Глава 2

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Цей розділ присвячено встановленню основних властивостей розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = P(t)\mathbf{x} + q(t),$$

де $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^{n})$, I - проміжок у $\mathbb{R}$, а також лінійного диференціального рівняння n -го порядку

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} = f(t),$$

у якому $p_k \in C(I;\mathbb{R})$ $(k = 1, \dots, n)$, $f \in C(I;\mathbb{R})$.

В окремому випадку $n = 1$ обидва ці об'єкти являють собою одне лінійне диференціальне рівняння першого порядку виду

$$x' + p(t)x = q(t),$$

де $p, f \in C(I;\mathbb{R})$. Тому природним видається почати дослідження саме з цього простого диференціального рівняння.

2.1 Лінійне диференціальне рівняння першого порядку

2.1.1 Формула Коші.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t), \tag{1.1}$$

де $p, q \in C(I;\mathbb{R})$, $I-$ проміжок в $\mathbb{R}$. Виберемо довільним чином початкові дані $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}$ і поставимо задачу Коші про знаходження розв'язку рівняння (1.1), що задовольняє умову

$$x(t_0) = c_0. \tag{1.2}$$

Припустимо, що ця задача має розв'язок $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Тоді поряд з (1.2) виконано на проміжку I тотожність

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) \equiv q(t).$$

Оскільки

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) = e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} x(t) \right)',$$

то цю тотожність можна записати у вигляді

$$e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left(e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} x(t) \right)' \equiv q(t),$$

або

$$\left(e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} x(t) \right)' \equiv q(t) e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

Інтегруючи цю тотожність на проміжку від t_0 до t $(t \in I)$, отримаємо

$$e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} x(t) \Bigg|_{t_0}^{t} \equiv \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau) e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} p(s)\,ds} d\tau.$$

Звідки, з урахуванням (1.2), знаходимо

$$e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} x(t) - c_0 \equiv \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau) e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} d\tau.$$

або

$$x(t) = c_0 e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau) e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} p(s)\,ds} d\tau, \qquad t \in I. \tag{1.3}$$

Цю формулу називають **формулою Коші** для рівняння (1.1).

Таким чином, показано, що якщо задача Коші (1.1)-(1.2) має розв'язок, він однозначно визначається формулою Коші (1.3). То що розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2) існує, перевіряється безпосередньою підстановкою функції (1.3) у (1.1) та (1.2).

Отже, нами встановлено наступну

Т е о р е м а 1. 1. *Якщо $p, q \in C(I;\mathbb{R})$, де I – проміжок в $\mathbb{R}$, то для будь-яких $t_0 \in I$ і $c_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші (1.1)-(1.2) має єдиний розв'язок, який визначається формулою Коші (1.3).*

Зауваження 1. 1. У формулі Коші перший доданок є розв'язком задачи Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + p(t)x = 0, \\ x(t_0) = c_0 \end{cases}$$

для відповідного однорідного рівняння, а друге – розв'язком задачи Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + p(t)x = q(t), \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

для неоднорідного рівняння.

Зауваження 1. 2. Формула Коші при довільному $c_0 \in \mathbb{R}$ дає множину всіх рішень рівняння (1.1). Дійсно, будь-який розв'язок рівняння (1.1), будучи визначеним на всьому проміжку I, приймає деяке значення c_0 при $t = t_0$, і тому буде розв'язком задачі Коші (1.1)-(1.2). З іншого боку, через кожну точку (t_0, c_0) прямий $t = t_0$ проходить єдина інтегральна крива рівняння (1.1), якій відповідає розв'язок задачі Коші (1.1)-(1.2).

Зауваження 1. 3. Якщо у другому доданку формули Коші множник $e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ внести під знак інтеграла та ввести позначення

$$C(t,\tau) = e^{-\int_{\tau}^{t} p(s)\,ds}, \tag{1.4}$$

то отримаємо формулу Коші виду

$$x(t) = C(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t,\tau)q(\tau)\,d\tau, \qquad t \in I. \tag{1.5}$$

У цьому її поданні функцію $C(t,\tau)$ називають **функцією Коші**.

2.1.2 Деякі асимптотичні властивості розв'язків лінійних дифференціальних рівнянь першого порядку.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t), \tag{1.6}$$

де $p, q \in C\left([a,\omega[;\mathbb{R}\right)$ $(a < \omega \leq +\infty)$.

У силу формули Коші (1.3) безліч всіх розв'язків рівняння (1.6) міститься у формулі

$$x(t) = e^{-\int_{a}^{t} p(s)\,ds}\left[c_0 + \int_{a}^{t} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau\right], \qquad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Для встановлення асимптотичних властивостей при $t \uparrow \omega$ розв'язку рівняння (1.6) є зручним переписати цю формулу у вигляді

$$x(t) = e^{-\int_{a}^{t} p(s)\,ds}\left[c_1 + \int_{A}^{t} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau\right], \tag{1.7}$$

де

$$a \leq A \leq \omega, \qquad c_1 = c_0 + \int_{a}^{A} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau,$$

причому вибір $A = \omega$ можливий лише у разі, коли $\int_{a}^{\omega} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau$ збігається.

Т е о р е м а 1.2. 1. *Якщо $\int_{a}^{\omega} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau$ збігається, то рівняння (1.6) має розв'зок*

$$x(t) = e^{-\int_{a}^{t} p(s)\,ds}\int_{\omega}^{t} q(\tau)e^{\int_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\,d\tau$$

і кожний його розв'язок відмінний від цього допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення виду

$$x(t) = e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds}\left[c_1 + o(1)\right], \qquad \text{де} \qquad c_1 \neq 0.$$

2. Якщо $\int\limits_a^\omega q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\,d\tau$ розбігається до $+\infty$, або до $-\infty$, то для будь-якого розв'язку рівняння (1.6) має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$x(t) = e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds} \int\limits_a^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\,d\tau[1 + o(1)].$$

Доведення перших з цих тверджень випливає з (1.7) при $A = \omega$, якщо спочатку покласти $c_1 = 0$, а потім $c_1 \neq 0$. Друге твердження отримуємо з (1.7) при $A = a$, якщо винести $\int\limits_a^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\,d\tau$ за дужку. ■

У зв'язку з цим твердженням важливим є з'ясування питання про поведінку при $t \uparrow \omega$ інтегральних виразів виду

$$J_A(t) = e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds} \int\limits_A^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\,d\tau, \tag{1.8}$$

де межа інтегрування A дорівнює або ω, або числу $t_0 \in [a, \omega[$.

