МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут

ПЛОСКІ МІШАНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОЇ СМУГИ

Одеса

ОНУ

2019

УДК 539.3

Рекомендовано до друку Вченою радою ОНУ імені І. І. Мечникова

Протокол № 2 від 30 жовтня 2019 р.

Рецензенти:

Г. С. Кіт, доктор фіз.-мат. наук, професор, головний науковий співробітник відділу обчислювальних методів деформівних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України член-кореспондент НАН України;

А. Є. Шевельова, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

В. І. Острик, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач науково-дослідного сектору механіки спряжених хвильових полів Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Вайсфельд Н. Д., Журавльва З. Ю., Реут В. В.

Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги: наукова монографія / Н. Д. Вайсфельд, З. Ю. Журавльова, В. В. Реут. – Одеса: «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2019. − 149 с.

Запропоновано новий підхід розв'язання мішаних задач теорії пружності для півнескінченної смуги. Метод базується на застосуванні апарату інтегральних перетворень, матриці-функції Гріна та сингулярних інтегральних рівнянь. Монографію рекомендовано для магістрів, аспірантів та наукових фахувців у галузі мішаних задач теорії пружності.

АНОТАЦІЯ

Розглянуто плоску мішану задачу теорії пружності для півнескінченної смуги, що знаходиться під впливом навантаження різної природи. За допомогою застосування інтегрального півнескінченного sin-, cos-перетворення Фур'є вихідну задачу зведено до одновимірної векторної крайової задачі. Задачу в просторі трансформант переформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Розв'язок цієї задачі було побудовано у вигляді суперпозиції загального розв'язку однорідного векторного рівняння та часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Розв'язок однорідного векторного рівняння побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення та подано через фундаментальну матричну систему розв'язків відповідного однорідного матричного рівняння. Для отримання часткового розв'язку неоднорідного векторного рівняння було відшукано матрицю-функцію Гріна за допомогою методу матричних інтегральних перетворень. Матрицю-функцію Гріна було побудовано у формі білінійного розвинення, що спрощує подальші обчислення. Після застосування оберненого перетворення Фур'є до явного розв'язку одновимірної крайової задачі в просторі трансформант та підсумовування слабко-збіжних інтегралів у формулах для переміщень залишається лише одна невідома функція переміщень по короткому торцю півнескінченної смуги. Для її знаходження було отримано сингулярне інтегральне рівняння. Сингулярне інтегральне рівняння було розв'язано відповідно до конфігурації нормального навантаження. Коли в ядрі сингулярного інтегрального рівняння не було нерухомих особливостей, було застосовано метод ортогональних поліномів, що дозволяє врахувати дійсний порядок особливості невідомої функції на кінцях проміжку інтегрування. У випадку наявності однієї чи двох нерухомих особливостей в ядрі сингулярного інтегрального рівняння було побудовано трансценденте рівняння та знайдено його корені. Для розв'язання сингулярного інтегрального рівняння було використано спеціальний узагальнений метод.

Точний розв’язок задачі стаціонарної теплопровідності для півнескінченної смуги було отримано за допомогою перетворень Фур’є. Цей розв’язок було використано для розв’язання задачі незв’язної термопружності для півсмуги. Такі самі конфігурації нормального навантаження по короткому торцю півсмуги було розглянуто для задачі термопружності. Проведено дослідження напруженого стану півсмуги в усіх цих випадках.

Розглянуто задачу, коли усередині півсмуги розташовано трансверсальну тріщину. У даному випадку вихідну задачу зведено до одновимірної крайової задачі за допомогою інтегральне перетворення Фур’є, що було застосовано за узагальненою схемою. Розв’язання задачі було зведено до розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно однієї невідомої функції переміщень по короткому торцю півсмуги та двох стрибків функцій переміщень на трансверсальній тріщині. В залежності від конфігурації прикладеного навантаження перше рівняння цієї системи може містити нерухомі особливості. Тому метод ортогональних поліномів та узагальнений метод було застосовано до розв’язання системи сингулярних інтегральних рівнянь в залежності від конфігурації прикладеного навантаження по короткому торцю півсмуги. Також було розглянуто симетричний випадок розташування трансверсальної тріщини та прикладення механічного навантаження по короткому торцю півсмуги. У цьому випадку один зі стрибків функцій переміщень на тріщині дорівнює нулю. Задачу було зведено до розв’язання системи двох сингулярних інтегральних рівнянь. Коефіцієнти інтенсивності напружень було обчислено для усіх випадків в залежності від довжини трансверсальної тріщини.

