ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

ПЕРЕДМОВА

Розділ 1

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ (ЛДР) ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.1 Види ЛДР другого порядку та основні типи перетворень. Побудова загальних і частинних розв'язків цих рівнянь

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку займають важливе місце в теорії звичайних диференціальних рівнянь, оскільки виникають в багатьох задачах, пов'язаних з практикою. Такі рівняння зустрічаються у наступних видах:

$$a(t)u'' + b(t)u' + c(t)u = h(t) \quad \text{(загальна форма)}; \tag{1.1}$$

$$u'' + g(t)u' + f(t)u = h(t) \quad \text{(стандартна форма)}; \tag{1.2}$$

$$(p(t)u')' + q(t)u = h(t) \quad \text{(самоспряжена форма)}; \tag{1.3}$$

$$u'' + q(t)u = h(t) \quad \text{(канонічна форма)}. \tag{1.4}$$

де a, b, c, h, g, f, p, q – дійсні, неперервні функції на деякому проміжку $I \subset \mathbb{R}$, причому припускається, що $p(t) > 0$ при $t \in I$. Для рівняння (1.1) точки з проміжку I, в яких коефіцієнт $a(t)$ дорівнює нулю називаються *особливими точками* рівняння (1.1). Наприклад, для гіпергеометричного рівняння

$$x(x-1)u'' + (-\gamma + (\alpha + \beta + 1)xu' + \alpha\beta u = 0,$$

де α, β, γ – дійсні сталі, точки $x = 0$ і $x = 1$ є особливими. Рівняння (1.1) без особливих точок зводиться до рівняння (1.2) після поділення на $a(t)$. З двох рівнянь (1.2) і (1.3) останнє є більш загальними, оскільки рівняння (1.2) завжди може бути записаним у самоспряженій формі. Дійсно, якщо врахувати, що

$$u'' + g(t)u' = e^{-\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)} \left(u'(t)e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)}\right)',$$

де $t_0 \in I$, то (1.2) можна записати у виді

$$e^{\left(-\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)} \left(e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)} u'(t) \right)' + f(t)u = h(t),$$

або

$$(p(t)u')' + q(t)u = H(t), \quad \text{тобто у виді} \quad (1.3),$$

де

$$p(t) = e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)} > 0, \quad q(t) = f(t)e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)}, \quad H(t) = h(t)e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)}.$$

Часткове обернення цього твердження також є справедливим, оскільки якщо функція p неперервно диференційовна на проміжку I то рівняння у самоспряженій формі можна записати у виді

$$u'' + \frac{p'(t)}{p(t)}u' + \frac{q(t)}{p(t)}u = \frac{h(t)}{p(t)},$$

а це рівняння має вид (1.2). У випадку, коли функція p неперервна, але не має неперервної похідної рівняння у самоспряженій формі не може бути записаним у вигляді (1.2). Тоді рівняння у самоспряженій формі (1.3) можна звести з використанням заміни

$$u(t) = x_1(t), \quad p(t)u'(t) = x_2(t)$$

до лінійної системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$x_1' = \frac{x_2}{p(t)}, \quad x_2' = -q(t)x_1 + h(t). \tag{1.5}$$

з неперервними на I коефіцієнтами.

Рівняння у самоспряженій формі (1.3) при $p(t) \equiv 1$ є рівнянням у канонічній формі (1.4), а при $p(t) \neq 1$ може бути зведеним до рівняння у канонічній формі з використанням заміни незалежної змінної

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{p(\tau)} + C, \tag{1.6}$$

де $t_0 \in I,\ C \in \mathbb{R}$ Тут похідна функції $s(t)$ додатна і тому для неї існує обернена функція $t(s)$, що визначена на деякому проміжку I_1. Тоді $u(t) = u(t(s)) = v(s)$ і будемо мати

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(v(s(t))}{dt} = v'(s)\frac{ds}{dt} = v'(s)\frac{1}{p(t)},$$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(p(t)v'(s)\frac{1}{p(t)}\right) = \frac{dv'(s(t))}{dt} = v''(s)\frac{ds}{dt} = v''(s)\frac{1}{p(t)}.$$

Підставляючи останнє співвідношення в (1.3), отримаємо відносно нової незалежної змінної s рівняння у канонічній формі вигляду

$$v'' + Q(s)v = H(s), \tag{1.7}$$

де

$$Q(s) = p(t(s))q(t(s)), \quad H(s) = h(t(s))p(t(s)) \quad v(s) = u(t(s)).$$

Звернемо уиагу на те, що у випадку, коли

$$p(t)q(t) \equiv c = \text{const},$$

рівняння (1.7) є рівнянням зі сталим коефіцієнтом

$$v'' + cv = H(t).$$

Визначимо вид проміжку I_1, на якому треба розглядати рівняння (1.7), якщо проміжок I має вид $I = [a, \omega[,$ де $\omega \leq +\infty$. Використовуючи заміну (1.6) у вигляді

$$s = \int\limits_a^t \frac{d\tau}{p(\tau)},$$

приходимо до висновку, що

$$I_1 = [0, \omega_1[, \quad \text{де} \quad \omega_1 = \int\limits_a^\omega \frac{d\tau}{p(\tau)},$$

тобто ω відображається в ω_1. Звідси, зокрема, зрозуміло, що $I_1 = [0, +\infty[,$ якщо

$$\int\limits_a^\omega \frac{d\tau}{p(\tau)} = +\infty.$$

У випадку коли

$$\int\limits_a^\omega \frac{d\tau}{p(\tau)} < +\infty,$$

рівняння (1.3) також можно звести до рівняння визначеного на нескінченому проміжку $I_1 = [C, +\infty[$, де $C = \left(\int\limits_a^\omega \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)^{-1}$, за допомогою *перетворення Вонга*

$$u(t) = \frac{v(s)}{s}, \quad s = \left(\int\limits_t^\omega \frac{d\tau}{p(\tau}\right)^{-1}. \tag{1.8}$$

В результаті цього перетворення отримаємо рівняння у канонічній формі вигляду

$$v'' + \frac{p(t)q(t)}{s^4} v = \frac{p(t)h(t)}{s^3}, \tag{1.9}$$

в якому у виразах $p(t)q(t)$ і $p(t)h(t)$ потрібно замінити t функцією $t(s)$, оберненою для $s(t)$. Зокрема, саме рівняння у канонічній формі (1.4) ($p(t) \equiv 1$), що визначено на скінченому проміжку $I = [a, \omega[$ за допомогою замін Вонга

$$u(t) = \frac{v(s)}{s}, \quad s = \left(\int\limits_t^\omega \frac{d\tau}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{\omega - t} \tag{1.10}$$

зводиться відносно нової незалежної зміни s до рівняння у канонічній формі наступного вигляду

$$v'' = \frac{q(t)}{s^4}v = \frac{h(t)}{s^3}, \tag{1.11}$$

яке визначено на проміжку $I_1 = \left[\frac{1}{\omega - a}, +\infty\right[$.

Оскільки рівняння (1.2) зводиться до рівняння (1.3), то воно потім теж може бути зведеними до рівняння у кононічній формі. Треба, однак, зазначити, що рівняння (1.2) у випадку, коли функція g неперервно диференційована на проміжку I може бути безпосередньо зведеним до рівняння у канонічній формі (1.4) з використанням заміни невідомої функції

$$u(t) = v(t)e^{\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)}, \quad \text{де} \quad t_0 \in I \tag{1.12}$$

В результаті цієї заміни отримуємо відносно нової невідомої функції $v(t)$ рівняння виду

$$v'' + \left(-\frac{g'(t)}{2} - \frac{g^2(t)}{4} + f(t)\right)v = h(t)e^{\left(\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau\right)}. \tag{1.13}$$

Дану заміну зручно використовувати, коли потрібно, щоб нулі розв'язків рівняння (1.2) співпадали з нулями розв'язків рівняння у канонічній формі (1.13).

З теорії лінійних диференціальних рівнянь відомо, що для кожного з рівнянь (1.2) – (1.4) при будь-яких $t_0 \in I$, $u_0, u_0' \in \mathbb{R}$ задача Коші з вочатковими умовами $u * t_0) = u_0$, $u'(t_0) = u_0'$ має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок визначений на всьому проміжку I.

У випадку, коли $h(t) \neq 0$, рівняння (1.1)– (1.4) є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями (ЛНДР) другого порядку. Згідно з теорією лінійних диференціальних рівнянь загальний розв'язок кожного з ЛНДР другого порядку (1.1)–(1.4) має загальний розв'язок вигляду

$$u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + u^*(t), \tag{1.14}$$

де $u^*(t)$ – будь-який частиний розв'язок ЛНДР, C_1, C_2 – довільні дійсні сталі, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – лінійно незалежні на проміжку I розв'язки (фундаментальна сім'я розв'язків) відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР) другого порядку.

Для ЛНДР (1.1) – (1.4) відповідними ЛОДР є рівняння виду

$$a(t)u'' + b(t)u' + c(t)u = 0 \quad \text{(загальна форма);} \tag{1.1$_0$}$$

$$u'' + g(t)u' + f(t)u = 0 \quad \text{(стандартна форма);} \tag{1.2$_0$}$$

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0 \quad \text{(самоспряжена форма);} \tag{1.3$_0$}$$

$$y'' + q(t)y = 0 \quad \text{(канонічна форма).} \tag{1.4$_0$}$$

Рівняння (1.4_0) носить також назву *двочлене лінійне диференціальне рівняння.*

Згідно з критерієм фундаментальності розв'язки $u_1(t)$, $u_2(t)$ ЛОДР другого порядку утворюють фундаментальну сім'ю розв'язків тоді і лише тоді, коли вронскіан цих розв'язків

$$W(u_1, u_2)(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

відмінний від нуля на проміжку I. Більш того, якщо він відмінний від нуля хоча б в одній точці з проміжку I, то він є відмінним від нуля всюди на I. Для ЛОДР (1.2_0) ці факти, зокрема, випливають з того, що згідно з формулою Ліувілля-Остроградського для будь-яких розв'язків $u_1(t),\ u_2(t)$ рівняння (1.2_0) і будь-якого $t_0 \in I$

$$W(u_1,u_2)(t) = W(u_1,u_2)(t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau} \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{1.16}$$

Одержимо вид вронскіану розв'язків більш загального ЛОДР у самоспряженій формі (1.3_0). Нехай $u_1(t)$ і $u_2(t)$ - розв'язки цього рівняння. Тоді

$$(p(t)u_1'(t))' + q(t)u_1(t) = 0, \quad (p(t)u_2'(t))' + q(t)u_2(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Помножаючи другу з цих тотожностей на $u_1(t)$, першу на $u_2(t)$ і віднімаючи отримані тотожності, будемо мати

$$(p(t)u_2'(t))'\,u_1(t) - (p(t)u_1'(t))'\,u_2(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Враховуючи, що

$$((p(t)u_2'(t))u_1(t) - (p(t)u_1'(t))u_2(t))' = (p(t)u_2'(t))'\,u_1(t) - (p(t)u_1'(t))'\,u_2(t) \quad \text{при} \quad t \in I,$$

перепишимо останню тотожність у вигляді

$$(p(t)\,[(u_2'(t)u_1(t) - u_1'(t)u_2(t)])' = 0 \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Звідси випливає, що

$$p(t)\,[(u_2'(t)u_1(t) - u_1'(t)u_2(t)] = c \quad \text{при} \quad t \in I,$$

або

$$u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t) = \frac{c}{p(t)} \quad \text{при} \quad t \in I$$

де c – дійсна стала, яка залежить від $u_1(t)$ і $u_2(t)$.

Тут вираз, що стоїть ліворуч є вронскіаном $W(u_1,u_2)(t)$ розв'язків $u_1(t)$ і $u_2(t)$ однорідного диференціального рівняння (1.3_0), тобто

$$W(u_1,u_2)(t) = \frac{c}{p(t)} \quad \text{при} \quad t \in I \tag{1.17}$$

і тому ці розв'язки є лінійно незалежними тоді і лише тоді, коли $c \neq 0$.