Л е м а 1.1. *Нехай функції $p, q : [a, \omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ неперервні і такі, що для деяких $t_0 \in [a, \omega[$ та $M > 0$*

$$p(t) \neq 0, \qquad \left|\frac{q(t)}{p(t)}\right| \leq M \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \tag{1.9}$$

причому

$$\int\limits_a^\omega p(s)\,ds = \pm\infty. \tag{1.10}$$

Тоді

$$|J_A(t)| \leq M \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

якщо межа інтегрування A обрана наступним чином

$$A = \begin{cases} t_0 & \text{при} \quad p(t) > 0, \\ \omega & \text{при} \quad p(t) < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Доведення. Виберемо в (1.8) межу інтегрування A як зазначено у (1.11) (з подальшого докази буде зрозуміло, що A при $p(t) < 0$ може бути обраний рівним ω). Тоді при $t \in [t_0, omega[$ в силу умов теореми матимемо

$$|J_A(t)| = e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds} \left|\int\limits_A^t \frac{q(\tau)}{p(\tau)} p(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds} d\tau\right| \leq M e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds} \left|\int\limits_A^t p(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds} d\tau\right| = M e^{-\int\limits_a^t p(s)\,ds} \left| e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\Big|_A^t \right|.$$

Звідси, враховуючи, що

$$e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\Big|_A^t = e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\Big|_{t_0}^t = e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds} - e^{\int\limits_a^{t_0} p(s)\,ds} \qquad \text{при} \quad p(t) > 0$$

та в силу (1.10)

$$e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\Bigg|_A^t = e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}\Bigg|_\omega^t = e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds} - \lim_{\tau\uparrow\omega} e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds} = e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds} \quad \textit{при} \quad p(t)<0,$$

отримаємо

$$|J_A(t)| \le M \left|1 - e^{\int\limits_t^{t_0} p(s)\,ds}\right| = M\left[1 - e^{\int\limits_t^{t_0} p(s)\,ds}\right] \le M \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \quad \textit{якщо} \quad p(t)>0,$$

$$|J_A(t)| \le M \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \quad \textit{якщо} \quad p(t)<0.$$

■

Л е м а 1.2. Нехай функції $p,q:[a,\omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ *неперервні та такі, що*

$$p(t)\ne 0 \quad \textit{при} \quad t\in[t_0,omega[\quad (t_0\in[a,\omega[), \qquad \int\limits_a^\omega p(s)\,ds=\pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{q(t)}{p(t)}=L \quad (|L|<+\infty). \tag{1.12}$$

Тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} J_A(t)=L,$$

якщо межа інтегрування A *обрана як зазначено в (1.11).*

Доведення. Якщо в (1.8) межа інтегрування A *вибрати як зазначено в (1.11), то в силу (1.12) матимемо*

$$\lim_{t\uparrow\omega} J_A(t) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int\limits_{t_0}^t q(\tau)e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}d\tau}{e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds}} = \left(\frac{?}{+\infty}\right) \quad \textit{при} \quad p(t)>0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} J_A(t) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int\limits_{\omega}^t q(\tau)e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}d\tau}{e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds}} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad \textit{при} \quad p(t)<0.$$

Тому, застосовуючи узагальнене правило Лопіталя (див. [Гол. 5, стор. 119], з урахуванням останньої з умов (1.12), отримаємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} J_A(t) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\int\limits_{A}^t q(\tau)e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}d\tau}{e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds}} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{q(t)e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds}}{p(t)e^{\int\limits_a^t p(s)\,ds}} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{q(t)}{p(t)} = L.$$

■

Зауваження 1.4. Якщо в умовах леми 1.2 $L=\pm\infty$ *, то неважко довести, що*

$$\lim_{t\uparrow\omega} J_A(t) = \pm\infty \quad (\textit{відповідно})$$

у випадку, коли межа інтегрування A *обрана таким чином*

$$A=\begin{cases} a, & \textit{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |q(\tau)|e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}d\tau=+\infty,\\ \omega, & \textit{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |q(\tau)|e^{\int\limits_a^\tau p(s)\,ds}d\tau<+\infty.\end{cases}$$

Л е м м а 1.3. Нехай функції $p, q : [a,\omega[\longrightarrow \mathbf{R}$ *неперервні,*

$$\int\limits_a^\omega |q(t)|\, dt < +\infty \tag{1.13}$$

і виконано одну з наступних двох умов: або

$$\eta_1 = \sup\left\{ \int\limits_u^v p(s)\, ds \, : \, \omega > v \geq u \geq a \right\} < +\infty, \tag{1.14}$$

або

$$\eta_2 = \inf\left\{ \int\limits_u^v p(s)\, ds \, : \, \omega > v \geq u \geq a \right\} > -\infty \quad \text{і} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \int\limits_a^t p(s)\, ds = +\infty. \tag{1.15}$$

Тоді: 1) *якщо виконано умову* (1.14) , *то* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} J_\omega(t) = 0$; 2) *якщо виконано умову* (1.15) , *то* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} J_a(t) = 0$.

Зауваження 1.5. Одна з умов (1.14) або (1.15) наперед виконано, якщо функція p *є знакосталою в деякому лівому околі* ω .

Доведення. Припустимо спочатку, що виконано умову (1.14), тобто $0 \leq \eta_1 < +\infty$. *У цьому випадку оцінюючи* $J_\omega(t)$, *матимемо*

$$|J_\omega(t)| = \left| e^{-\int\limits_a^t p(s)\, ds} \int\limits_\omega^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\, ds}\, d\tau \right| = \left| \int\limits_t^\omega q(\tau) e^{\int\limits_t^\tau p(s)\, ds}\, d\tau \right| \leq \int\limits_t^\omega |q(\tau)| e^{\int\limits_t^\tau p(s)\, ds}\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in [a,\omega[.$$

Оскільки тут $\omega > \tau \geq t \geq a$, *то в силу (1.14) і (1.13) отримаємо*

$$|J_\omega(t)| \leq e^{\eta_1} \int\limits_t^\omega |q(\tau)|\, d\tau \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси випливає справедливість першого твердження леми.

Нехай тепер виконано умови (1.15). Покажемо, що в цьому у разі $\lim\limits_{t\uparrow\omega} J_a(t) = 0$.

Виберемо довільним чином число $\varepsilon > 0$. *Враховуючи (1.13) і нерівність* $-\infty < \eta_2 \leq 0$, *яка справедлива в силу першої з умов (1.15), підберемо спочатку число* $t_1 \in [a,\omega[$ *таким, щоб виконувалась нерівність*

$$e^{-\eta_2} \int\limits_{t_1}^\omega |q(\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки

$$J_a(t) = e^{-\int\limits_a^t p(s)\, ds} \int\limits_a^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\, ds}\, d\tau = e^{-\int\limits_a^t p(s)\, ds} \int\limits_a^{t_1} q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\, ds}\, d\tau + e^{-\int\limits_a^t p(s)\, ds} \int\limits_{t_1}^t q(\tau) e^{\int\limits_a^\tau p(s)\, ds}\, d\tau,$$

то при $t \in [t_1,\omega[$

$$|J_a(t)| \leq e^{-\int\limits_a^t p(s)\, ds} \int\limits_a^{t_1} |q(\tau)| e^{\int\limits_a^\tau p(s)\, ds}\, d\tau + \int\limits_{t_1}^t |q(\tau)| e^{-\int\limits_\tau^t p(s)\, ds}\, d\tau.$$

Тут у другому доданку, що стоїть праворуч, $\omega > t \geq \tau \geq t_1 \geq a$ *. Тому в силу першої з умов (1.15) та вибору* t_1

$$\int\limits_{t_1}^{t} |q(\tau)| e^{-\int\limits_{\tau}^{t} p(s)\,ds}\, d\tau \leq e^{-\eta_2} \int\limits_{t_1}^{t} |q(\tau)|\, d\tau \leq e^{-\eta_2} \int\limits_{t_1}^{\omega} |q(\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[$$

