

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Н. Д. Вайсфельд, Г. О. Фесенко

**МІШАНІ ЗАДАЧІ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ**

Монографія

Одеса
«Астропрінт»
2019

У монографії досліджено розвиток нової методики розв'язання просторових задач теорії пружності, що базується на перетворенні системи рівнянь Ламе до двох сумісно та одного окремо розв'язуваних рівнянь відносно нових невідомих функцій, що пов'язані з переміщеннями. Новий підхід застосовано до побудови аналітичних розв'язків просторових крайових задач для півнескінченного пружного шару, на який діють зовнішні та внутрішні навантаження різної природи.

Для магістрів та аспірантів факультетів прикладної математики та механіки та спеціалістів у галузі механіки деформівного твердого тіла.

Рецензенти:

В. В. Лобода, д-р фіз.-мат. наук, проф. Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, зав. каф. теоретичної та комп'ютерної механіки;

О. В. Максимук, д-р фіз.-мат. наук, проф. Львівського національного університету імені Івана Франка, зав. каф. вищої математики;

Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф. Київського національного університету імені Тараса Шевченка, зав. каф. теоретичної і прикладної механіки

Рекомендовано до видання вченою радою ОНУ імені І. І. Мечникова (протокол № 2 від 30.10.2018 р.)

Передмова

Просторові задачі теорії пружності посідають важливе місце в механіці деформованого тіла, що пов'язано з практично завжди тривимірним характером технічних та інженерних проблем. Сьогодні досить широко розроблений апарат теорії стержнів, пластин і оболонок, обґрунтовані узагальнення теорії плоского деформованого стану та плоскої деформації, які по суті є наближенням до опису тривимірного стану тіла. Досить багато робіт присвячено розробці чисельних розв'язків, які дозволяють отримати кількісну інформацію про досягнення екстремальних значень полів переміщень і напружень, досліджувати характер поведінки напружено-деформованого стану у локальних областях. Але якісну картину процесу, загальні закономірності поведінки напруженого стану можна отримати тільки при наявності точного розв'язку задачі. Результати, отримані на підставі точного розв'язку просторової задачі, можна використовувати як еталонні при розв'язанні задач наближеними чисельними методами. Цим продиктований широкий інтерес до розробки аналітичних розв'язків тривимірних задач.

Пружний півнескінченний шар є одним з характерних об'єктів дослідження просторових задач, який використовується як модельний для виявлення закономірностей

напружено-деформованого стану тривимірних тіл. Аналіз літератури показав, що в напрямку досліджень просторових задач для півшару існують невирішені проблеми, необхідний розвиток і обґрунтування аналітичних методів розв'язання, які дозволили б побудувати точні розв'язки і виявити загальну якісну картину полів переміщень і напружень з урахуванням впливів на напівнескінченний шар навантажень різної природи.

У першому розділі проаналізовано літературу за обраним напрямом досліджень. Показано місце роботи серед відомих у літературі результатів у даному напрямку досліджень.

У другому розділі наведено нову методику розв'язання просторових мішаних задач теорії пружності, що базується на зведенні системи рівнянь Ламе до двох спільно та одному окремо розв'язуваним рівнянням. Метод полягає у введенні двох нових невідомих функцій, пов'язаних з похідними вихідних переміщень, при цьому граничні умови також розділяються. Шляхом застосування інтегральних перетворень до системи рівнянь і до трансформованих крайових умов отримано одномірну векторну крайову задачу в просторі трансформант. Систему рівнянь разом з крайовими умовами зведено до одномірної крайової задачі, для розв'язання якої побудовано фундаментальну матричну систему розв'язків для відповідного однорідного матричного рівняння методами контурного інтегрування. У випадку одномірної піводнородної векторної крайової задачі розв'язок подано у вигляді лінійної комбінації фундаментальної матричної системи розв'язків. У випадку неоднорідної векторної крайової задачі розв'язок будується за допомогою матриці-функції Гріна та лінійної комбінації базисної матричної системи розв'яз-

ків. Побудовано фундаментальну матрицю відповідного неоднорідного матричного рівняння. Вказано процедуру обчислення подвійних інтегралів, що виникають під час обернення інтегральних перетворень, які містять циліндричну функцію.

У третьому розділі розглянуто мішані просторові задачі для півнескінченного шару, коли уздовж торця задано умови гладкого контакту, на верхній грані по прямокутній ділянці розподілено нормальне стискаюче навантаження постійної інтенсивності, на нижній грані півнескінченного шару задано або умови гладкого контакту, або жорсткого закріплення. Для розв'язання поставленої проблеми попередньо отримано розв'язок задачі про дію на верхній грані півнескінченного шару зосередженої сили. Після застосування інтегральних перетворень до трансформованих рівнянь рівноваги і крайових умов отримано піводнорідну одномірну векторну крайову задачу, що розв'язано точно у просторі трансформант. Також у цьому розділі розв'язано аналогічну задачу теорії пружності для півсмуги з метою порівняння значень напружень, отриманих у задачі для півшару у характерних точках.