У випадку, коли $p(t) \equiv 1$ (тобто для ЛОДР у канонічній формі (1.4_0)) вронскіан будь-якої пари розв'язків $u_1(t),\ u_2(t)$ цього рівняння тотожньо дорівнює сталій

$$W(u_1,u_2)(t) = c \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{1.18}$$

У формулі (1.14) загального розв'язку ЛНДР доданок $C_1u_1(t) + C_2u_2(t)$ є загальним розв'язком відповідного ЛОДР. Визначення загального розв'язку відповідного ЛОДР дозволяє з використанням методу варіації сталих Лагранжа знайти частиний розв'язок $u^*(t)$ ЛНДР.

Нехай $u_1(t), u_2(t)$ – лінійно незалежні на проміжку I розв'язки ЛОДР (1.2_0). Тоді $C_1u_1(t) + C_2u_2(t)$ є загальним розв'язком цього рівняння. Ідея методу варіації сталих Лагранжа полягає в тому, щоб замінивши тут сталі C_1, C_2 функціями $C_1(t), C_2(t)$, підібрати ці функції таким чином, щоб функція

$$u(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t) \tag{1.19}$$

була розв'язком ЛНДР (1.2).

Для цієї функції маємо

$$u'(t) = C_1'(t)u_1(t) + C_1(t)u_1'(t) + C_2'(t)u_2(t) + C_2(t)u_2'(t).$$

Щоб спростити вигляд цієї і наступної похідної покладемо тут суму доданків, які містять C_1' і C_2' рівною нулю

$$C_1'(t)u_1(t) + C_2'(t)u_2(t) = 0. \tag{1.20}$$

Тоді будемо мати

$$u'(t) = C_1(t)u_1'(t) + C_2(t)u_2'(t), \tag{1.21}$$

$$u''(t) = C_1'(t)u_1'(t) + C_1(t)u_1''(t) + C_2'(t)u_2'(t) + C_2(t)u_2''(t). \tag{1.22}$$

Підставляючи тепер шукану функцію u та її похідні u', u'' з формул (1.19), (1.21) і (1.22) у ЛНДР (1.2) отримаємо рівність

$$C_1(t)\left[u_1''(t) + g(t)u_1'(t) + f(t)u_1(t)\right] + C_2(t)\left[u_2''(t) + g(t)u_2'(t) + f(t)u_2(t)\right] +$$
$$+C_1'(t)u_1'(t) + C_2'(t)u_2'(t) = h(t)$$

Оскільки $u_1(t), u_2(t)$ – розв'язки ЛОДР (1.2_0), то вирази що стоять у квадратних дужках тотожньо дорівнюють нулю на проміжку I і тому

$$C_1'(t)u_1'(t) + C_2'(t)u_2'(t) = h(t) \tag{1.23}$$

Співвідношення (1.20) і (1.23) утворюють лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} C_1'(t)u_1(t) + C_2'(t)u_2(t) = 0, \\ C_1'(t)u_1'(t) + C_2'(t)u_2'(t) = h(t) \end{cases}$$

відносно невідомих функцій $C_1'(t), C_2'(t)$. Оскільки визначником цієї системи є вронскіан $W(u_1, u_2)(t)$ лінійно незалежних на проміжку I розв'язків $u_1(t), u_2(t)$ відповідного ЛОДР (1.2_0), то він відмінний від нуля на проміжку I, і тому ця система має єдиний розв'язок

$$C_1'(t) = -\frac{u_2(t)h(t)}{W(u_1, u_2)(t)}, \quad C_2'(t) = \frac{u_1(t)h(t)}{W(u_1, u_2)(t)} \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Інтегруючи ці тотожності на проміжку від t_0 до t, де t_0 – будь-яке число з проміжку I, отримуємо шукані функції

$$C_1(t) = C_1(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_2(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1, u_2)(\tau)}, \quad C_2(t) = C_2(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_1(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1, u_2)(\tau)}. \tag{1.24}$$

Підставляючи дані функції в (1.19) одержимо розв'язок ЛНДР (1.2)

$$u(t) = u_1(t)\left[C_1(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_2(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1,u_2)(\tau)}\right] + u_2(t)\left[C_2(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_1(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1,u_2)(\tau)}\right]. \qquad (1.25)$$

Тут у якості $C_1(t_0)$, $C_2(t_0)$ можуть обиратися будь-які дісні сталі. Зокрема при $C_1(t_0) = C_2(t_0) = 0$ отримуємо частинний розв'язок ЛНДР (1.2) виду

$$u^*(t) = -u_1(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_2(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1,u_2)(\tau)} + u_2(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_1(\tau)h(\tau)\,d\tau}{W(u_1,u_2)(\tau)} \quad \text{при} \quad t \in I, \qquad (1.26)$$

який задовольняє початкові умови умови $u(t_0) = 0, \quad u'(t_0) = 0$.

Якщо потрібно знайти розв'язок ЛНДР, що задовольняє початкові умови $u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u'_0$, то треба сталі $C_1(t_0)$, $C_2(t_0)$ в (1.25) визначити з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1(t_0)u_1(t_0) + C_2(t_0)u_2(t_0) = u_0, \\ C_1(t_0)u'_1(t_0) + C_2(t_0)u'_2(t_0) = u'_0. \end{cases} \qquad (1.27)$$

При цьому у вигляді (1.25) шуканого розв'язку ЛНДР (1.2) доданок $u_0(t) = C_1(t_0)u_1(t) + C_2(t_0)u_2(t)$ буде розв'язком відповідного ЛОДР (1.2_0), який задовольняє умови $u_0(t_0) = u_0, \quad u'_0(t_0) = u'_0$, а доданок $u^*(t)$ з (1.26) – розв'язком ЛНДР (1.2), що задовольняє нульові початкові умови $u^*(t_0) = 0, \quad u'^*(t_0) = 0$.

Отриманий розв'язок ЛНДР можна визначити точніше, якщо розв'язати систему рівнянь (1.27). З цієї системи маємо

$$C_1(t_0) = \frac{u_0 u'_2(t_0) - u_2(t_0)}{u_1(t_0)u'_2(t_0) - u_2(t_0)u'_1(t_0)}, \quad C_2(t_0) = \frac{u'_0 u_1(t_0) - u_0 u'_1(t_0)}{u_1(t_0)u'_2(t_0) - u_2(t_0)u'_1(t_0)}$$

Підставляючи ці значення у формулу (1.25), помічаємо, що вона може бути записаною у виді

$$u(t) = \frac{u_1(t)u'_2(t_0) - u_2(t)u'_1(t_0)}{u_1(t)u'_2(t_0) - u_(t)u_1(t_0)}\,u_0 + \frac{u_2(t)u_1(t_0) - u_1(t)u_2(t_0)}{u_1(t_0)u'_2(t_0) - u_2(t_0)u'_1(t_0)}\,u'_0 +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \frac{[u_2(t)u_1(\tau) - u_1(t)u_2(\tau)]h(\tau)\,d\tau}{W(u_1,u_2)(\tau)},$$

або у вигляді

$$u(t) = c_1(t,t_0)u_0 + c_2(t,t_0)u'_0 + \int\limits_{t_0}^{t} c_2(t,\tau)h(\tau)\,d\tau, \qquad (1.28)$$

де

$$c_1(t,\tau) = \frac{u_1(t)u'_2(\tau) - u_2(t)u'_1(\tau)}{W(u_1,u_2)(\tau)}, \quad c_2(t,\tau) = \frac{u_2(t)u_1(\tau) - u_1(t)u_2(\tau)}{W(u_1,u_2)(\tau)}.$$

Тут функції $c_1(t,\tau)$, $c_2(t,\tau)$ є розв'язками (відносно змінної t) ЛОДР (1.2_0) які при $t=\tau$ задовольняють відповідно наступні початкові умови

$$c_1(\tau,\tau)=1, \quad \frac{\partial c_1(\tau,\tau)}{\partial t}=0, \quad c_2(\tau,\tau)=0, \quad \frac{\partial c_2(\tau,\tau)}{\partial t}=1.$$

формула (1.28) є відомою формулою Коші для ЛНДР (1.2). При цьому функція $c_2(t,\tau)$ носить назву функція Коші. Формула Коші дає можливість відразу записувати вигляд розв'язку ЛНДР (1.2), який задовольняє початкові умови $u(t_0)=u_0$, $u'(t_0)=u'_0$. Зокрема, будемо мати зображення

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} c_2(t,\tau)h(\tau)\,d\tau, \tag{1.29}$$

для частинного розв'язку, що задовольняє нульові початкові умови $u(t_0)=u'(t_0)=0$.

Для ЛНДР виду (1.3) у самоспряженій формі, обираючи два розв'язки $u_1(t)$, $u_2(t)$ відповідного ЛОДР (1.3_0), для яких у формулі їх вронскіану (1.17) стала $c\neq 0$, подібно попередньому отримуємо для функцій $C_1(t)$, $C_2(t)$ з (1.19) систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(t)u_1(+C_2'(t)u_2(t)=0, \\ C_1'(t)u_1'(t)+C_2'(t)u_2'(t)]=\frac{h(t)}{p(t)}, \end{cases} .$$

Звідси знаходимо

$$C_1'(t)=-\frac{h(t)u_2(t)}{p(t)W(u_1,u_2)(t)}, \quad C_2'(t)=\frac{h(t)u_1(t)}{p(t)W(u_1,u_2)(t)},$$

або з урахуванням (1.17)

$$C_1'(t)=-\frac{h(t)u_2(t)}{c}, \quad C_2'(t)=\frac{h(t))u_1(t)}{c},$$

Інтегруючи ці співвідношенняна проміжку від t_0 до t (t_0, $t\in I$, будемо мати

$$C_1(t)=C_1(t_0)-\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} u_2(\tau)h(\tau)\,d\tau, \quad C_2(t)=C_2(t_0)+\frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} u_1(\tau)h(\tau)\,d\tau.$$

Підставляючи ці значенння у формулу (1.19) отримаємо розв'язок ЛНДР (1.3) виду

$$u(t)=C_1(t_0)u_1(t)+C_2(t_0)u_2(t)+c^{-1}\int_{t_0}^{t}[u_2(t)u_1(\tau)-u_1(t)u_2(\tau)]h(\tau)\,d\tau.$$

Тут сума $C_1(t_0)u_1(t)+C_2(t_0)u_2(t)$ є розв'язком відповідного ЛОДР (1.3_0) (як лінійна комбінація двох його лінійно незалежних на проміжку I розв'язків), а останій доданок

$$u_*(t)=c^{-1}\int_{t_0}^{t}[u_2(t)u_1(\tau)-u_1(t)u_2(\tau)]h(\tau)\,d\tau \tag{1.30}$$

є розв'язком ЛНДР (1.3), який задовольняє нульові початкові умови $u(t_0) = u'(t_0) = 0$.

У цьому інтегральному виразі функція

$$\overline{c}_2(t, \tau) = c^{-1}[u_2(t)u_1(\tau) - u_1(t)u_2(\tau)$$

є функцією Коші. Визначимо також вид розв'язку ЛНДР, що задовольняє початкові умови $u(t_0) = u_0$, $p(t_0)u'(t_0) = u'_0$. Для цього достатньо в сумі $C_1(t_0)u_1(t) + C_2(t_0)u_2(t)$ визначити сталі таким чином, щоб виконувались рівності

$$\begin{cases} C_1(t_0)u_1(t_0) + C_2(t_0)u_2(t_0) = u_0, \\ C_1(t_0)u'_1(t_0) + C_2(t_0)u'_2(t_0) = \frac{u'_0}{p(t_0)} \end{cases}$$

З цієї системи з використанням тотожності (1.17) знаходимо $C_1(t_0)$, $C_2(t_0)$ і підставляючи їх у суму $C_1(t_0)u_1(t) + C_2(t_0)u_2(t)$, отримуємо наступний вигляд шуканого розв'язку

$$u(t) = \overline{c}_1(t, t_0)u_0 + \overline{c}_2(t, t_0)u'_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \overline{c}_2(t, \tau)h(\tau)\, d\tau, \tag{1.31}$$

де

$$\overline{c}_1(t, t_0) = \frac{p(t_0)}{c}[u_1(t)u'_2(t_0) - u_2(t)u'_1(t_0)].$$

Дана формула і є формулою Коші для ЛНДР у самоспряженій формі (1.3).

З вищевикладеного зрозуміло, що інтегрування ЛНДР другого порядку згідно з формулами (1.14), (1.25) і (1.28), (1.31) зводиться до інтегрування відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння, а саме до знаходження двох його лінійно незалежних на проміжку I розв'язків (фундаментальної сім'ї розв'язків). Наразі виникає питання в яких випадках ми можемо знайти ФСР ЛОДР другого порядку. По перше, це можна зробити для *рівняння зі сталими коефіцієнтами*

$$au'' + bu' + cu = 0, \tag{1.32}$$

де a, b, c – дійсні сталі, $a \neq 0$.