Отже, при $t \in [t_1, \omega[$ */ має місце оцінка*

$$|J_a(t)| < e^{-\int\limits_{a}^{t} p(s)\,ds} \int\limits_{a}^{t_1} |q(\tau)| e^{\int\limits_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тепер, враховуючи другу з умов (1.15), підберемо число $t_2 \in [t_1, \omega[$ *таким, щоб при* $t_2 \leq t < \omega$ *виконувалась нерівність*

$$e^{-\int\limits_{a}^{t} p(s)\,ds} \int\limits_{a}^{t_1} |q(\tau)| e^{\int\limits_{a}^{\tau} p(s)\,ds}\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді при $t_2 \leq t\omega$ *будемо мати*

$$|J_a(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Звідси згідно з означенням границі випливає, що $\lim\limits_{t \uparrow \omega} J_a(t) = 0$ *.*

Лему повністю доведено. ■

П р и к л а д 1.1. Розглянемо на проміжку $[1, +\infty[$ *рівняння*

$$x' + p\,x = \frac{\sin t}{t},$$

де $p = \text{const} \neq 0$ *.*

Тут $\omega = +\infty$ *,* $p(t) \equiv p \neq 0$ *,* $q(t) = \frac{sint}{t}$ *та*

$$J_A(t) = e^{-pt} \int\limits_{A}^{t} \frac{\sin\tau}{\tau} e^{p\tau}\, d\tau.$$

Оскільки

$$\int\limits_{1}^{+\infty} p(s)\, ds = p \int\limits_{1}^{+\infty} ds = \pm\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{q(t)}{p(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sin t}{p\,t} = 0.$$

то згідно лемі 1.2

$$\lim_{t \to +\infty} J_1(t) = 0 \qquad \text{при} \quad p > 0 \qquad і \qquad \lim_{t \to +\infty} J_{+\infty}(t) = 0 \qquad \text{при} \quad p < 0.$$

З огляду на цей факт формулу Коші для даного рівняння перепишемо в вигляді

$$x(t) = e^{-pt} \left[c_1 + \int\limits_{A}^{t} \frac{\sin\tau}{\tau} e^{p\tau}\, d\tau \right],$$

де

$$A = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad p > 0, \\ +\infty, & \text{якщо} \quad p < 0. \end{cases}$$

Звідси ясно, що при $p > 0$ *всі розв'язки рівняння прямують до нуля при* $t \to +\infty$, *а при* $p < 0$ *рівняння має лише один розв'язок, що прямує до нуля при* $t \to +\infty$, *тоді як все інші його розв'язки допускають зображення виду*

$$x(t) = e^{-pt}[c_1 + o(1)] \quad (c_1 \neq 0) \qquad \textit{при} \quad t \to +\infty$$

і тому прямують до нескінченності при $t \to +\infty$.

Вправи для самостійної роботи.

1. *Знайти розв'язки диференціального рівняння*

$$x' - (2t^2 + 1)x = t^2,$$

   що має скінчену границю при $t \longrightarrow +\infty$, *і з'ясувати як поводяться при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

2. *Довести, що рівняння*

$$x' + \frac{\cos t}{t}\, x = \frac{\sin t}{t^2}$$

   має принаймні один розв'язок, що прямує до нуля при $t \longrightarrow +\infty$, *і з'ясувати як поводяться при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

3. *Нехай у рівнянні*

$$x' + p(t)x = q(t)$$

   функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,; \mathbb{R})$ *і такі, що*

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = p_0 = \mathrm{const} < 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} q(t) = q_0 = \mathrm{const}\,.$$

   Знайти розв'язки x *даного рівняння, що має скінчену границю при* $t \longrightarrow +\infty$, *і з'ясувати як поводяться при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

4. *Нехай у рівнянні*

$$x' + p(t)x = q(t)$$

   функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,; \mathbb{R})$ *і такі, що*

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = p_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} q(t) = q_0 = \mathrm{const}\,.$$

   Знайти розв'язки x *даного рівняння, що має скінчену границю при* $t \longrightarrow +\infty$, *і з'ясувати як поводяться при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

5. *Нехай у рівнянні*

$$x' + p(t)x = q(t)$$

   функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,; \mathbb{R})$ *і такі, що*

$$p(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad \int\limits_0^{+\infty} p(t)\,dt = -\infty, \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{q(t)}{p(t)} = l_0 = \mathrm{const}\,.$$

   Знайти розв'язки x *даного рівняння, що має скінчену границю при* $t \longrightarrow +\infty$, *і з'ясувати як поводяться при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

6. *Нехай у рівнянні*
$$x' + p(t)x = q(t)$$
функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,;\,\mathbb{R})$ *і такі, що*
$$p(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad \int\limits_0^{+\infty} p(t)\,dt = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{q(t)}{p(t)} = l_0 = \mathrm{const}\,.$$
Знайти розв'язки x *даного рівняння, що має скінчену границю при* $t \longrightarrow +\infty$ *, і з'ясувати як поводятьcя при* $t \longrightarrow +\infty$ *всі інші розв'язки.*

7. *Нехай у рівнянні*
$$x' + p(t)x = q(t)$$
функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,;\,\mathbb{R})$ *і такі, що*
$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 = \mathrm{const} < 0, \qquad \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|\,dt < +\infty.$$
Знайти розв'язок x *даного рівняння, що зникає в* $+\infty$ *, та з'ясувати як поводятьcя при* $t \longrightarrow +\infty$ *все інші розв'язки.*

8. *Нехай у рівнянні*
$$x' + p(t)x = q(t)$$
функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,;\,\mathbb{R})$ *і такі, що*
$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|\,dt < +\infty.$$
Знайти розв'язок x *даного рівняння, що зникає в* $+\infty$ *, та з'ясувати як поводятьcя при* $t \longrightarrow +\infty$ *все інші розв'язки.*

9. *Нехай у рівнянні*
$$x' + p(t)x = q(t)$$
функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,;\,\mathbb{R})$ *і такі, що*
$$p(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad \int\limits_0^{+\infty} p(t)\,dt = -\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|\,dt < +\infty.$$
Знайти розв'язок x *даного рівняння, що зникає в* $+\infty$ *, та з'ясувати як поводятьcя при* $t \longrightarrow +\infty$ *все інші розв'язки.*

10. *Нехай у рівнянні*
$$x' + p(t)x = q(t)$$
функції $p, q \in C(\mathbb{R}_+\,;\,\mathbb{R})$ *і такі, що*
$$p(t) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in \mathbf{R}_+, \qquad \int\limits_0^{+\infty} p(t)\,dt = +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|\,dt < +\infty.$$
Знайти розв'язок x *даного рівняння, що зникає в* $+\infty$ *, та з'ясувати як поводятьcя при* $t \longrightarrow +\infty$ *все інші розв'язки.*

11. *При дослідженні асимптотичних властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь корисним може бути також наступний результат (див. [Coppel, Гол. IV, § 2, стор 102].*

Нехай $q \in C([a, +\infty[\,; \mathbb{R}_+)$ *, а* p *– додатна стала. Якщо для деякого* $M \geq 0$ *виконано умову*

$$\int_t^{t+1} q(\tau)\, d\tau \leq M \quad \textit{при} \quad t \geq a$$

то

$$\int_a^t \exp\left(-p(t-\tau)\right) q(\tau)\, d\tau \leq M \left(1 - e^{-p}\right)^{-1} \quad \textit{при} \quad t \geq a$$