Ключові слова: півсмуга, перетворення Фур’є, матриця-функція Гріна, сингулярне інтегральне рівняння, метод ортогональних поліномів, нерухомі особливості, незв’язна термопружність, трансверсальна тріщина.

ABSTRACT

The plane mixed problem of elasticity for the semi-infinite strip was considered under the load of a different nature at the short semi-strip's edge. The initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the integral semi-infinite sin-, cos- Fourier transformation. The problem in transformation domain was reformulated as vector boundary-value problem. Its solution was constructed as a superposition of the general solution for the homogeneous vector equation and the partial solution for the inhomogeneous one. The solution for the homogeneous vector equation was constructed with the help of the matrix differential calculation and it was given through the fundamental matrix system for the corresponding homogeneous matrix equation. To obtain the partial solution for the inhomogeneous vector equation the Green's matrix-function was derived by the use of the matrix integral transformation. The Green's matrix-function was constructed in the form of the bilinear expansion, which simplified further calculations. After applying of the inverse transformation to the exact solution of the one-dimensional problem in transformations domain, and summation of the weakly convergent integrals the formulae for the displacements contained only one unknown function of the displacements by the semi-infinite strip's short edge. The singular integral equation was obtained for its finding. The singular integral equation was solved with regard of the normal load's configuration. The orthogonal polynomials method was applied when there were no fixed singularities in the kernel of the singular integral equation. This method allowed considering the real order of the unknown function at the integration segment's ends. The transcendental equation was constructed in the case of singular integral equation with one or two fixed singularities. The transcendental equation's roots were found. The special generalized method was used for the solving of the singular integral equation.

The exact solution of the stationary thermal conductivity problem was derived with the help of the Fourier transformations. It was used in the solving of the uncoupled thermoelasticity problem for the semi-strip. The same

configurations of the normal stress at the short edge of the semi-strip were considered for the thermoelasticity problem. The investigation of the semi-strip's stress state was provided for all these cases.

The problem when a transverse crack was located inside the semi-strip was considered. In this case the initial problem was reduced to the one-dimensional problem with the help of the semi-infinite Fourier transformation, which was applied by the generalized scheme. The solving of the problem was reduced to the solving of the system of three singular integral equations with respect to one unknown displacement function at the semi-strip's edge and two displacement jumps at the transverse crack. With regard to the configuration of the mechanical load the first equation in this system could contain fixed singularities. So, the orthogonal polynomials method or the special generalized method was applied for the solving of the singular integral equations. In the case of symmetric location of the crack and symmetric mechanical load the simplified case was considered when one of the displacements' jumps equaled zero. In this case the solving of the problem was reduced to the solving of the system of two singular integral equations. Stress intensity factors were calculated for all these cases in regard of the transverse crack's length.

Key words: semi-strip, Fourier transformation, Green's matrix-function, singular integral equation, orthogonal polynomials method, fixed singularities, uncoupled thermoelasticity, transverse crack.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

СІДР – сингулярне інтегро-дифференціальне рівняння

СІР – сингулярне інтегральне рівняння

ССІДР – система сингулярних інтегро-дифференціальних рівнянь

ССІР – система сингулярних інтегральних рівнянь

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень

μ – коефіцієнт Пуассона

κ – стала Мусхелішвілі

ВСТУП

Актуальність теми. Мішані задачі теорії пружності займають важливе місце в механіці деформівного твердого тіла, що пов'язано з їх роллю при моделюванні різноманітних інженерних задач. Основні підходи до аналітичного розв'язання такого роду задач засновані на зображенні розв'язків рівнянь рівноваги через допоміжні функції (гармонічні, бігармонічні тощо). Головна незручність цих підходів полягає в тому, що для отримання виразів реальних механічних характеристик потрібно виконати додаткові операції, які часто є досить нетривіальними.

Запропонований у роботі підхід використовує безпосередні інтегральні перетворення рівнянь рівноваги. Це надає можливість побудувати в просторі трансформант аналітичний розв'язок відповідної векторної крайової задачі відносно шуканих трансформант переміщень. Для спрощення розрахунків побудовано матрицю-функцію Гріна, яку подано у вигляді білінійного розвинення. Цей підхід продемонстровано на розв'язанні мішаних задач теорії пружності для півсмуги, яка є модельним об'єктом для виявлення закономірностей напружено-деформованого стану пружних тіл.

Як свідчить аналіз літератури, у дослідженні плоских мішаних задач пружності існують невирішені проблеми, що потребують розвитку аналітичних методів їх розв'язання, які б дозволили спростити побудову розв'язку та виявити загальну якісну картину напруженого стану півсмуги.

Цим обґрунтовано актуальність розробки нової методики аналітичного розв'язання плоских мішаних задач теорії пружності для півсмуги.