Для цього рівняння згідно з теорією лінійних диференціальних рівнянь складається відповідне характеристичне рівняння

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{1.33}$$

1. Якщо це рівняння має різні дійсні корені λ_1, λ_2, то функції $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ утворюють фундаментальну сім'ю розв'язків ЛОДР (1.30) і загальний його розв'язок має вид

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні сталі.

2. Якщо корені характеристичного рівняння кратні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то фундаментальну сім'ю розв'язків диференціального рівняння (1.32) утворюють функції $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$ і його загальний розв'язок має вид

$$u(t) = e^{\lambda t}(C_1 + tC_2).$$

3. У випадку комплексно спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння (1.33) рівняння (1.32) має фундаментальну сім'ю розв'язків $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$ і загальний розв'язок

$$u(t) = e^{\alpha t}[C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t].$$

Найпростішими серед рівнянь зі сталими коефіцієнтами є двочлені рівняння

$$u'' - a^2u = 0, \quad u'' + a^2u = 0 \ (a \neq 0), \quad u'' = 0. \tag{1.34}$$

Вони мають (відповідно) наступні загальні розв'язки:

$$u(t) = C_1e^{at} + C_2e^{-at} \quad u(t) = C_1\sin(at) + C_2\cos(at); \quad u(t) = C_1 + C_2t,$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні сталі.

Нагадаємо також, що для ЛНДР зі сталими коефіцієнтами і спеціальними видами правої частини

$$u'' + au' + bu = h_i(t) \quad (i = 1, 2), \tag{1.35}$$

де

$$h_1(t) = P_n(t)e^{\alpha t}, \quad h_2(t) = P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{cases},$$

$$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n,$$

частинний розв'язок $u^*(t)$ рівняння (1.35) може бути знайденим без інтегрування (без застосування формули Коші), а з використанням *методу невизначених коефіцієнтів*.

У випадку правої частини $h_1(t)$ частиний розв'язок шукається у вигляді

$$u^*(t) = t^s\left(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \ldots + A_n\right)e^{\alpha t},$$

де $s = 0$, якщо число α не є коренем характеристичного рівняння (1.33), $s = 1\,(s = 2)$, якщо число α є простим (кратним) коренем характеристичного рівняння (1.33).

У випадку правої частини $h_2(t)$ частинний розв'язок шукається у вигляді

$$u^*(t) = t^s\left[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \ldots + A_n)\cos\beta t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \ldots + B_n)\sin\beta t)\right]e^{\alpha t}$$

де $s = 0$, якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння (1.33) і $s = 1$, якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем рівняння (1.33).

Тут коефіцієнти $A_i(i = 1, \ldots, n), B_i(i = 1, \ldots, n)$ визначаються після підстановки $u^*(t)$ в рівняння(1.35).

Другим важливим класом ЛОДР другого порядку, для яких може бути визначеним загальний розв'язок, є *рівняння Ейлера*

$$t^2u'' + atu' + bu = 0, \tag{1.36}$$

де a, b–дійсні сталі. Оскільки точка $t = 0$ є особливою для таких рівнянь, то вони окремо розгядаються при $t > 0$ і $t < 0$. Рівняння Ейлера (1.36) за допомогою заміни незалежної змінної

$$s = \ln|t|, \quad u(t) = u(t(s)) = v(s)$$

зводиться до ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, характеристичним рівнянням якого є рівняння виду

$$\lambda^2 - \lambda + a\lambda + b = 0.$$

ПРИКЛАД 1.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' + \frac{\mu}{t^2}u = 0. \tag{1.37}$$

Дане рівняння є рівнянням Ейлера. Застосовуючи до нього перетворення

$$s = \ln|t|, \quad u(t) = u(t(s)) = v(s), \tag{1.38}$$

будемо мати

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{dv(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = v'(s)\frac{1}{t}, \quad u''(t) = \frac{du'(t)}{dt} = \frac{d(v'(s)\frac{1}{t})}{dt} =$$

$$= \frac{dv'(s)}{dt}\frac{1}{t} - v'(s)\frac{1}{t^2} = \frac{dv'(s)}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{1}{t} - v'(s)\frac{1}{t^2} = v''(s)\frac{1}{t^2} - v'(s)\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left(v''(s) - v'(s)\right).$$

Підставляючи значення $u(t)$ і $u''(t)$ в задане рівняння, одержимо

$$\frac{1}{t^2}\left(v''(s) - v'(s)\right) + \frac{\mu}{t^2} = 0,$$

або

$$v'' - v' + \mu v = 0 \tag{1.39}$$

Це рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо для нього характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \lambda + \mu = 0.$$

Воно має корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \mu}}{2}, \quad \text{якщо} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \text{якщо} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}}{2}, \quad \text{якщо} \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Тому отримуемо нвступні формули для загального розв'язку диференціального рівняння (1.39)

$$v(s) = C_1 e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}{2}\right)s} + C_2 e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}{2}\right)s}, \quad \text{якщо} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$v(s) = e^{\frac{1}{2}s}\left(C_1 + C_2 s\right), \quad \text{якщо} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$v(s) = e^{\frac{1}{2}s}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}}{2}\right)s + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}}{2}\right)s\right) \quad \text{якщо} \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Звідси з урахуванням заміни (1.38), повертаючись до вихідних змінних t і u, одержуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння (1.39)

$$u(t) = C_1|t|^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}{2}} + C_2|t|^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}{2}}, \quad \text{якщо} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$u(t) = |t|^{\frac{1}{2}}\left(C_1 + C_2 \ln|t|\right), \quad \text{якщо} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$u(T) = |t|^{\frac{1}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}}{2}\right)\ln|t| + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}}{2}\right)\ln|t|\right) \quad \text{якщо} \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Подібний до рівняння Ейлера вигляд має *рівняння Лагранжа*

$$(\alpha t + \beta)^2 u'' + a(\alpha t + \beta)u' + b = 0, \tag{1.40}$$

де $\alpha, \beta, a, b-$ дійсні сталі. Воно має особливу точку $t = -\frac{\beta}{\alpha}$ і окремо розглядається при $t > -\frac{\beta}{\alpha}$, а також при $t < -\frac{\beta}{\alpha}$. З огляду на рівняння Ейлера стає зрозумілим, що воно з використанням заміни незалежної змінної

$$s = \ln|\alpha t + \beta|$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $v(s) = u(t(s))$.

Загальний розв'язок легко можна отримати також для ЛОДР другого порядку виду

$$u'' + g(t)u' = 0,$$

оскільки воно за допомогою перетворення $u'(t) = y(t)$ зводиться для ЛОДР першого порядку

$$y' + g(t)y = 0,$$

яке легко інтегрується.

ЛОДР другого порядку

$$P(t)u'' + Q(t)u' + R(t)u = 0 \tag{1.41}$$

будемо називати *точним*, якщо воно може бути записаним у вигляді

$$(P(t)u')' + (f(t)u)' = 0.$$

де f визначається у термінах P, Q і R.

Тут ліва частина (1.41) є точною похідною виразу $P(t)u' + f(t)u$ і тому інтегрування рівняння (1.41) зводиться до інтегрування ЛНДР першого порядку

$$P(t)u' + f(t)u = C_1,$$

де C_1 – довільна дійсна стала.

Якщо функція P –двічі неперервно диференційовна, Q – неперервно диференційовна і R – неперервна на проміжку I, то умова

$$P''(t) - Q'(t) + R(t) = 0 \tag{1.42}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (1.41) було точним.

ПРИКЛАД 1.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' + tu' + u = 0. \tag{1.43}$$

Для даного рівняння $P(t) = 1$, $Q(t) = t$, $R(t) = 1$ і тому умова (1.42) виконується, тобто рівняння є точним. При чому неважко зрозуміти, що

$$u'' + tu' + u = u'' + (tu)' = (u' + tu)'$$

Тому з (1.43) отримуємо, що

$$u' + tu = C_1,$$

де C_1 – довільна дійсна стала. Інтегруючи це ЛНДР першого порядку, будемо мати

$$u(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(C_2 + C_1 \int\limits_0^t e^{\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau \right),$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні сталі.

Якщо рівняння (1.41) не є точним, то є можливість спробувати підібрати множник $\mu(t)$ таким чином, щоб рівняння

$$\mu(t)P(t)u'' + \mu(t)Q(t)y' + \mu(t)R(t)y = 0$$

було точним, тобто допускало представлення у вигляді

$$(\mu(t)P(t)u')' + (f(t)u)' = 0.$$

Прирівнюючи у цих двох рівняннях множники при u'', $u'\, u$ і потім виключаючи з отриманих співвідношень $f(t)$, одержимо рівняння

$$P(t)\mu'' + (2P'(t) - Q(t))\mu' + (P''(t) - Q'(t) + R(t))\mu = 0, \tag{1.44}$$

якому повинна задовольняти функція $\mu(t)$. Рівняння (1.44) називають *спряженим до рівняння (1.41).* У випадку, коли рівняння (1.41) і (1.44) мають однаковий вигляд (при заміні μ на u), рівняння (1.41) називають *самоспряженим.*

Звернемо увагу на те, що рівняння (1.3_0) було нзвано самоспряженим не випадково. Для нього у випадку двічі неперервної на проміжку I функції p спряжене рівняння при заміні в ньому функції μ на u співпадає з (1.3_0). (Довести самостійно).

Для того, щоб рівняння (1.41) було самоспряженим необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $P'(t) = Q(t)$.

Далі зазначимо, що часто ЛОДР другого порядку з використанням вказаних вище основних перетворень зводиться до рівняння , яке інтегрується.

ПРИКЛАД 1.3. Розв'язати рівняння

$$u'' - 2tu' + t^2u = 0.$$

Зведемо його до двочленого з використанням перетворення (1.12). Будемо мати

$$u = ve^{\left(\int\limits_0^t \frac{2\tau}{2}\, d\tau\right)} = ve^{\frac{t^2}{2}}, \quad \text{де} \quad v = v(t) - \text{нова невідома функція.}$$

Тоді

$$u' = v'e^{\frac{t^2}{2}} + te^{\frac{t^2}{2}}v, \quad u'' = v''e^{\frac{t^2}{2}} + 2v'te^{\frac{t^2}{2}} + vt^2 + 1)e^{\frac{t^2}{2}}$$

Підставляючи ці значення $u,\, u'\,, u''$ в задане рівняння, отримаємо після поділення на $e^{\frac{t^2}{2}}$ двочлене рівняння виду

$$v'' + v = 0.$$

Згідно з прикладами (1.34)

$$v(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t -$$

загальний розв'язок цього рівняння, а тоді з урахуванням заміни

$$u(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left[C_1 \cos t + C_2 \sin t\right] -$$

загальний розв'язок заданого рівняння.

ПРИКЛАД 1.4. Розв'язати рівняння

$$2tu'' + u' - 2u = 0.$$

Зведемо його спочатку до самоспряженого виду. Поділемо на $2t$

$$u'' + \frac{1}{2t}u' - \frac{1}{t}u = 0.$$

Тут

$$u'' + \frac{1}{2t}u' = e^{-\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{2\tau}\right)}\left(u'e^{\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{2\tau}\right)}\right)', \quad \text{де} \quad t_0 = \pm 1,$$

або

$$u'' + \frac{1}{2t}u' = \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left(u'\sqrt{|t|}\right)'.$$

Після підстановки цього виразу у рівняння і в подальшому домноженню на $\sqrt{|t|}$, отримаємо рівняння у самоспряженій формі

$$\left(u'\sqrt{|t|}\right)' - \frac{\sqrt{|t|}}{t}u = 0.$$

Виконавши тепер заміну незалежної змінної

$$s = \int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{|\tau|}} = 2\sqrt{|t|}\,\mathrm{sign}\ t, \qquad u(t(s)) = v(s),$$

одержимо відносно невідомої функції v двочлене рівняння

$$v'' - \frac{|t|}{t}v = 0.$$

тобто рівняння

$$v'' - v = 0, \quad \text{якщо} \quad t > 0,$$
$$v'' + v = 0, \quad \text{якщо} \quad t < 0.$$

Згідно з прикладами (1.34) маємо загальний розв'язок цього рівняння

$$v(s) = C_1 e^s + C_2 e^{-s} \ (\text{якщо} \quad t > 0),$$
$$v(s) = C_1 \cos s + C_2 \sin s \ (\text{якщо} \quad t < 0).$$

Звідси, враховуючи зроблену заміну, отримуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$u(t) = C_1 e^{2\sqrt{t}} + C_2 e^{-2\sqrt{t}} \quad \text{при} \quad t > 0,$$
$$u(t) = C_1 \cos\left(-2\sqrt{-t}\right) + C_2 \sin\left(-2\sqrt{-t}\right) \quad \text{при} \quad t < 0.$$

$t = 0$ – особлива точка рівняння.