і

$$\int_t^\omega \exp\left(p(t-\tau)\right) q(\tau)\, d\tau \leq M \left(1 - e^{-p}\right)^{-1} \quad \textit{при} \quad t \geq a.$$

Якщо ж

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^{t+1} q(\tau)\, d\tau = 0,$$

то

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t \exp\left(-p(t-\tau)\right) q(\tau)\, d\tau = 0$$

і

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^\omega \exp\left(p(t-\tau)\right) q(\tau)\, d\tau = 0.$$

12. *Нехай у рівнянні*

$$\frac{dx}{dt} + p\,x = q(t),$$

постійна $p > 0$ *, а функція* $q \in C(\mathbb{R}_+\,; \mathbb{R})$ *така, що*

$$\sup \left\{ \int_t^{t+1} |q(\tau)|\, d\tau \;:\; t \in \mathbb{R}_+ \right\} < +\infty.$$

Довести, що в цьому випадку всі розв'язки рівняння є обмеженими на $\mathbb{R}_+$ *.*

13. *Нехай у рівнянні*

$$\frac{dx}{dt} + p\,x = q(t),$$

стала $p > 0$ *, а функція* $q \in C(\mathbb{R}_+\,; \mathbb{R})$ *така, що*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_t^{t+1} |q(\tau)|\, d\tau = 0.$$

Довести, що у цьому випадку всі розв'язки рівняння прямують до нуля за $t \longrightarrow +\infty$ *.*

2.1.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з періодичними коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$x' + p(t)x = q(t) \tag{1.16}$$

де $p, q \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *і для деякого* $\omega > 0$

$$p(t+\omega) = p(t) \quad \text{і} \quad q(t+\omega) = q(t) \quad \text{при будь-якому} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Дослідження властивостей розв'язків таких рівнянь почнемо з випадку, коли $q(t) \equiv 0$ *, тобто з випадку лінійного однорідного рівняння*

$$x' + p(t)x = 0. \tag{1.16_0}$$

У силу формули Коші безліч усіх його розв'язків має вигляд

$$x(t) = ce^{-\int\limits_0^t p(s)\,ds}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де c *- довільна стала.*

Тому для кожного нетривіального розв'язку цього рівняння ($c \neq 0$ *) через* ω *- періодичность функції* p *маємо*

$$x(t+\omega) = ce^{-\int\limits_0^{t+\omega} p(s)\,ds} = ce^{-\int\limits_0^{t} p(s)\,ds} e^{-\int\limits_t^{t+\omega} p(s)\,ds} = ce^{-\int\limits_0^{t} p(s)\,ds} e^{-\int\limits_0^{\omega} p(s)\,ds}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Отже,

$$x(t+\omega) = \mu x(t) \quad \text{при будь-яким} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

де

$$\mu = e^{-\int\limits_0^{\omega} p(s)\,ds}. \tag{1.19}$$

Дане число $\mu > 0$ *називається мультиплікатором лінійного однорідного диференціального рівняння* (1.16_0) *.*

З (1.18) ясно, що й $\mu = 1$ *, кожний нетривіальний розв'язок рівняння* (1.16_0) *є* ω *- періодичним. Припустимо тепер, що* $0 < \mu \neq 1$ *. У цьому випадку для кожного* $t \in \mathbb{R}$ *в силу (1.18) маємо*

$$x(t+\omega) = \mu x(t), \quad x(t+2\omega) = \mu x(t+\omega) = \mu^2 x(t), \quad \ldots, \quad x(t+n\omega) = \mu^n x(t), \quad \ldots$$

$$x(t) = x(t-\omega+\omega) = \mu x(t-\omega) = \mu x(t-2\omega+\omega) = \mu^2 x(t-2\omega) = \cdots = \mu^n x(t-n\omega) = \cdots,$$

Значить, якщо $t \in [0,\omega]$ *, то для будь-якого натурального* n

$$x(t+n\omega) = \mu^n x(t) \quad \text{і} \quad x(t-n\omega) = \mu^{-n} x(t). \tag{1.20}$$

Тому, побудувавши графік нетривіального розв'язка x *на проміжку* $[0,\omega]$ *, ми зможемо легко його зобразити на проміжках* $[n\omega,(n+1)\omega]$ *і* $[-n\omega,-(n-1)\omega]$ *, де* n *-будь-яке натуральне число. Якщо ж врахувати, що кожний такий розв'язок неперервний і відмінний від нуля на проміжку* $[0,\omega[$ *, причому* $x(0) = c \neq 0$ *, то в силу теореми Вейерштраса воно досягає своїх мінімального та максимального значень на цьому проміжку в деяких точках* $t_0, t_1 \in [0,\omega[$ *, причому* $x(t_0) = \alpha$ *і* $x(t_1) = \beta$ *відмінні від нуля і мають той самий знак, що і число* c *. А тоді на проміжках* $[n\omega,(n+1)\omega]$ *та* $[-n\omega,-(n-1)\omega]$ *, де* $n \in \mathbb{N}$ *, мінімальними та максимальними значеннями розв'язка* x *будуть в силу (1.20)*

$$x(t_0+n\omega) = \mu^n x(t_0) = \mu^n \alpha, \quad x(t_1+n\omega) = \mu^n x(t_1) = \mu^n \beta,$$

$$x(t_0-n\omega) = \mu^{-n} x(t_0) = \mu^{-n} \alpha, \quad x(t_1-n\omega) = \mu^{-n} x(t_1) = \mu^{-n} \beta.$$

Отже, для будь-якого натурального n виконано нерівності

$$\alpha\mu^n \le x(t) \le \beta\mu^n \qquad nnpuquadt \in [n\omega,(n+1)\omega],$$

$$\alpha\mu^{-n} \le x(t) \le \beta\mu^{-n} \quad при \quad t \in [-n\omega,-(n-1)\omega].$$

Звідси з урахуванням того, що α і β відмінні від нуля та одного знака,

$$\lim_{n\to+\infty}\mu^n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty}\mu^{-n} = +\infty, \quad якщо \quad 0<\mu<1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mu^n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty}\mu^{-n} = 0, \quad якщо \quad \mu>1,$$

отримаємо

$$\lim_{t\to+\infty}x(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty}|x(t)| = +\infty, \quad якщо \quad 0<\mu<1. \tag{1.21}$$

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)| = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty}x(t) = 0, \quad якщо \quad \mu>1, \tag{1.22}$$

Таким чином, встановлена така

Т е о р е м а 1.3. Нехай $p \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, є ω – періодичної і μ (з (1.19)) - мультиплікатор лінійного однорідного рівняння (1.16_0). Тоді: 1) якщо $mu = 1$, то кожний нетривіальний розв'язок $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}$ рівняння (1.16_0) є ω - періодичним; 2) якщо $0<\mu<1$ ($\mu>1$), то кожний нетривіальний розв'язок $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\setminus\{0\}$ рівняння (1.16_0) задовольняє умовам (1.21) (відповідно до умов (1.22)).