У четвертому розділі розглянуто неоднорідні задачі теорії пружності для півнескінченного шару. Розв'язано задачу незв'язної термопружності для півнескінченного шару, коли на бічній стінці та нижній грані півшару задано умови гладкого контакту та теплоізоляція, на верхній грані півшару по ділянці прямокутної форми задано рівномірно розподілене нормальне стискаюче навантаження та постійну температуру. Попередньо знайдено точний розв'язок відповідної задачі стаціонарної теплопровідності. Також у цьому розділі отримано точний розв'язок мішаної задачі теорії пружності для нескінченного шару

$$\begin{aligned}
& -\kappa^2 \mu_1 (t-1)chtz + \kappa^2 \mu_1 tzshtz - \mu_1 t(1-z)\frac{1}{2}e^{-t(2+z)} + \\
& + \mu_1 t(1+z)\frac{1}{2}e^{-t(2-z)} - \mu_1 \frac{1}{2}e^{-t(2+z)} - \\
& - \mu_1 \frac{1}{2}e^{-t(2-z)} - \frac{\kappa^2+1}{2}chtz + \kappa ht(2-z) \}.
\end{aligned}$$

Зміст

Передмова 3

Розділ 1

ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ 7

Розділ 2

НОВЕ ПОДАННЯ РІВНЯНЬ ЛАМЕ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

- 2.1. Подання рівнянь Ламе через два спільно та одне окремо розв'язуване рівняння 14
- 2.2. Метод розв'язання неоднорідних векторних одновимірних крайових задач 16
- 2.3. Чисельно-аналітична методика обчислення кратних інтегралів від осцилюючих функцій 21

Розділ 3

ПІВОДНОРІДНІ МІШАНІ ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ

- 3.1. Мішана просторова задача теорії пружності для півнескінченного шару при виконанні умов гладкого контакту на нижній грані 24
- 3.2. Мішана просторова задача теорії пружності для півнескінченного шару при виконанні умов жорсткого закріплення на нижній грані ... 39

3.3. Мішана задача теорії пружності для півнескінченної смуги	52
<i>Розділ 4</i>	
НЕОДНОРІДНІ МІШАНІ ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ	
4.1. Задача стаціонарної теплопровідності для півнескінченного шару	58
4.2. Мішана задача незв'язної термопружності для півнескінченного шару	65
4.3. Мішана задача теорії пружності для нескінченного шару з урахуванням впливу довільно орієнтованої внутрішньої зосередженої сили	82
<i>Висновки</i>	96
<i>Список використаних джерел</i>	99
<i>Додаток А</i>	108

- Вайсфельд Н. Д.**
 В14 Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару :
 монографія / Н. Д. Вайсфельд, Г. О. Фесенко. — Одеса : Астро-
 принт, 2019. — 120 с. : іл. — Бібліогр. : с. 99–107.
 ISBN 978–966–927–462–5

У монографії досліджено розвиток нової методики розв'язання просторових задач теорії пружності, що базується на перетворенні системи рівнянь Ламе до двох сумісно та одного окремо розв'язуваних рівнянь відносно нових невідомих функцій, що пов'язані з переміщеннями. Новий підхід застосовано до побудови аналітичних розв'язків просторових крайових задач для півнескінченного пружного шару, на який діють зовнішні та внутрішні навантаження різної природи.

Для магістрів та аспірантів факультетів прикладної математики та механіки та спеціалістів у галузі механіки деформівного твердого тіла.

УДК 539.3

Наукове видання

**ВАЙСФЕЛЬД Наталя Данилівна
ФЕСЕНКО Ганна Олександрівна**

**МІШАНІ ЗАДАЧІ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОГО ШАРУ**

Монографія

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*

Редактор *Н. Я. Рихтлік*

Технічний редактор *М. М. Бушин*

Дизайнер обкладинки *О. А. Кунтарас*

Коректор *Н. І. Крилова*

The monograph is devoted to the development of a new method for solving spatial problems of the theory of elasticity, based on the transformation of the systems of Lamé equations to two mutually compatible and one separately solvable equations with respect to new unknown functions associated with displacements. The new approach is applied to the construction of analytical solutions of spatial boundary value problems for a semi-infinite elastic layer, which has external and internal loads of different nature.

For masters and post-graduate students of faculties of applied mathematics and mechanics and specialists in the field of mechanics of deformable solids.

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 6,98.
Тираж 50 прим. Зам. № 664 (6).

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
e-mail: astro_print@ukr.net; www.astroprint.ua; www.stranichka.in.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.