Все викладене вище свідчить про те, що інтегрування ЛДР другого порядку у будь якій формі (1.1) – (1.4) згідно з формулою (1.14) і формулами Коші (1.28), (1.31) зводиться лише до побудови двох лінійно незалежних на проміжку I розв'язків $u_1, , u_2$ (фундаментальної сім'ї розв'язків) відповідного ЛОДР у формі $(1.1_0) - (1.4_0)$. В розглянутих прикладах ЛОДР другого порядку загальний розв'язок $C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)$, де $u_1(t)$, $u_2(t)$– фундаментальна сім'я розв'язків ЛОДР, був отриманий або за рахунок того, що рівняння інтегруються (рівняння зі сталими коефіцієнтами, рівняння Ейлера, рівняння Лагранжа), або зводяться за допомогою деяких перетворень до рівнянь, що інтегруються. Однак, цього досягти не завжди вдається і тому виникає потреба в побудові саме двох лінійно незалежних розв'язків ЛОДР другого порядку. Ця задача може бути легко вирішеною (принаймні, локально), якщо відомий один його розв'язок, який відмінний від нуля на деякому проміжку $I_1 \subset I$.(*Редукція до диференціального рівняння першого порядку*). Це здійснюється з використанням формул для вронскіанів двох розв'язків ЛОДР.

Розглянемо ЛОДР у самоспряженій формі ((1.3_0) (як найбільш загальне серед ЛОДР другого порядку). Припустимо, що для нього відомий один розв'язок $u(t)$, який не дорівнює нулю на деякому проміжку $I_1 \subset I$. Тоді для будь-якого розв'язку $v(t)$ цього рівняння згідно з формулою (1.17) для вронскіану цих розв'язків має місце тотожність

$$W(u, v)(t) = \frac{c}{p(t)} \quad \text{при} \quad t \in I_1, \tag{1.45}$$

тобто

$$\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = \frac{c}{p(t)} \quad \text{при} \quad t \in I_1.$$

де c – стала, що залежить тільки від $u(t)$ і $v(t)$, причому $c \neq 0$ тоді і лише тоді, коли u і v – лінійно незалежні на проміжку I_1.

Тому шукана функція $v(t)$ є розв'язком диференціального рівняння першого порядку

$$u(t)v' - u'(t)v = \frac{c}{p(t)} \quad \text{при} \quad t \in I_1.$$

Якщо це співвідношення поділити на $u^2(t)$, отримаємо рівняння виду

$$\left(\frac{v}{u(t)}\right)' = \frac{c}{p(t)u^2(t)} \quad \text{при} \quad t \in I_1.$$

Звідси у результаті інтегрування від t_0 до t, де $t_0, t \in I_1$ одержимо, що

$$v(t) = c_1 u(t) + c u(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{p(\tau)u^2(\tau)}, \tag{1.46}$$

де c_1 – деяка дійсна стала. Не важко перевірити, що при будь-яких сталих c_1, c і $t_0, t \in I_1$ функція (1.46) є розв'язком (1.3_0), що задовольняє (1.45) на будь-якому проміжку I_1, де $u(t) \neq 0$. У випадку, коли $c \neq 0$ знайдений розв' язок $v(t)$ і заданий $u(t)$ ЛОДР (1.3_0) є лінійно незалежними на проміжку I_1.

ПРИКЛАД 1.5. Розв'язати рівняння

$$u'' - (a^2t^2 + a)u = 0 \ (a \neq 0) \tag{1.47}$$

Структура цього рівняння наводить на думку спробувати знайти його розв'язок у вигляді

$$u(t) = e^{\alpha t^2 + \beta t} \tag{1.48}$$

Підставляючи цю функцію у рівняння, одержимо

$$\left[(2\alpha t + \beta)^2 + 2\alpha\right] e^{\alpha t^2 + \beta t} - (a^2t^2 + a)e^{\alpha t^2 + \beta t} = 0.$$

Спрощуючи, будемо мати

$$\left[(4\alpha^2 - a^2)t^2 + 4\alpha\beta t + (\beta^2 + 2\alpha - a)\right] e^{\alpha t^2 + \beta t} = 0.$$

Звідси зрозуміло, що функція (1.47) буде розв'язком рівняння (1.46) тоді і лише тоді, коли

$$4\alpha^2 - a^2 = 0, \quad 4\alpha\beta = 0, \quad \beta^2 + 2\alpha - a = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо, що

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \beta = 0.$$

Отже рівняння (1.47) має розв'язок

$$u(t) = e^{\frac{at^2}{2}}.$$

Лінійно незалежний з ним на множині $\mathbb{R}$ розв'язок знаходимо з формули (1.46), покладаючи в ній $c = 1, \ c_1 = 0, \ t_0 = 0$ і враховуючи, що $p(t) \equiv 1$, тобто будемо мати

$$v(t) = e^{\frac{at^2}{2}} \int\limits_0^t e^{-a\tau^2}\, d\tau.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння запишеться у вигляді

$$u(t) = e^{\frac{at^2}{2}} \left[c_1 + c_2 \int\limits_0^t e^{-a\tau^2}\, d\tau \right],$$

де c_1, c_2 – довільні дійсні сталі.

Якщо $u(t)$ – розв'язок, відмінний від нуля на деякому проміжку $I_1 \subset I$, ЛОДР у стандартній формі (1.2_0), то для застосування даного методу редукції до диференціального рівняння першого порядку не обов'язково потрібно зводити рівняння $(1.2_0$ до самоспряженої форми (1.3_0) (хоча можна і цим скористатися). Для отримання другого, лінійно незалежного з $u(t)$ розв'язку $v(t)$ рівняння $(1.2_0$ треба використати формулу для вронскіану цього рівняння

$$W(u,v)(t) = W(u,v)(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau}, \quad t_0,\, t \in I_1.$$

З цієї тотожності маємо

$$u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = W(u,v)(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau},$$

тобто v є розв'язком диференціального рівняння

$$\left(\frac{v}{u(t)} \right)' = \frac{W(u,v)(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau}}{u^2(t)},$$

звідки отримуємо, шо шукана функція v має вид

$$v(t) = u(t) c_1 u(t) + c u(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} g(s)\, ds}\, d\tau}{u^2(\tau)},$$

де $_1$, і $c \neq 0$ –дійсні сталі.

Легко переконатися в тому, що ця функція при будь-яких сталих c_1, c, і $t_0 \in I_1$ є розв'язком ЛОДР (1.2_0), причому згідно з формулою для вронскіану він буде лінійно незалежним на I_1 з $u(t)$ при $c \neq 0$. Зокрема, при $_1 = 0$ і $c = 1$ будемо мати лінійно незалежний з $u(t)$ на I_1 розв'язок виду

$$v(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} g(s)\, ds}\, d\tau}{u^2(\tau)} \qquad (1.49).$$

Редукція до диференціального рівняння першого порядку може бути здійсненою і для ЛНДР другого порядку, якщо відомим є нетривіальний розв'язок $u_1(t)$ відповідного ЛОДР.

Розглянемо ЛНДР у стандартній формі (1.2) і припустимо, що відповідне до нього ЛОДР (1.2_0) має нетривіальний розв'язок $u_1(t)$. У цьому випадку розв'язок ЛНДР (1.2) будемо шукати у вигляді

$$u(t) = u_1(t)v, \tag{1.50}$$

де $v = v(t)$ – функція, яка підлягає визначенню.

Підставляючи це значення $u(t)$ в (1.2) і враховуючи, що $u_1(t)$ є розв'язком ЛОДР (1.2_0), отримаємо диференціальне рівняння

$$u_1(t)v'' + [2u_1'(t) + g(t)u_1(t)]v' = h(t).$$

Це диференціальне рівняння є лінійним неоднорідним першого порядку відносно похідної v'. Інтегруючи його, знаходимо вигляд функції $v(t)$. Підставляючи цю функцію в (1.50) встановлюємо вид розв'язку ЛНДР (1.2).

Тут треба додати, що даний метод може бути застосований і для диференціального рівняння у стандартній формі у випадку, коли $h(t) \equiv 0$, тобто для ЛОДР (1.2_0), якщо потрібно визначити його розв'язок, лінійно незалежний з $u_1(t)$.

1.2 Спеціальні перетворення

Вище було показано, що будь яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку за допомогою деяких перетворень може бути зведеним, або до рівняння у самоспряженій формі виду (1.3), або до рівняння у канонічній формі виду (1.4). Тому при дослідженні лінійних диференціальних рівнянь другого порядку можно обмежитись розглядом тільки рівнянь або виду (1.3), або виду (1.4). Однак, при розгляді різних задач для рівнянь виду (1.3) і (1.4) часто виникає потреба доводити ці рівняння за допомогою нових перетворень до рівнянь, зокрема, виду (1.3), (1.4), більш зручних для дослідження поставлених задач. Наразі розглянемо найбільш важливі з таких перетворень.

1. Перетворення Ліувілля. Припустимо, що рівняння у самоспряженій формі може бути записаним у вигляді

$$(p(t)u')' + \mu(t)q(t)u = h(t) \tag{2.1}$$

де функції p і q є додатними і двічі неперервно диференційовними на проміжку $I \in \mathbb{R}$, а функції μ і h неперервні на I. Тоді, застосовуючи до рівняння (2.1) перетворення

$$u(t) = [p(t)q(t)]^{-\frac{1}{4}}\, v(s), \quad s = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{q(\tau)}{p(\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau + c_0, \tag{2.2}$$

де $t_0 \in I,\ c_0 \in \mathbb{R}$ –довільні фіксовані числа, одержимо рівняння в канонічній формі

$$v'' + f(s)v = H(s), \tag{2.3}$$

в якому

$$f(s) = f(s(t)) = \mu(t) + p^{\frac{1}{4}}(t)q^{-\frac{3}{4}}(t)\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\,(p(t)q(t))^{-\frac{1}{4}}\right),$$

$$H(s) = H(s(t)) = h(t)p^{\frac{1}{4}}(t)q^{-\frac{3}{4}}(t).$$

Зокрема, рівняння у канонічній формі

$$u'' + \mu(t)q(t)u = h(t) \quad (\text{випадок} \quad p(t) \equiv 1) \tag{2.4}$$

за допомогою перетворення

$$u(t) = q^{-\frac{1}{4}}v(s), \quad s = \int\limits_{t_0}^{t} q^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau + c_0 \tag{2.5}$$

зводиться до рівняння у канонічній формі

$$v'' + \left(\mu(t) - \frac{1}{4}\frac{q''(t)}{q^2(t)} + \frac{5}{16}\frac{q'^2(t)}{q^3(t)}\right)v = h(t)q^{-\frac{3}{4}}(t), \tag{2.6}$$

де $t = t(s)$ – функція, обернена для $s = s(t)$. Перетворення (2.2) і (2.5) називають перетвореннями Ліувілля відповідно для рівнянь (2.1) і (2.4). Вперше такого типу перетворення було здійснено Ліувіллем для рівняння

$$u'' + \mu q(t)u = 0, \tag{2.7}$$

в якому μ – відмінна від нуля дійсна стала. Це рівняння з використанням перетворення Ліувілля (2.5) зводиться до рівняння

$$v'' + \left(\mu - \frac{1}{4}\frac{q''(t)}{q^2(t)} + \frac{5}{16}\frac{q'^2(t)}{q^3(t)}\right)v = 0.$$

ПРИКЛАД 2.1. Знайти на проміжку $I =]0, +\infty[$ загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' + \frac{\mu}{t^2}u = 0 \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