Для лінійного неоднорідного рівняння (1.16) має місце

Т е о р е м а 1. 4. Нехай $p,q \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ і для деякого $\omega>0$ задовольняють умовам (1.17). Нехай, крім того, мультиплікатор μ відповідного однорідного рівняння (1.16_0) відмінний від одиниці. Тоді лінійне неоднорідне рівняння (1.16) має едине $omega$ - періодичний розв'язок $x_0:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, причому будь-яке інший розв'язок $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ цього рівняння має властивості

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)| = 0, && \lim_{t\to-\infty}|x(t)-x_0(t)| = +\infty, && якщо \quad 0<\mu<1,\\
&\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)| = +\infty, && \lim_{t\to-\infty}|x(t)-x_0(t)| = 0, && якщо \quad \mu>1.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Доведення. Диференційне рівняння (1.16), будучи записаним у вигляді

$$x' = -p(t)\,x + q(t),$$

є рівнянням з ω - періодичної по t правою частиною, причому для нього безліч $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ зміни (t,x) є множиною единості в силу встановленої для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку теореми існування та единості розв'язків задачі Коші. Тому згідно з доведеним раніше для систем рівнянь загального виду з ω - періодичною по t правою частиною критерію, рішення $x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ рівняння (1.16) буде ω періодичним тоді і лише тоді, коли для нього виконано умову

$$x(0) = x(\omega). \tag{1.24}$$

Однак безліч усіх розв'язків рівняння (1.16) міститься в формулі Коші

$$x(t) = ce^{-\int\limits_0^t p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_0^t p(s)\,ds}\int\limits_0^t q(\tau)e^{\int\limits_0^\tau p(s)\,ds}d\tau, \tag{1.25}$$

де c - довільна сиала. Значить, з множини цих розв'язків слід виділити лише ті, для яких виконано умову (1.24).

В силу (1.25)

$$x(0) = c, \qquad x(\omega) = ce^{-\int\limits_0^{\omega} p(s)\,ds} + e^{-\int\limits_0^{\omega} p(s)\,ds} \int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau$$

і тому умова (1.24) набуває вигляду

$$c = \mu c + \mu \int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau,$$

де $\mu = e^{-\int\limits_0^{\omega} p(s)\,ds}$ *- мультиплікатор відповідного однорідного рівняння* (1.16_0) *.*

Звідси маємо

$$c(1-\mu) = \mu \int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau, \tag{1.26}$$

Оскільки згідно з умовами теореми $\mu \neq 1$ *, то тільки при одному значенні* c *, а саме при*

$$c = \frac{\mu}{1-\mu} \int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau,$$

формула (1.25) містить ω *- періодичний розв'язок. Це означає, що рівняння (1.16) має єдиний* ω *- періодичний розв'язок, причому цей розв'язок має вигляд*

$$x_0(t) = \frac{\mu}{1-\mu} e^{-\int\limits_0^{t} p(s)\,ds} \int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau + e^{-\int\limits_0^{t} p(s)\,ds} \int\limits_0^{t} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau. \tag{1.27}$$

Встановимо тепер справедливість другого утвердження теореми. Нехай $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *- довільний інший розв'язок рівняння (1.16). Тоді, вважаючи* $y(t) = x(t) - x_0(t)$ *, будемо мати*

$$y'(t) = x'(t) - x_0'(t) = [-p(t)x(t) + q(t)] - [p(t)x_0(t) + q(t)] = -p(t)y(t) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, y *- нетривіальний розв'язок відповідного однорідного рівняння* (1.16_0) *. Але тоді згідно з теоремою 1.3 виконано умови*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = \pm\infty, \qquad \text{якщо} \quad 0 < \mu < 1,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \qquad \text{якщо} \quad \mu > 1.$$

Звідси з урахуванням заміни $y(t) = x(t) - x_0(t)$ *випливає справедливість тверджень (1.23).* ■

Зі встановленої в ході доказу формули (1.26) безпосередньо випливає

Т е о р е м а 1.5. *Нехай* $p, q \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *і для деякого* $\omega > 0$ *задовольняються умови* (1.17) *. Нехай, крім того, мультиплікатор* μ *відповідного однорідного рівняння* (1.16_0) *дорівнює одиниці. Тоді: 1) якщо*

$$\int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau \neq 0,$$

то лінійне неоднорідне рівняння (1.16) *не має* ω *- періодичних розв'язків; 2) якщо ж*

$$\int\limits_0^{\omega} q(\tau) e^{\int\limits_0^{\tau} p(s)\,ds} d\tau = 0,$$

то всі розв'язки лінійного неоднорідного рівняння (1.16) *є* ω *- періодичними.*

П р и к л а д 1.2. Розглянемо рівняння

$$x' + p\,x = \sin^{100} t \quad (p = \text{const}).$$

Тут функції $p(t) \equiv p$ *і* $q(t) = \sin^{100} t$ *є* π *- періодичними, причому мультиплікатор відповідного однорідного рівняння є число*

$$\mu = e^{-\int\limits_0^\pi p\,dt} = e^{-\pi p}.$$

Тому: 1) якщо $p > 0$ *, то рівняння має єдиний* π *-періодичний розв'язок* x_0 *, причому всі інші його розв'язки* x *задовольняють умови*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} |x(t) - x_0(t)| = +\infty;$$

2) якщо $p < 0$ *, то рівняння має єдиний* π *-періодичний розв'язок* x_0 *, причому всі інші його розв'язки* x *задовольняють умови*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t) - x_0(t)| = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} |x(t) - x_0(t)| = 0;$$

3) якщо $p = 0$ *, то рівняння не має* π *-періодичних розв'язків, оскільки*

$$\int\limits_0^\omega q(\tau) e^{\int\limits_0^\tau p(s)\,ds} d\tau = \int\limits_0^\pi \sin^{100} \tau\, d\tau \neq 0.$$

Вправи для самостійної роботи.

1. *Знайти мультиплікатори наступних лінійних однорідних диференціальних рівнянь*

$$1)\ \ x' + \sin t\, x = 0; \qquad 2)\ \ x' + (1 - 2\cos^2 t)x = 0;$$

$$3)\ \ x' - \cos^4 t\, x = 0; \qquad 2)\ \ x' + \sin^3 2t\, x = 0,$$

$$5)\ \ x' + \frac{x}{2\sin t - \cos t + 5} = 0; \qquad 6)\ \ x' + x\ \ cost\ sqrt[3]\ sint = 0$$

та за допомогою їх описати властивості всіх розв'язків цих рівнянь.

2. *Знайти періодичний розв'язок диференціального рівняння*

$$x' = 2x\cos^2 t - \sin t$$

і дослідити як поводяться всі інші його розв'язки.

3. *Знайти періодичний розв'язок диференціального рівняння*

$$x' + 2x\cos^2 t = 1 - \sin^4 t$$

і дослідити як поводяться всі інші його розв'язки.

4. *При яких значеннях параметра* λ *рівняння*

$$x' + (\lambda + sin^2 t)\, x = |sint|$$

а) не має періодичних розв'язків?

б) має лише однин періодичний розв'язок?

