.Настасив Решения задач по функциональному анализу // Киев, Вища школа, 1990.