Дане рівняння є рівнянням виду (2.7) з $q(t) = t^{-2}$. Оскільки при $q(t) = t^{-2}$ маємо

$$-\frac{1}{4}\frac{q''(t)}{q^2(t)} + \frac{5}{16}\frac{q'^2(t)}{q^3(t)} = -\frac{1}{4}\frac{6t^{-4}}{t^{-4}} + \frac{5}{16}\frac{4t^{-6}}{t^{-6}} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4},$$

то застосовуючи до рівняння (2.7) перетворення Ліувілля (2.5)

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}}v(s), \quad s = \int\limits_{1}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = \ln t, \tag{2.8}$$

отримаємо рівняння

$$v'' + \left(\mu - \frac{1}{4}\right)v = 0,$$

яке є рівнянням зі сталими коефіцієнтами одного з трьох видів (1.34). Тому його загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$v(s) = C_1 + C_2 s \quad \text{при} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$v(s) = C_1 e^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}\right)s} + C_2 e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}\right)s} \quad \text{при} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$v(s) = C_1 \cos\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) s + C_2 \sin\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) s \quad \text{при} \quad \mu > \frac{1}{4},$$

де C_1, C_2 –довільні дійсні сталі. Звідси з урахуванням заміни отримуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[C_1 + c_2 \ln t\right] \quad \text{при} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[C_1 t^{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}} + C_2 t^{-\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}\right] \quad \text{при} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) \ln t + C_2 \sin\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) \ln t\right] \quad \text{при} \quad \mu > \frac{1}{4},$$

ПРИКЛАД 2.2. Отримати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' + \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{\mu}{\ln^2 t}\right] u = 0.$$

Якщо в цьому рівнянні покласти

$$\mu(t) = \frac{1}{4} + \frac{\mu}{\ln^2 t}, \quad q(t) = t^{-2},$$

то будемо мати рівняння (2.4), в якому $h(t) \equiv 0$. Застосовуючи до нього перетворення Ліувілля (2.8), одержимо рівняння

$$v'' + \frac{\mu}{s^2} v = 0,$$

яке, як вже було показано у попередньому прикладі за допомогою перетворення Ліувілля зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами. З урахуанням отриманого результату в даному прикладі одержуємо наступний загальний розв'язок заданого рівняння

$$u(t) = (t \ln t)^{\frac{1}{2}} \left[C_1 + c_2 \ln\ln t\right] \quad \text{при} \quad \mu = \frac{1}{4},$$

$$u(t) = (t \ln t)^{\frac{1}{2}} \left[C_1 (\ln t)^{\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}} + C_2((\ln t)^{-\sqrt{\frac{1}{4}-\mu}}\right] \quad \text{при} \quad \mu < \frac{1}{4},$$

$$u(t) = (t \ln t)^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) \ln\ln t + C_2 \sin\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{4}}\right) \ln\ln t\right] \quad \text{при} \quad \mu > \frac{1}{4},$$

Зауваження 2.1. Перетворення Ліувілля зазвичай використовується, щоб у деякій мірі спростити вигляд диференціального рівняння. Зокрема для того, щоб при $\mu = \mathrm{const}$ отримаати рівняння зі сталими, або з майже сталими (у деякому сенсі) коефіцієнтами.

2. Перетворення, що пов'язане з похідною Шварца. Застосуємо до рівняння у канонічній формі (1.4) перетворення

$$u(t) = [\varphi'(t)]^{-\frac{1}{2}}\, v(s), \quad s = \varphi(t), \tag{2.9}$$

де φ – тричі неперервно диференційовна на проміжку I функція така, що $\varphi'(t) > 0$ при $t \in I$. В результаті отримаємо рівняння у канонічній формі

$$v'' + \frac{1}{\varphi'^2(t)}\left[q(t) - \frac{1}{2}\{\varphi, t\}\right] v = h(t)\,[\varphi'(t)]^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.10}$$

в якому

$$\{\varphi, t\} = \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2, \tag{2.11}$$

$t = t(s)$ – функція, що обернена для $s = s(t)$.

Тут вираз (2.11) носить назву *похідна Шварца функції* φ. Звернемо увагу на те, що перетворення (2.9) у частиному випадку, коли $\varphi'(t) = q^{\frac{1}{2}}(t)$, є перетворенням Ліувілля.

ПРИКЛАД 2.3. Знайти на проміжку I загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' + \frac{\mu}{(at^2 + bt + c)^2}u, \tag{2.12}$$

де μ, a, b, c–дійсні сталі, $a \neq 0$, і $at^2 + bt + c \neq 0$ при $t \in I$. Згідно з (2.10) бажано було б обрати функцію φ таким чином, щоб

$$\frac{1}{\varphi'^2(t)}\left[\frac{\mu}{(at^2 + bt + c)^2} - \frac{1}{2}\{\varphi, t\}\right] = \text{const}\,.$$

Тому достатньо природним представляється обрати функцію φ з умови

$$\varphi'^2(at^2 + bt + c)^2 = 1.$$

Звідси знаходимо, що

$$\varphi'(t) = \frac{1}{|at^2 + bt + c|}, \quad \varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{|a\tau^2 + b\tau + c|} + c_0,$$

де $t_0 \in I$, c_0 – довільне дійсне число. Для такої функції φ похідна Шварца має вид

$$\{\varphi, t\} = \left(\frac{-(2at + b)(at^2 + bt + c)^{-2}}{(at^2 + bt + c)^{-1}}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{-(2at + b)(at^2 + bt + c)^{-2}}{(at^2 + bt + c)^{-1}}\right)^2 =$$

$$-\left(\frac{2at + b}{at^2 + bt + c}\right)' - \frac{1}{2}\frac{(2at + b)^2}{(at^2 + bt + c)^2} = -\frac{2a}{at^2 + bt + c} + \frac{(2at + b)^2}{(at^2 + bt + c)^2} - \frac{1}{2}\frac{(2at + b)^2}{2(at^2 + bt + c)^2} =$$

$$= -\frac{2a}{at^2 + bt + c} = \frac{(2at + b)^2}{(at^2 + bt + c)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{2(at^2 + bt + c)^2}.$$

Тому для обраної функції φ

$$\frac{1}{\varphi'^2}\left[\frac{\mu}{(at^2+bt+c)^2}-\frac{1}{2}\{\varphi,t\}\right]=(at^2+bt+c)^2\left[\frac{\mu}{(at^2+bt+c)^2}-\frac{b^2-4ac}{4(at^2+bt+c)^2}\right]=\mu-\frac{b^2-4ac}{4}$$

Отже, рівняння (2.12) з використанням перетворення

$$u(t)=\sqrt{|at^2+bt+c|}\,v(s),\quad s=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0 \tag{2.13}$$

зводиться до рівняння у канонічній формі

$$v''+\left(\mu-\frac{b^2-4ac}{4}\right)v=0.$$

Згідно з прикладами (1.34) воно має загальний розв'язок

$$v(s)=C_1+C_2s\quad \text{при}\quad \mu=\frac{b^2-4ac}{4};$$

$$v(s)=C_1e^{\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\mu}\right)s}+C_2e^{-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\mu}\right)s}\quad \text{при}\quad \mu<\frac{b^2-4ac}{4};$$

$$v(s)=C_1\cos\left(\sqrt{\mu-\frac{b^2-4ac}{4}}\right)s+C_2\sin\left(\sqrt{\mu-\frac{b^2-4ac}{4}}\right)s\quad \text{при}\quad \mu>\frac{b^2-4ac}{4},$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні сталі. Звідси, зважаючи на заміни (2.13), отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.12)

$$u(t)=\sqrt{|at^2+bt+c|}\left[C_1+C_2\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0\right)\right],\quad \text{якщо}\quad \mu=\frac{b^2-4ac}{4};$$

$$u(t)=\sqrt{|at^2+bt+c|}\left[C_1e^{\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\mu}\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0\right)}+\right.$$

$$\left.+C_2e^{-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}-\mu}\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0\right)}\right],$$

якщо $\mu<\frac{b^2-4ac}{4}$;

$$u(t)=\sqrt{|at^2+bt+c|}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\mu-\frac{b^2-4ac}{4}}\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\sin\left(\sqrt{\mu-\frac{b^2-4ac}{4}}\right)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{|a\tau^2+b\tau+c|}+c_0\right)\right],\quad \text{якщо}\quad \mu>\frac{b^2-4ac}{4}.$$

Зауваження 2.2. При $a=1, b=c=0$ рівняння (2.12) має вид

$$u'' + \frac{\mu}{t^4}u = 0$$

і його загальний розв'язок при $t>0$

$$u(t) = C_1 + C_2 t, \quad \text{якщо} \quad \mu = 0;$$

$$u(t) = t\left[C_1 e^{\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{t}\right)} + C_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{-\mu}}{t}\right)}\right], \quad \text{якщо} \quad \mu < 0;$$

$$u(t) = t\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{\mu}}{t}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{\mu}}{t}\right)\right] \quad \text{якщо} \quad \mu > 0.$$

Зауваження 2.3. При $a=c=0$, $b=1$ рівняння (2.12) має вид рівняння з прикладу 2.1 і отриманий для (2.12) результат співпадає у даному випадку з результатом з прикладу 2.1.

3. Перетворення Куммера. Нехай

$$\varphi \in C^1(I;\mathbb{R}), \quad \varphi'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in I, \quad \psi \in C^2(I;\mathbb{R}), \quad \psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тоді рівняння у самоспряженій формі (1.3) за допомогою перетворення

$$u(t) = \psi(t)v(\tau), \quad \tau = \varphi(t) \tag{2.14}$$

зводиться до диференціального рівняння у самоспряженій формі

$$\frac{d}{d\tau}\left(P(\tau)\frac{dv}{d\tau}\right) + Q(\tau)v = H(\tau), \tag{2.15}$$

в якому

$$P(\tau) = P(\tau(t)) = p(t)\varphi'(t)\psi^2(t),$$

$$Q(\tau) = Q(\tau(t)) = (p((t)\psi'(t))' + q(t)\frac{\psi^2}{\varphi'(t)}, \quad H(\tau) = H(\tau(t)) = h(t)\frac{\psi(t)}{\varphi'(t)},$$

$t = t(\tau)$ – функція, обернена для $\tau(t)$ Перетворення (2.14) вперше було використано у 1834 році Куммером.

Перетворення Куммера є найбільш загальним ніж попередні два перетворення, оскільки, зокрема, охоплює їх при відповідному виборі функцій φ і ψ. Відзначимо деякі важливі частинні випадки цього перетворення:

1. При $p(t) \equiv 1$ перетворення Куммера зводить рівняння у канонічній формі (1.4) до рівняння у самоспряженій формі виду (1.3).

2. Завжди можна обрати

$$\tau = \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \left[p(s)\psi^2(s)\right]^{-1} ds + c_0, \tag{2.16}$$

де $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}$, щоб отримати більш простого вигляду рівняння у канонічній формі

$$v'' + Q(\tau)v = H(\tau), \tag{2.17}$$

в якому

$$Q(\tau) = Q(\tau(t)) = (p(t)\psi'(t))' + q(t)p(t)\psi^4(t), \quad H(\tau) = H(\tau(t)) = h(t)p(t)\psi^3(t).$$

Зокрема, при $p(t) \equiv 1$ перетворення Куммера з заміною незалежної зміної

$$\tau = \varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi^{-2}(s), ds + c_0, \tag{2.18}$$

зводить рівняння у канонічній формі (1.4) до рівняння у канонічній формі (2.17), в якому

$$Q(\tau) = Q(\tau(t)) = \psi''(t) + q(t)\psi^4(t), \quad H(\tau) = H(\tau(t)) = h(t)\psi^3(t).$$

3. Якщо $I = [a, \omega[\ (\omega \le +\infty)$, то у випадку, коли

$$\int\limits_{a}^{\omega} \left[p(s)\psi^2(s)\right]^{-!}\, ds = +\infty, \tag{2.19}$$

(2.16) відобразить проміжок $[a, \omega[$ на необмежений проміжок $[\varphi(a), +\infty[$. Зазначимо, що при використані перетворення Куммера умова (2.19) завжди може бути досягнута, наприклад наступним чином:

Якщо

$$\int\limits_{a}^{\omega} p^{-1}(s)\, ds = +\infty, \quad \text{то покладаємо} \quad \psi(t) \equiv 1,$$

а якщо

$$\int\limits_{a}^{\omega} p^{-1}(s)\, ds < +\infty, \quad \text{то покладаємо} \quad \psi(t) = \int\limits_{t}^{\omega} p^{-1}(s)\, ds.$$

Такий вибір є особливо елегантним, оскільки у кожному з випадків $(p(t)\psi'(t))' \equiv 0$ і в одержаному рівнянні (2.17) функція Q буде мати простий вигляд

$$Q(\tau) = Q(\tau(t)) = q(t)p(t)\psi^4(t).$$

4. Перетворення Ріккаті. Розглянуті перетворення зводили ЛДР до ЛДР більш зручного для дослідження виду. Однак, існують ще перетворення, які зводять ЛДР другого порядку до нелінійних диференціальних рівнянь першого першого порядку. Одним типом таких перетворень є перетворення Ріккаті.