5. Нехай p - відмінна від нуля стала, $q \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ і ω - періодична ($\omega > 0$). Довести, що рівняння

$$x' + px = q(t)$$

має єдиний ω - періодичний розв'язок і цей розв'язок допускає зображення виду

$$x(t) = \left(1 - e^{-p\omega}\right)^{-1} \int\limits_{t-\omega}^{t} e^{(\tau - t)p} q(\tau)\, d\tau.$$

2.2 Задача Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь та лінійного диференціального рівняння n- го порядку

2.2.1 Теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \tag{2.1}$$

де $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$, I - проміжок $\mathbb{R}$. Виберемо довільним чином $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$ і поставимо для (2.1) задачу Коші про знаходження розв'язку x , що задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = c_0. \tag{2.2}$$

Якщо P - нульова матриця, то система (2.1) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = q(t).$$

Для неї поставлена задачі рівнозначна задачі про виділення з безлічі всіх первісних вектор-функції q тієї первісної, яка задовольняє умову (2.2). З математичного аналізу відомо, що така первісна визначається однозначно і має вигляд

$$x(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau.$$

Якщо $n = 1$, то (2.1) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Для нього, як було встановлено раніше, вказана задача Коші має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок представимо у вигляді формули Коші

$$x(t) = c_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} P(s)\, ds} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{\tau}^{t} P(s)\, ds} q(\tau)\, d\tau.$$

Якщо $n > 1$ і $P : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ - довільна неперервна матрична функція, розв'язок задачі (2.1), (2.2) вже не можна записати у явному вигляді через елементи матриці P . Однак, цю задачу все-таки можна однозначно розв'язати. Для встановлення цього факту нам знадобиться наступне дуже важливе допоміжне твердження.

Лемма Г р о н у о л а - Белмана. Нехай I - проміжок у $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $u, v \in C(I;\mathbb{R}_+)$ і дотримано нерівність

$$u(t) \le c_0 + \left| \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau) u(\tau)\, d\tau \right| \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{2.3}$$

Тоді

$$u(t) \le c_0 e^{\left|\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right|} \quad \textit{при} \quad t \in I. \tag{2.4}$$

Доведення. Доведемо спочатку справедливість твердження леми на проміжку $I_+ = \{t \in I : t \ge t_0\}$ *. У такому разі цього проміжку нерівність (2.3) в силу умов на функції* u *і* v *набуває вигляду*

$$u(t) \le c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)\,d\tau \quad \textit{при} \quad t \in I_+ \tag{2.3_+}$$

і необхідно довести, що

$$u(t) \le c_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \qquad \textit{при} \quad t \in I_+. \tag{2.4_+}$$

Покладемо

$$w(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Тоді $w \in C^1(I_+; \mathbb{R}_+)$,

$$w(t_0) = c_0 \tag{2.5}$$

і виконано рівність

$$w'(t) = v(t)u(t) \quad \textit{при} \quad t \in I_+. \tag{2.6}$$

З іншого боку, через (2.23_+)

$$u(t) \le w(t) \quad \textit{при} \quad t \in I_+, \tag{2.7}$$

згідно з чим з (2.6) знаходимо

$$w'(t) \le v(t)w(t) \quad \textit{при} \quad t \in I_+$$

і, отже,

$$w'(t) - v(t)w(t) \le 0 \quad \textit{при} \quad t \in I_+$$

Оскільки

$$w'(t) - v(t)w(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \left(w(t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \right)',$$

то звідси випливає, що

$$\left(w(t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \right)' \le 0 \quad \textit{при} \quad t \in I_+.$$

Значить, функція, що стоїть ліворуч у дужках, не зростає на проміжку I_+ *. Тому найбільше значення вона набуває у лівої межі, тобто у точці* t_0 *. Отже,*

$$w(t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \le w(t) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \Bigg|_{t=t_0} = w(t_0) \quad \textit{при} \quad t \in I_+.$$

Звідси, з огляду на (2.5), маємо

$$w(t) \le c_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \qquad \textit{при} \quad t \in I_+.$$

Якщо тепер взяти до уваги нерівність (2.7), то отримаємо нерівність (2.4_+).

Справедливість твердження леми на проміжку, що залишився $I_- = \{t \in I : t \le t_0\}$ *доводиться аналогічно (зробити самостійно), враховуючи, що в цьому випадку нерівності (2.3) та (2.4) приймають відповідно вигляд*

$$u(t) \le c_0 - \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)u(\tau)\,d\tau \quad \textit{при} \quad t \in I_- \tag{2.3$_-$}$$

і

$$u(t) \le c_0 e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau} \qquad \textit{при} \quad t \in I_-. \tag{2.4$_-$}$$

■

Т е о р е м а 2. 1. *(Існування та єдиності розв'язку задачі Коші (2.1), (2.2)). Якщо* $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *і* $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$, *то для будь-якого* $t_0 \in I$ *і для будь-якого* $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *задача Коші (2.1), (2.2) має одний і лише однин розв'язок, причому ций розв'язок є границею послідовності вектор-функцій, що одностайно збігаються на кожному сегменті з* I, *та визначається рекурентними співвідношеннями*

$$x_0(t) \equiv c_0, \quad x_k(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [P(\tau)x_{k-1}(\tau) + q(\tau)]\;d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.8}$$

Доведення. *В силу доведеної раніше леми для систем диференціальних рівнянь загального виду задача Коші (2.1), (2.2) еквівалентна системі лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра*

$$x(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [P(\tau)x(\tau) + q(\tau)]\;d\tau. \tag{2.9}$$

При цьому нагадаємо, що розв'язком системи (2.9) називається вектор-функція $x \in C(I;\mathbb{R}^n)$, *яка перетворює її в тотожність на проміжку* I. *Отже, потрібно встановити, що дана система інтегральних рівнянь має однин і лише однин розв'язок. Для цього скористаємося методом Пікара послідовних наближень.*

Розглянемо послідовність вектор-функцій, що визначається рекурентними співвідношеннями (2.8). Оскільки $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *і* $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$, *то використовуючи метод математичної індукції, з урахуванням властивостей інтеграла зі змінною верхньою межею, легко переконуємося в тому, що кожна з вектор-функцій* $x_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k \in \{0, 1, 2, \ldots\})$. *Покажемо, що ця послідовність неперервних вектор-функцій одностайно збігається всередині* I, *тобто на кожному сегменті, що міститься в* I.

Запишемо, функціональний ряд, що відповідає цій послідовності,

$$c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}[x_k(t) - x_{k-1}(t)]. \tag{2.10}$$

Його $n+1$ *-а часткова сума має вигляд*

$$S_{n+1}(t) = c_0 + [x_1(t) - c_0] + [x_2(t) - x_1(t)] + [x_3(t) - x_2(t)] + \cdots + [x_n(t) - x_{n-1}(t)] = x_n(t).$$

Тому послідовність $\{x_n(t)\}$ *буде одностайно збігається всередині* I *тоді і лише тоді, коли одностайно збіжним всередині* I *буде функціональний ряд (2.10), причому сума ряду збігатиметься з границею даної послідовності.*

Для доведення одностайної збіжності ряду (2.10) скористаємося відомою з математичного аналізу ознакою Вейєрстраса. З цією метою оцінимо при кожному натуральному k *різницю* $\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|$. *Для* $k=1$ *маємо*

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} [P(\tau)c_0 + q(\tau)]\ d\tau \right\| \le \rho_0(t) \quad \textit{при} \quad t \in I, \tag{2.11}$$

де

$$\rho_0(t) = \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)c_0 + q(\tau)\|\ d\tau \right|.$$

Якщо $k > 1$, *то*

$$x_k(t) - x_{k-1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)[x_{k-1}(\tau) - x_{k-2}(\tau)]\, d\tau. \tag{2.12}$$

Звідси з урахуванням (2.11) і того факту, що $\rho_0(\tau) \le \rho_0(t)$ *для будь-якого* τ , *розташованого між* t_0 *і* t *(оскільки* $\rho_0'(t) = \|P(t)c_0 + q(t)\|\operatorname{sign}(t - t_0)$ *), знаходимо*