Розглянемо ЛОДР другого порядку у самоспряженій формі.

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0, \tag{2.20}$$

де p q – неперервні на проміжку I функції, причому $p(t) > 0$ при $t \in I$. Нехай

$$r(t) = \frac{p(t)u'}{u}. \tag{2.21}$$

Тоді, враховуючи, що
$$r'(t) = \frac{(p(t)u')'}{u} - \frac{1}{p(t)}\left(\frac{p(t)u'}{u}\right)^2,$$
після поділення (2.20) на u, отримаємо відносно r диференціальне рівняння Ріккаті
$$r' + \frac{r^2}{p(t)} + q(t) = 0. \tag{2.22}$$
Це рівняння називають *рівнянням Ріккаті, відповідним до (2.20)*. Таким чином, якщо $u(t)$ – розв'язок рівняння (2.20), відмінний від нуля на проміжку $I_1 \subset I$, то $r(t) = \frac{p(t)u'(t)}{u(t)}$ є розв'язком рівняння (2.22) на проміжку I_1.

Навпаки, якщо $r = r(t)$ – розв'язок рівняння (2.22) на проміжку I_1, то інтегруючи (2.21), отримуємо розв'язок
$$u(t) = ce^{\left(\int \frac{r(s)\,ds}{p(s)}\right)} \tag{2.23}$$
рівняння (2.20), що не дорівнює нулю в жодній точці з I_1.

Неважко також перевірити, що ЛОДР другого порядку у стандартній формі
$$u'' + g(t)u' + f(t)u = 0 \tag{2.24}$$
з неперервними на проміжку I коефіцієнтами з використанням заміни
$$r(t) = \frac{u'}{u} \tag{2.25}$$
зводиться до відповідного рівняння Ріккаті
$$r' + r^2 + g(t)r + f(t) = 0 \tag{2.26}$$
.

ПРИКЛАД 2.4. Знайти на проміжку I загальний розв'язок рівняння у самоспряженій формі (2.20) у випадку, коли
$$p(t)q(t) \equiv r_0 = \text{const} \tag{2.27}$$
Рівняння (2.20) за допомогою перетворення (2.21) зводимо до відповідного рівняння Ріккаті (2.22). Перепишемо це рівняння у виді
$$r' + \frac{1}{p(t)}\left[r^2 + p(t)q(t)\right] = 0$$
і згідно з (2.27) будемо мати
$$r' + \frac{1}{p(t)}\left(r^2 + r_0\right) = 0 \tag{2.28}$$
Припустимо спочатку, що $r_0 < 0$. У цьому випадку рівняння (2.28) має два розв'язки $r_{1,2}(t) \equiv \pm\sqrt{-r_0}$, яким згідно з заміною (2.21) відповідають два розв'язки
$$u_1(t) = e^{\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{p(\tau)}}, \quad u_2(t) = e^{-\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{p(\tau)}}$$

диференціального рівняння (2.20), що є лінійно незалежними на проміжку I. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння (2.20) має вид

$$u(t) = c_1 e^{\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}} + c_2 e^{-\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}}.$$

Нехай тепер $r_0 > 0$. У цьому випадку рівняння (2.28) має два чисто уявних розв'язків $r_{1,2}(t) \equiv \pm i\sqrt{r_0}$. Звідки з урахуванням заміни (2.21) отримуємо два розв'язки

$$u_1(t) = e^{i\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}}, \quad u_2(t) = e^{-i\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}}$$

диференйіального рівняння (2.20), яким відповідають два дійсних розв'язки

$$u_1(t) = \cos\left[\sqrt{r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}\right], \quad u_2(t) = \sin\left[\sqrt{-r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}\right],$$

які є лінійно незалежними на I, і тому загальний розв'язок рівняння (2.20) запишеться у вигляді

$$iu(t) = c_1\cos\left[\sqrt{r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}\right] + c_2\sin\left[\sqrt{r_0}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}\right].$$

При $r_0 = 0$ маємо $q(t) \equiv 0$ і тому безпосередньо з рівняння (2.20) одержуємо загальний розв'язок цього рівняння

$$u(t) = c_1 + c_2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{p(\tau)}$$

5. Перетворення Боля (1906 р).

Це перетворення визначається наступним чином:

а) якщо $u(t)$ і $v(t)$ – розв'язки рівняння у самоспряженій формі (1.3_0), для яких в тотожності (1.17) стала $c \neq 0$ (тобто лінійно незалежні на проміжку I), то функція

$$\rho(t) = \left[u^2(t) + v^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}$$

є розв'язком нелінійного диференціального рівняння

$$(p(t)\rho')' + q(t)\rho = \frac{c^2}{p(t)\rho^3} \qquad (2.29)$$

б) Навпаки, якщо деяка функція $\rho(t)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.29), то

$$u(t) = \rho(t)\sin\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{c\,d\tau}{p(\tau)\rho^2(\tau)}\right] \qquad (2.30)$$

є розв'язком диференціального рівняння (1.3_0). При цьому загальний розв'язок диференціального рівняння (1.3_0) має вид

$$u(t) = c_1\rho(t)\sin\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{c\,d\tau}{p(\tau)\rho^2(\tau)} + c_2\right] \tag{2.31}$$

5. Перетворення Прюфера. Перетворення Прюфера полягає в наступному. Спочатку рівняння (1.3_0) у спряженій формі з використанням замін

$$u(t) = x_1(t), \quad p(t)u'(t) = x_2(t) \tag{2.32}$$

зводиться до системи рівнянь

$$x_1' = \frac{x_2}{p(t)}, \quad x_2' = -q(t)x_1.$$

Після цього з використанням перетворення

$$x_1 = \rho\sin\varphi, \quad x_2 = \rho\cos\varphi, \tag{2.33}$$

де $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ – нові невідомі функції, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\varphi + q(t)\sin^2\varphi, \\ \rho' = -\left(q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\rho\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases} \tag{2.34}$$

З (2.32) і (2.33) знаходимо, що

$$\rho^2(t) = u^2(t) + (p(t)u'(t))^2 \quad \frac{u(t)}{p(t)u'(t)} = \operatorname{tg}\varphi(t).$$

Якщо $u(t)$ – нетривіальний розв'язок диференціального рівняння у самоспряженій формі (1.3_0), то звідси маємо

$$\rho(t) = \left(u^2(t) + p^2(t)u'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad \varphi(t) = Arctg\frac{u(t)}{p(t)u'(t)}. \tag{2.35}$$

Оскільки u і u' одночасно не дорівнюють нулю, то фіксуючи відповідне значення функції φ в деякій точці $t_0 \in I$, визначаємо з використанням другої з рівностей (2.35) неперервно диференційовну гілку функції $Arctg\frac{u(t)}{p(t)u'(t)}$.

Перетворення Прюфера (2.35) зводить рівняння (1.3_0) безпосередньо до системи (2.34).

Важливою особливістю цієї системи є те, що тут перше рівняння не залежить від другого, оскільки містить тільки одну невідому функцію φ. Якщо розв'язок $\varphi(t)$ першого рівняння визначений, то відповідний розв'язок $\rho(t)$ другого з рівнянь (2.34) може бути знайденим за допомогою квадратури. Більш того, треба зазначити, що кожний розв'язок першого рівняння системи (2.33) визначений на всьому проміжку I, де неперервні функції p і q.

Навпаки, неперервні розв'язки системи рівнянь (2.34) визначають розв'язки диференціального рівняння (1.3_0) за допомогою замін (2.35).

Зауваження 2.4. Перетворення Ріккаті, Боля і Прюфера ефективно використовуються в теорії коливності і неколивності ЛОДР другого порядку.

6. Варіація сталих.

Розглянемо поряд з рівнянням у самоспряженій формі (1.3_0) рівняння

$$(p_0(t)w')' + q_0(t)w = 0, \tag{2.36}$$

де функції $p_0(t) \neq 0$, $q_0(t)$ – також неперервні на I. Рівняння (1.3_0) і (2.36) еквівалентні відповідним системам диференціальних рівнянь першого порядку

$$x' = P(t)x \tag{2.37}$$

де

$$x = (u, p(t)u'), \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(t)} \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

і

$$y' = P_0(t)y, \tag{2.38}$$

де

$$y = (w, p_0(t)w'), \quad P_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p_0(t)} \\ -q_0(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $u_0(t)$, $v_0(t)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.36) такі, що матриця

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_0(t) & v_0(t) \\ p_0(t)u_0'(t) & p_0(t)v_0'(t) \end{pmatrix}$$

є фундаментальною матрицею системи (2.38) і $\det Y(t) \equiv 1$, тобто

$$p_0(t)\left(u_0(t)v_0'(t) - u_0'(t)v_0(t)\right) = 1.$$

Звідси знаходимо, що

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} p_0(t)v_0'(t) & -v_0(t) \\ -p_0(t)u_0'(t) & -u_0(t) \end{pmatrix}.$$

Тепер застосуємо до системи (2.37) лініне перетворення

$$x = Y(t)z = \begin{pmatrix} u_0(t)z^1 + v_0(t)z^2 \\ p_0(t)u_0'(t)z^1 + p_0(t)v_0'(t)z^2 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$z' = C(t)z, \quad \text{де} \quad C(t) = Y^{-1}(t)\left[P(t) - P_(t)\right]Y(t)$$

Простий підрахунок, який використовує вид матриць $P_0(t)$ і $P(t)$, показує, що

$$C(t) = \left(\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{p_0(t)}\right)p_0^2(t)\begin{pmatrix} u_0'(t) & v_0'(t) \\ -u_0'^2(t) & -u_0'(t)v_0'(t) \end{pmatrix} + (q(t) - q_0(t))\begin{pmatrix} u_0(t) & v_0(t) \\ -u_0^2(t) & -u_0(t)v_0(t) \end{pmatrix}.$$

Зокрема, при $p_0(t) = p(t)$, коли рівняння (2.36) має вид

$$(p(t)w')' + q_0(t)w = 0 \tag{2.40}$$

матриця $C(t)$ залежить від $u_0(t),\ v_0(t)$ і не залежить від їх похідних. У цьому випадку рівняння (1.3_0) і відповідна йому система (2.37) зводяться до системи

$$z' = (q(t) - q_0(t)) \begin{pmatrix} u_0(t)v_0(t) & v_0^2(t) \\ -u_0^2(t) & -u_0(t)v_0(t) \end{pmatrix} z \tag{2.41}$$

В дійсності той же самий результат можна отримати більш прямим шляхом. Нехай рівняння (2.36) має розв'язок $w(t)$, який не дорівнює нулю на проміжку I. Замінемо невідому функцію u у рівнянні $(1.3_0$ на z, покладаючи

$$u = w(t)z. \tag{2.42}$$

В результаті отримаємо відносно z диференціальне рівняння

$$w(t)(p(t)z')' + 2p(t)w'(t)z' + [(p(t)w'(t))' + q(t)w(t)]z = 0.$$

Помнажаючи його на $w(t)$, одержимо

$$(p(t)w^2(t)z')' + w(t)[(p(t)w'(t))' + q(t)w(t)]z = 0,$$

або згідно з (2.36)

$$\left(p(t)w^2(t)z'\right)' + w^2(t)\left(q(t) - q_0(t)\right)z = 0, \tag{2.43}$$

тобто підстановка (2.42) зводить рівняння (1.3_0) до рівняння (2.43).

Підстановку (2.42) називають також *варіацією сталих*

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі на вронскіан ЛОДР другого порядку

1. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$tu'' + 2u' + te^t u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(1) = 2$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(5)$.

2. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$t^2 u'' - 2u' + (3 + t)u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(2) = 3$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(4)$.

3. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$(tu')' - 3t^2 u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(3) = 4$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(6)$.

4. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$(t^2 u')' - e^t u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(4) = 5$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(-1)$.

5. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$u'' - 3t^3 u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(5) = 1$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(-2)$.

6. Нехай $u_1(t),\ u_2(t)$ – розв'язки диференціального рівняння

$$u'' - e^{t^2} u = 0,$$

для яких $W(u_1, u_2)(6) = 1$. Знайти для цих розв'язків $W(u_1, u_2)(-3)$.

7. Нехай розв'язки $u_1(t),\ u_2(t)$ ЛОДР дорівнюють нулю у деякій точці з проміжку I. Довести, що вони не утворюють фундаментальну сім'ю розв' язків даного рівняння на I.

8. Нехай розв'язки $u_1(t),\ u_2(t)$ ЛОДР мають у деякій внутрішній точці з проміжку I локальний екстремум. Довести, що вони не утворюють фундаментальну сім'ю розв' язків даного рівняння на I.

9. Нехай в ЛОДР у стандартній формі (1.2_0) функції g і f такі, шо

$$g^2(t) + f^2(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Длвести, шо два розв'язки цього рівняння, які мають спільну точку перегибу, утворюють фундаментальну сім'ю розв' язків даного рівняння.

Задачі на перетворення та інтегрування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Звести рівняння до самоспряженої форми:

1.1.	$tu'' + (2t+1)u' + 2u = 0;$	
1.2.	$x^2y'' + 2x^2y' + (x^2-2)y = 0;$	
1.3.	$t(t^2+6)u'' - 4(t^2+3)u' + 6tu = 0;$	
1.4.	$t^2u'' + tu' + (t^2-n^2)u = 0$	(Рівняння Бесселя);
1.5.	$(1-t^2)u'' - tu' + n^2u = 0$	(Рівняння Чебишова);
1.6.	$tu'' + (1-t)u' + nu = 0$	(Рівняння Лагерра);
1.7.	$u'' - 2tu' + 2nu = 0$	(Рівняння Чебишова - Ерміта);
1.8.	$x(x-1)y'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x)y' + \alpha\beta y = 0$	(Рівняння Гаусса);
1.9.	$u'' + tu' - 2\lambda u = 0$	(Рівняння Вебера).

2. Звести рівняння до канонічної форми. Чи можна проінтегрувати задане рівняння у квадратурах?

2.1. $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0;$
2.2. $(4x^2-x)y'' + 2(2x-1)y' - 4y = 0;$
2.3. $u'' + \frac{2}{t}u' + u = 0;$
2.4. $t(t-1)u'' + (1+t)u' - u = 0;$
2.5. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0;$
2.6. $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$

3. Знищити в наступних ЛОДР другого порядку член з першою похідною лінійною заміною $u = a(t)v$, де $v = v(t)$ − нова невідома функція:

3.1. $t^2u'' - 2tu' + (t^2+2)u = 0;$
3.2. $t^2u'' - 4tu' + (6-t^2)u = 0;$
3.3. $(1+t^2)u'' + 4tu' + 2u = 0;$
3.4. $tu'' + u' + tu = 0.$

4. Знищити у наступних ЛОДР другого порядку член з першою похідною заміною незалежної змінної $s = \varphi(t), \quad u(t) = u(t(s)) = v(s)$:

4.1. $t^2u'' - u' - 4t^3u = 0;$
4.2. $(1+t^2)u'' + tu' + u = 0;$
4.3. $u'' - u' + e^{4t}u = 0;$
4.4. $2tu'' + u' + tu = 0.$

5. Застосувати перетворення Ліувілля до наступних рівнянь:

5.1. $u'' + at^{\alpha}u = 0 \quad (a\alpha \neq 0);$
5.2. $y'' + a\,(\ln t)^{\beta}\, y = 0 \quad (a\beta \neq 0);$
5.3. $y'' + at^{\alpha}\,(\ln t)^{\beta}\, y = 0 \quad (a \neq 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$

6. Знайти загальний розв'язок ЛОДР, користуючись частинним розв'язком:

6.1.	$u'' + \frac{2}{t}u' + u = 0,$	$u_1(t) = \frac{\sin t}{t};$
6.2.	$t^2u'' - t(t+2)u' + (t+2)u = 0,\ t > 0,$	$u_1(t) = t$
6.3.	$xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0,$	$y_1(x) = \sin x^2$
6.4.	$(\sin x - \cos x)y'' - 2\sin xy' + (\cos x + \sin x)y = 0,$	$y_1(x) = e^x;$
6.5.	$(\cos t + \sin t)u'' - 2\cos tu' + (\cos t - \sin t)u = 0,$	$u_1(t) = \cos t;$
6.6.	$xy'' + xy' + (x^2 - 0,25)y = 0,\ x > 0,$	$y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sin x;$
6.7.	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$	$y_1(x) = x;$
6.8.	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$	$y_1(x) = e^x;$
6.9.	$(x_1)y'' - xy' + y = 0,$	$y_1(x) = e^x;$
6.10.	$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0,$	$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}};$
6.11.	$u'' + \delta(tu' + u) = 0,$	$u_1(t) = e^{-\frac{\delta t^2}{2}}$
6.12.	$y'' + 2xy' - 2y = 0$	(частинний розв'язок підібрати).

7. Знайти частинний розв'язок ЛОДР у вигляді многочлена та розв'язати рівняння:

7.1. $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0;$
7.2. $(t^2 - 3t)u'' + (6 - t^2)u' + (3t - 6)u = 0;$
7.3. $(x^2 - 1)y'' = 6y;$
7.4. $t^2u'' + 4tu' + 2u = 0.$

8. Рівняння

$$tu'' + (t+N)u' + Nu = 0,\ t > 0,$$

де N– ціле не від'ємне число, має розв'язок $u_1(t) = e^t$. Показати, що другий лінійно незалежний з ним розв'язок має вид

$$u_2(t) = ce^t \int t^N e^{-t}\,dt,$$

де c –деяка дійсна стала. Знайти вигляд цього розв'язку при $N = 1$ і $N = 2$. Покладаючи $c = -\frac{1}{N!}$, довести, що

$$u_2(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^N}{N!},$$

тобто маємо суму $N + 1$-х членів формули Маклорена для e^t.

9. Знайти загальний розв'язок ЛОДР:

9.1. $y'' + xy' = 0,$
9.2. $y'' + \frac{1}{x}y' = 0.$

10. Визначити, які з рівнянь є точними та знайти їх загальні розв'язки

$$
\begin{array}{ll}
10.1. & u'' + tu' + u = 0, \\
10.2. & y'' + 3x^2y' + xy = 0; \\
10.3. & tu'' - \cos tu' + \sin tu = 0, \quad t > 0; \\
10.4. & x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0.
\end{array}
$$

11. Знайти спряжені рівняння для ЛОДР другого порядку:

$$
\begin{array}{lll}
11.1. & t^2u'' + tu' + (t^2 - \nu^2)u = 0 & \text{(рівняння Бесселя);} \\
11.2. & (1 - t^2)u'' - 2tu' + \alpha(\alpha + 1)u = 0 & \text{(рівняння Лежандра);} \\
11.3. & u'' - tu = 0 & \text{(рівняння Айрі).}
\end{array}
$$

Визначити, які з цих рівнянь є самоспряженими.

12. Знайти загальний розв'язок ЛНДР, якщо відомі два його частинних розв'язка:

$$
\begin{array}{llll}
12.1. & u'' + (1 - t)u' + u = 1, & u_1(t) = 1, & u_2(t) = t; \\
12.2. & (x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x, & y_1(x) = x, & y_2(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}.
\end{array}
$$

.

13.Знайти загальний розв'язок ЛНДР (1.2), якщо воно має три розв'язки $u_1(t) = 1,\ u_2(t) = t,\ u_3(t) = t^2$.

14. Знайти з використанням методу варіації сталих Лагранжа загальний розв'язок ЛНДР, якщо відомі два частиних розв'язка відповідного ЛОДР:

$$
\begin{array}{llll}
14.1. & t^2u'' - 2u = 3t^2 - 1 \quad (t > 0), & u_1(t) = t^2, & u_2(t) = \frac{1}{t}; \\
14.2. & t^2u'' - t(t + 2)u' + (t + 2)u = 2t^3, \quad (t > 0), & u_1(t) = t, & u_2(t) = te^t; \\
14.3. & (1 - t)u'' + tu' - u = 2(t - 1)^2e^{-t}, & u_1(t) = e^t, & u_2(t) = t; \\
14.4. & xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}, & y_1(x)1 + x, & y_2(x) = e^x; \\
14.5. & x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{\frac{3}{2}}\sin x \quad (x > 0), & y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sin x, & y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\cos x. \\
14.6. & y'' + y = \operatorname{tg} x & & \\
14.7 & y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{!+x^2}; & 7 & \\
14.8. & y'' - 2y' + y = e^x \operatorname{arctg} x; & &
\end{array}
$$

15. Знайти з використанням методу редукції до рівняння першого порядку загальний розв'язок ЛНДР, якщо відомий один частинний розв'язок відповідного ЛОДР:

$$
\begin{array}{lll}
15.1 & (1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}, & y_1(x) = 1 + x; \\
15.2 & (1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2, & y_1(x) = e^x \\
15.3 & t^2u'' - 2tu' + 2u = 4t^2 \quad (t > 0), & u_1(t) = t \\
15.4 & t^2u'' + 7tu' + 5tu = t, & u_1(t) = \frac{1}{t}
\end{array}
$$

16. Записати формулу Коші для ЛНДР другого порядку і визначити ви-

гляд розв'язку, що задовольняє дані початкові умови:

16.1.	$u'' = u = h(t),$	$u(1) = 3,$	$u'(1) = 1;$
16.2.	$y'' + 4y = h(t),$	$y(2) = 1,$	$y'(2) = 2;$
16.3.	$y'' - 3y' + 2y = 0,$	$y(2) = 1,$	$y'(2) = -1;$
16.4.	$u'' - 16u = h(t),$	$u(1) = 1,$	$u'(1) = -2;$
16.5.	$y'' - xy' = h(x),$	$y(0) = 1,$	$y'(0) = 0;$
16.6.	$u'' + \frac{5}{4t^2}u = h(t),$	$u(1) = 1,$	$u'(1) = -1;$
16.7.	$y'' - \frac{2}{x^2} = h(x),$	$y(-1) = 0,$	$y'(-1) = 0;$
16.8.	$u'' - \frac{2}{t}u' = h(t),$	$u(2) = 0,$	$u'(2) = 1.$

17. Знайти загальний розв'язок ЛДР другого порядку, попередньо перетворюючи його за допомогою вказанних перетворень до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

17.1.	$y'' + f(x)y' + \left[\frac{f^2(x)}{4} + \frac{f'(x)}{2} + a\right] y = 0,$	$y(x) = u(x)e^{\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau)\,d\tau\right)};$
17.2.	$y'' - a\frac{f'(x)}{f(x)}y' + b\,[f(x)]^{2a}\,y = 0,$	$y(x) = \eta(\xi), \quad \xi = \int\limits_{x_0}^{x} f^a(\tau)\,d\tau;$
17.3.	$(ax+b)y'' + 8ay' + c(ax+b)^{\frac{1}{5}}y = 0,$	$y(x) = \frac{\eta(\xi)}{\xi}, \quad \xi = (ax+b)^{\frac{1}{5}};$
17.4.	$y'' + \sqrt{x}y' + \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{x}{4} - 9\right) y = xe^{\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)},$	$u(x) = y(x)e^{\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)};$
17.5.	$tu'' + (4t^2 - 1)\,u' - 4t^3y = 4t^5,$	$u(t) = \eta(\xi), \quad \xi = t^2;$
17.6.	$u'' + u'\,\mathrm{tg}\,t + au\cos^2 t = 0,$	$u(t) = \eta(\xi), \quad \xi = \sin t;$
17.7.	$tu'' + (t^{a+1} - a)\,u' + bt^{2a+1}u = 0\ (a \neq -1),$	$u(t) = \eta(\tau), \quad \tau = t^{a+1}.$

18. Знайти загальний розв'язок ЛДР другого порядку, попередньо зводячи його за допомогою деяких перетворень або до рівняння зі сталими коефіцієнтами, або до рівняння Ейлера, або до рівняння виду $x'' + \varphi(t)x' = 0$.