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\|\, \|x_1(\tau) - c_0\|\, d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| \rho_0(\tau)\, d\tau \right| \le \rho_0(t)\rho(t) \quad \textit{при} \quad t \in I,$$

де

$$\rho(t) = \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\|\ d\tau \right|.$$

Отже, якщо $k \in \{1, 2\}$, *то справедлива оцінка*

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \le \rho_0(t) \frac{\rho^{k-1}(t)}{(k-1)!} \quad \textit{при} \quad t \in I. \tag{2.13}$$

Допустимо тепер, що оцінка (2.13) справедлива для деякого $k > 2$. *Тоді з (2.12) випливає, що*

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\|\, \|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)\|\, d\tau \right| \le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \rho'(\tau) \frac{\rho^{k-1}(\tau)}{(k-1)!} \rho_0(\tau)\, d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{\rho_0(t)}{(k-1)!} \left| \int\limits_{t_0}^{t} \rho'(\tau)\rho^{k-1}(\ tau)\, d\tau \right| = \rho_0(t) \frac{\rho^k(t)}{k!} \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

Тим самим, індукцією доведено, що оцінка (2.13) має місце при будь-якому натуральному k .

Зважаючи на (2.13), для ряду (2.10) мажорантним рядом є ряд

$$\|c_0\| + \rho_0(t) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{k-1}(t)}{(k-1)!}. \tag{2.14}$$

При будь-якому $t \in I$ *його сума дорівнює* $\|c_0\| + \rho_0(t)e^{\rho(t)}$. *Тому з ознаки порівняння ряд (2.10) збігається при* $t \in I$. *Оскільки функції* ρ_0 *і* ρ *неперервні на* I , *то на будь-якому сегменті* $I_0 \subset I$ *є обмеженими, тобто існують* $M_0 > 0$ *і* $M > 0$ *такі, що*

$$\rho_0(t)| \le M_0, \quad |\rho(t)| \le M \quad \textit{при} \quad t \in I_0.$$

Тоді для ряду (2.11) на проміжку I_0 *є мажорантним в силу (2.13) буде збіжний числовий ряд*

$$\|c_0\| + M_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} = \|c_0\| + M_0 e^M.$$

Отже, з ознаки Вейерштрасса одностайної збіжності функціональних рядів, ряд (2.10), що розглядається, збігається одностайно на I_0 *.*

Отже, встановлено, що ряд (2.10), отже, і функціональна послідовність вектор-функцій $\{x_n(t)\}$ *збігається на проміжку* I *, причому ця збіжність є одностайною на будь-якому сегменті* $I_0 \subset I$ *.*

Звідси, зокрема, випливає, що гранична вектор-функція

$$x(t) = \lim_{k \to +\infty} x_k(t) \tag{2.15}$$

є неперервною на проміжку I *. Покажемо, що саме вона буде розв'язком інтегрального рівняння (2.9). Для цього, обравши довільним чином* $t \in I$ *, перейдемо в (2.8) до границі при* $k \longrightarrow +\infty$ *. Враховуючи (2.15) матимемо*

$$x(t) = c_0 + \lim_{k \to +\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x_{k-1}(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau. \tag{2.16}$$

Покажемо, що

$$\lim_{k \to +\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x_{k-1}(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau. \tag{2.17}$$

Виберемо довільним чином число $varepsilon > 0$ *. Враховуючи що* $t, t_0 \in I$ *зафіксуємо будь-який сегмент* $I_0 \subset I$ *, що містить точки* t *та* t_0 *. При цьому для деякого* $M > 0$ *буде виконано нерівність* $\rho(t) \le M$ *(оскільки* t *- фіксовано). Оскільки послідовність* $\{x_k\}$ *, отже, і* $\{x_{k-1}\}$ *збігається одностайно на* I_0 *до вектор-функції* x *, то для цього* $\varepsilon > 0$ *знайдеться натуральне* $K(\varepsilon)$ *таке, що*

$$\|x_{k-1}(\tau) - x(\tau)\| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{\textit{при}} \quad k > K \quad \text{\textit{відразу для всіх}} \quad \tau \in I_0.$$

Тому при $k > K$ *матимемо*

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x_{k-1}(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau \right\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)[x_{k-1}(\tau) - x(\tau)] \, d\tau \right\| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| \, \|x_{k-1}(\tau) - x(\tau)\| \, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{M} \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| \, d\tau \right| = \frac{\varepsilon}{M}\rho(t) \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Це, зважаючи на означення границі послідовності, означає, що для будь-якого $t \in I$ *має місце граничне співвідношення (2.17). Отже, (2.16) набуде вигляду*

$$x(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[P(\tau)x(\tau) + q(\tau)\right] \, d\tau \quad \text{\textit{при}} \quad t \in I,$$

тобто вектор-функція x *(2.15) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (2.9).*

Для завершення доведення теореми залишається встановити, що система (2.9) немає розв'язку, відмінного від цього x *.*

Нехай y *- довільний розв'язок системи (2.9). Тоді*

$$x(t) - y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} P(\tau)[x(\tau) - y(\tau)] \, d\tau \quad \text{\textit{при}} \quad t \in I.$$

Тому

$$\|x(t)-y(t)\| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|P(\tau)\| \, \|x(\tau)-y(\tau)\| \, d\tau \right| \quad при \quad t \in I.$$

Звідси, згідно з лемою Гронуолла-Беллмана, отримуемо $\|x(t)-y(t)\| \leq 0$ *при* $t \in I$ *. Отже,* $x(t) = y(t)$ *.* ■

Зауваження 2.1. Метод доведення теореми 2.1 важливий тим, що він дає алгоритм побудови розв'язка x *задачі Коші (2.1), (2.2), як границі послідовності (2.8). При цьому з (2.10) та (2.13) випливає, що*

$$\|x(t)-x_k(t)\| \leq \sum_{m=k+1}^{+\infty} \|x_m(t)-x_{m-1}(t)\| \leq \rho_0(t)\frac{\rho^k(t)}{k!}\left[1+\frac{\rho(t)}{(k+1)}+\frac{\rho^2(t)}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\right],$$

де вираз, що стоїть у дужках, явно не перевищує $e^{\rho(t)}$ *. Тим самим маємо наступну оцінку відхилення розв'язку* x *від* k *-го* $(k=1,2,\ldots)$ *наближення* x_k

$$\|x(t)-x_k(t)\| \leq \frac{\rho^k(t)}{k!}\rho_0(t)e^{\rho(t)} \quad при \quad t \in I.$$

П р і м е р 2.1. Методом послідовних наближень знайти рішення

П р и к л а д 2.2. Система

Далі, розглянемо лінійне диференціальне рівняння n *-го порядку*

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} = f(t), \tag{2.18}$$

де $p_k \in C(I;\mathbb{R})$ $(k=1,\ldots,n)$ *,* $f \in C(I;\mathbb{R})$ *,* I *- проміжок в* $\mathbb{R}$ *.*

Обравши довільним чином $t_0 \in I$ *і* $c_{0k} \in \mathbb{R}$ $(k=1,\ldots,n)$ *поставимо задачу Коші про відшукання розв'язка* u *диференціального рівняння (2.18), що задовольняє* n *умовам*

$$u^{(k-1)}(t_0) = c_{0k}, \quad k=1,\ldots,n. \tag{2.19}$$

Вважаючи

$$x_k(t) = u^{(k-1)}(t) \quad (k=1,\ldots,n) \tag{2.20}$$

зведемо рівняння (2.18) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -p_1(t)x_1 - p_2(t)x_2 - \cdots - p_n(t)x_n + f(t), \end{cases}$$