18.1.	$y'' + [f^2(x) + f'(x)]\,y = 0,$
18.2.	$y'' + [(2\alpha-1)t^{-4\alpha} + \alpha(1-\alpha)t^{-2}]\,y = 0,$
18.3.	$u'' + tu' + u = 0,$
18.4.	$tu'' + 2u' + atu = 0,$
18.5.	$xy'' - (x+1)y' + y = 0,$
18.6.	$v'' + 4tv' + (4t^2 + 2)v = 0,$
18.7.	$y'' - (x^2 + 1)y = 0,$
18.8.	$z'' + (a^2x^2 + a)z = 0,$
18.9	$y'' + y' + +ae^{-2x}y = 0,$
18.10.	$u'' + au' + be^{2at}u = 0,$
18.11.	$y'' + (1 + 2tg^2x)y = 0,$
18.12.	$v'' - xv' + (x-1)v = 0,$
18.13.	$xy'' + (x^2 - 2)y = 0,$
18.14.	$x^2y'' = (a^2x^2 + 2)y = 0.$

19. Для рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(t^\alpha \frac{dy}{dt}\right) + p(t)y = 0 \ (\alpha \neq 0)$$

вказати перетворення

$$y(t) = V(t)\xi(\tau), \quad \tau = \tau(t)$$

з властивостями

$$V, \tau \in C^2(]0,+\infty[;\mathbb{R}), \quad V(t) \neq 0, \quad \tau(t) > 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty,$$

що зводить його до рівняння виду $\xi'' + q(\tau)\xi = 0$.

20. Знайти загальний розв'язок визначеного на проміжку $J_0 =]0,+\infty[$ диференціального рівняння

$$(t^\alpha y')' + \mu t^\beta y = 0,$$

де α, β, μ – дійсні сталі і $\mu \neq 0$, у наступних випадках
a) $\alpha - \beta = 2$;
b) $\alpha - \beta \neq 2, \quad \alpha + \beta = 0$;
c) $\alpha - \beta \neq 2, \quad 3\alpha - \beta = 4$.

21. У випадках відмінних від a), b) і c) з задачі 20 звести рівняння з використанням перетворення Ліувілля до рівняння з майже сталими коефіцієнтами в околі тієї точки, в яку при перетворені відображається точка $t = +\infty$ $(t = 0)$.

Вказівка. Для отримання рівняння з майже сталими коефіцієнтами в околі точки, в яку відображається точка $t = +\infty$ $(t = 0)$ застосувати при $\alpha - \beta > 2$ $(\alpha - \beta < 2)$ перетворення Ліувілля двічі.

22. При заданій дійсній сталій μ уведемо послідовність функцій, що визначається співвідношеннями

$$q_0 = \mu - \frac{1}{4}, \quad q_1(t) = \mu t^{-2},$$

$$q_n(t) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\prod_{j=0}^{k} \ln_j t\right)^{-2} + \mu\left(\prod_{j=0}^{n-1} \ln_j t\right)^{-2} \quad \text{при} \quad n \geq 2,$$

де

$$\ln_0 t = t, \quad \ln_1 t = \ln t, \quad \ln_j t = \ln\ln_{j-1} t \ (j \geq 2).$$

Враховуючи, що функції $q_n(t)$ при $n \geq 1$ мають властивість

$$t^2\left[q_n(t) - \frac{1}{4t^2}\right] = q_{n-1}(s), \quad \text{де} \quad s = \ln t,$$

довести, що загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + q_n(t)y = 0$$

при $n \geq 1$ має, в залежності від значень μ, наступний вигляд:

$$a) \quad y(t) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \ln_j t\right)^{\frac{1}{2}} (c_1 + c_2 \ln_n t) \quad \text{при} \quad \mu = \frac{1}{4};$$

$$b) \quad y(t)=\left(\prod_{j=0}^{n-1}\ln_j t\right)^{\frac{1}{2}}\left[c_1\left(\ln_{n-1}t\right)^{\sqrt{-q_0}}+c_2\left(\ln_{n-1}t\right)^{-\sqrt{-q_0}}\right] \quad \text{при} \quad \mu<\frac{1}{4};$$

$$c) \quad y(t)=\left(\prod_{j=0}^{n-1}\ln_j t\right)^{\frac{1}{2}}\left[c_1\cos\left(\sqrt{q_0}\ln_n t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{q_0}\ln_n t\right)\right] \quad \text{при} \quad \mu>\frac{1}{4}.$$

Вказівка. Скористатися перетворенням Ліувілля, обираючи у якості $q(t)$ і $\mu(t)$ наступні функції

$$q(t)=t^{-2}, \quad \mu(t)=t^2 q_n(t).$$

23. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(\prod_{j=0}^{n}\left(\ln_j t\right)^{\alpha_j}y'\right)'+\mu\prod_{j=0}^{n}\left(\ln_j t\right)^{-\alpha_j}y=0,$$

де $\alpha_j\in\mathbb{R}$, функції $\ln_j t$ $(j\geq 0)$ – визначені у задачі 22.

24. Показати, що рівняння

$$[p_0(t)p(t)y']'+q_0(t)q(t)y=0,$$

в якому функції p_0, q_0 – строго додатні і двічі неперервно диференційовані на проміжку $J=[a,\omega[$ за допомогою узагальненого перетворення Ліувілля

$$y(t)=[p_0(t)q_0(t)]^{-\frac{1}{4}}u(s), \quad s=\int_{\alpha}^{t}\left[\frac{q_0(\tau)}{p_0(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}}+c$$

($\alpha\in J, \quad c\in\mathbb{R}$ – сталі) зводиться до виду

$$(p(t)u')'+[q(t)+\beta(t)]\,u=0,$$

де β – деяка неперервна на J функція і $t=t(s)$ – функція, обернена для $s(t)$. Знайти вид функції $\beta(t)$.

25. Нехай для фіксованого $n\neq 1$ і даних $\mu,\ \alpha_k,\ \beta_k\ (k=0,1\ldots,n)$ функції $p_k(t),\ q_k(t)$ $(k=0,1\ldots,n)$ визначаються наступним чином:

$$p_0=1, \quad q_0=\mu+\frac{\alpha_n+\beta_n}{4}\left(1+\frac{\beta_n-3\alpha_n}{4}\right);$$

$$p_k(t)=\prod_{j=1}^{k}\left(\ln_j t\right)^{\alpha_{n-k+j}};$$

$$q_k(t)-\frac{\alpha_{n-k}+\beta_{n-k}}{4}p_k(t)\left[1+\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_{n-k+j}}{\prod\limits_{m=1}^{j}\left(\ln_m t\right)}\right]=s^{\beta_{n-k+j}}q_{k-1}(s), \ s=\ln t,$$

де $\ln_j t$ $(j = 0, 1 \ldots -$ функції, що визначені у задачі 22.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(t^{\alpha_n} p_n(t) y')' + t^{\beta_n} q_n(t) y = 0$$

у випадку, коли

$$\alpha_0 - \beta_0 = 2, \quad \alpha_1 - \beta_1 = 2, \ldots, \quad \alpha_n - \beta_n = 2.$$

Вказівка. Застосувати до рівняння узагальнене перетворення Ліувілля

$$y(t) = t^{-\frac{\alpha_n + \beta_n}{4}} u(s), \quad s = \int\limits_1^t \tau^{\frac{\beta_n - \alpha_n}{2}} \, d\tau = \ln t$$

26. Враховуючи, що загальний розв'язок рівняння

$$u'' + tu' + u = 0,$$

має вигляд

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \left[c_1 + c_2 \int\limits_0^t e^{\frac{1}{2}x^2} \, dx \right],$$

знайти загальний розв'язок рівняння

$$u'' + tu' + (n+1)u = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

27. Нехай $q(t) \leq 0$ і неперервна при $\alpha < t < \beta$. Нехай $y(t)$ розв'язок рівняння

$$y'' + q(t) y = 0,$$

який задовольняє початкові умови $y(t_0) = 1$, $y'(t_0) = 0$. Тоді $y(t)$ може бути записаним у вигляді

$$y(t) = \frac{e^T + e^{-T}}{2},$$

де

$$T = (t - t_0) \sqrt{-q(s)}$$

і $s-$ функція від t, причому $t_0 \leq s \leq t$. (Петрович).

28. Якщо $q(t) > 0$, то розв'язок рівняння

$$y'' + q(t) y = 0$$

між послідовними нулями t_1 і t_2 має вигляд

$$y(t) = \cos \left[(t - t_0) \sqrt{q(s)} \right], \quad t_1 < s < t_2,$$

причому

$$t_1 = t_0 - \frac{\pi}{2} \sqrt{q(s)}, \quad t_2 = t_0 + \frac{\pi}{2} \sqrt{q(s)}$$

(Петрович).

29. Якщо $q(t) < 0$, то загальний розв'язок рівняння

$$y'' + q(t)y = 0$$

має вигляд

$$y(t) = c_1 e^{\int\limits_0^t \lambda_1(\tau)\,d\tau} + c_2 e^{\int\limits_0^t \lambda_2(\tau)\,d\tau},$$

де $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ – невід'ємні і обмежені, якщо $q(t)$ – обмежена (Осгуд).

Задачі на поведінку розв'язків ЛДР другого порядку.

1. Для ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

$$u'' + bu' + cu = 0$$

встановити:

1.1. При яких дійсних b і c кожний нетривіальний розв'язок зростає за модулем, починаючи з деякого значення t;

1.2. При яких дійсних b і c всі розв'язки є обмеженими на числовій вісі $\mathbb{R}$;

1.3. При яких дійсних b і c всі розв'язки є обмеженими на піввісі $\mathbb{R}_+$;

1.4. При яких дійсних b і c всі розв'язки прямують до нуля при $t \longrightarrow +\infty$;

1.5. Ври яких дійсних b і c всі розв'язки прямують до нуля при $t \longrightarrow -\infty$;

1.6. При яких дійсних b і c всі розв'язки є коливними і прямують до нуля при $t \longrightarrow +\infty$;

1.7. При яких дійсних b і c існує періодичний розв'язок з періодом $\omega = \frac{\pi}{6}$;

1.8. При яких дійсних b і c всі розв'язки задовольняють асимптотичне співвідношення

$$u(t) = o(e^{-t}) \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty;$$

2. Для ЛОДР з неперервними на проміжку I коефіцієнтами

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = 0$$

встановити:

2.1. Чи може функція $1 - \cos t$ бути його розв'язком на проміжку $I = (-a, a),\ a > 0$;

2.2. Чи може функція $t^2 \sin t$ бути його розв'язком на проміжку $I = (-a, a),\ a > 0$;

2.3. Чи можуть функції $u_1(t) = \sin t, \quad u_2(t) = \sin 2t$ бути розв'язками цього рівняння на проміжку $I = (-\pi, \pi)$;

2.4. Необхідні і достатні умови існування лінійно незалежних розв'язків $u_1(t),\ u_2(t)$, для яких

$$u_2(t) = u_1^2(t);$$

2.5. У випадку, коли $I = [0, +\infty)$, умову на функцію p, при виконанні якої рівняння є стійким за Ляпуновим у додатному напрямку;

2.6. У випадку, коли $I = [0, +\infty)$, умову на функцію p, при виконані якої рівняння є асимптотично стійким за Ляпуновим у додатному напрямку.

2.7. У випадку, коли $q(t) < 0$, що розв'язки не можуть мати додатних максимумів.

2.8. Довести, що у випадку, коли $q(t) > 0$, для будь-якого розв'язку диференціального рівняння

$$u'' + q(t)u = 0$$

відношення $\frac{u'(t)}{u(t)}$ спадає при зростанні t на інтервалі, де $u(t) \neq 0$.

3. Для ЛНДР.

3.1. Нехай функції p, q, f неперервні на $\mathbb{R}$ і задовольняють нерівності

$$p(t) \leq 0, \quad q(t) \leq 0, \quad f(t) \geq 0 \quad \textbf{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

і $u(t)$ – розв'язок рівняння

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t),$$

який задовольняє початкові умови

$$u(t_0) > 0, \quad u'(t_0) > 0.$$

Довести, що

$$u(t) > 0, \quad u'(t) > 0 \quad \textbf{при} \quad t \geq 0.$$

3.2. При яких дійсних k і ω диференціальне рівняння

$$u'' + k^2 u = \sin \omega t$$

має хоча б один періодичний розв'язок?