яка у векторно-матричній формі запису має вигляд (2.1), де

$$x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(t)\\ u'(t)\\ \vdots\\ u^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$P(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -p_1(t) & -p_2(t) & -p_3(t) & \dots & -p_{n-1}(t) & -p_n(t)\end{pmatrix}, \qquad q(t)=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Цю еквівалентність ми розуміємо так: якщо функція u *є розв'язком диференціального рівняння (2.18), то вектор-функція* x *з (2.21) є розв'язком системи (2.1), в якій матриця-функція* P *і вектор-функція* q *мають вигляд (2.22), і навпаки, якщо вектор-функція* x *є розв'язком системи (2.1) з матрицею-функцією* P *і вектор-функцією* q *виду (2.22), то перша компонента цього розв'язка є розв'язком рівняння (2.18), а інші його компоненти є похідними до порядку* $n-1$ *включно з цим розв'язком рівняння (2.18).*

В силу (2.21) початкові умови (2.19) набудуть вигляду (2.2), де

$$c_0=\begin{pmatrix} c_{01}\\ \vdots\\ c_{0n}\end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Таким чином, задача Коші (2.18), (2.19) еквівалентна задачі Коші. (2.1), (2.2), в якій матриця-функція P *та вектор-функція* q *мають вигляд (2.22), а вектор* c_0 *- вид (2.23).*

Оскільки в рівнянні (2.18) $p_k\in C(I;\mathbb{R})$ $(k=1,\dots,n)$, $f\in C(I;\mathbb{R})$, *то згідно (2.22) в відповідної системи (2.1)* $P\in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *і* $q\in C(I;\mathbb{R}^n)$. *Тому на підставі теореми 2.1. Коші (2.1), (2.2) має однин і лише один розв'язок* x. *В силу ж зазначеної еквівалентності йому відповідатиме однин і тільки однин розв'язок* u *(який є першою компонентою* x*) задачі Коші (2.18), (2.19). Тим самим встановлена наступна*

Т е о р е м а 2. 2 *(існування та єдиності рішення задачі Коші (2.18), (2.19)). Якщо* $p_k\in C(I;\mathbb{R})$ $(k=1,\dots,n)$ *і* $f\in C(I;\mathbb{R})$, *то для будь-якого* $t_0\in I$ *і для будь-яких* $c_{0k}\in\mathbb{R}$ $(k=1,\dots,n)$ *задача Коші (2.18), (2.19) має однин і тільки однин розв'язок.*

Вправи для самостійної роботи.

1. *Знайти всі неперервні функції* $f:[a,b[\longrightarrow[0,+\infty[$ */ такі, що*

$$f(t)\le\int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau \quad \textit{при всіх} \quad t\in[a,b[.$$

2. *Знайти всі неперервні функції* $f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ *такі, що*

$$f^2(t)=\int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau \quad \textit{при всіх} \quad t\in[a,b[.$$

3. *Нехай функція* $f:[a,b[\longrightarrow[0,+\infty[$ *неперервна та задовольняє нерівності*

$$f(t)\le K_1+\varepsilon(t-a)+K_2\int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau \quad \textit{при всіх} \quad t\in[a,b[,$$

де K_1, K_2, ε *- деякі додатні сталі. Довести, що тоді*

$$f(t) \le K_1 \exp\left(K_2(t-a)\right) + \frac{\varepsilon}{K_2}\left[\exp\left(K_2(t-a)\right) - 1\right] \quad \textit{при всіх} \quad t \in [a, b[.$$

(Вказівка: розглянути функцію $W(t) = K_1 + \varepsilon(t-a) + K_2 \int\limits_a^t f(\tau)\, d\tau$. *)*

4. *Довести наступне узагальнення леми Гронуолла-Беллмана (див. [Гол. II, § 11, стор 109]). Нехай* I *- проміжок* $\mathbb{R}$, $u, v \in C(I; \mathbb{R}_+)$ *і для будь-яких* $t, \tau \in I$ *дотримується нерівність*

$$u(t) \le u(\tau) + \left| \int\limits_{\tau}^{t} v(s)u(s)\, ds \right|.$$

Тоді для будь-яких $t, t_0 \in I$ *таких, що* $t_0 \le t$ *справедлива оцінка*

$$u(t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau} \le u(t) \le u(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau}.$$

5. *Довести наступне узагальнення леми Гронуолла-Беллмана (див. [Гол. I, § 1.2, стор 15]). Нехай* I *- проміжок* $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $x, p, f \in C(I; \mathbb{R}_+)$ *і дотримується нерівність*

$$x(t) \le c_0 + \left| \int\limits_{t_0}^{t} [p(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\, d\tau \right| \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

Тоді

$$x(t) \le c_0 e^{\left|\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\, ds\right|} + \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\left|\int\limits_{\tau}^{t} p(s)\, ds\right|} d\tau \right| \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

6. *Нехай* $c_0 \in \mathbb{R}_+$, $x, p, f \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$,

$$\int\limits_0^{+\infty} p(t)\, dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt < +\infty$$

і

$$x(t) \le c_0 + \int\limits_t^{+\infty} [p(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\, d\tau \quad \textit{при} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Довести, що тоді

$$x(t) \le c_0 e^{\int\limits_t^{+\infty} p(s)\, ds} + \int\limits_t^{+\infty} f(\tau) e^{\int\limits_t^{\tau} p(s)\, ds} d\tau \quad \textit{при} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

7. *Довести наступну лему про диференціальну нерівність (див. [, Гол. I, § 1.2, стор 15]). Нехай Нехай* I *- проміжок у* $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}$, $p, f \in C(I; \mathbb{R})$, *а функція* $x \in C^1(I; \mathbb{R})$ *задовольняє на* I *нерівності*

$$[x'(t) - p(t)x(t) - f(t)]\, \mathrm{sign}(t - t_0) \le 0$$

і

$$x(t_0) \le c_0.$$

Тоді

$$x(t) \le c_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\, ds} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) e^{\int\limits_{\tau}^{t} p(s)\, ds} d\tau \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

8. *Нехай функція* $x \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *задовольняє нерівності*

$$x'(t) \le p(t)x(t) + f(t) \quad \textit{при} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де $p \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_-)$, $f \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ *і*

$$\int\limits_0^{+\infty} p(t)\,dt = -\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty.$$

Довести, що тоді

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

9. *Довести, що розв'язок* x *задачі Коші*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \\ x(t_0) = c_0 \end{cases}$$

де $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$, I *- проміжок в* $\mathbb{R}$, *допускає оцінку*

$$\|x(t)\| \le \|c_0\|\, e^{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \|P(s)\|\,ds\right|} + \left|\int\limits_{t_0}^{t} \|q(\tau)\| e^{\left|\int\limits_{\tau}^{t} \|P(s)\|\,ds\right|} d\tau\right| \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

10. *Нехай* $P \in C([a,\omega[;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C([a,\omega[;\mathbb{R}^]n)$, $a < \omega \le +\infty$. *Довести, що якщо*

$$\int\limits_a^{\omega} \|P(t)\|\,dt < +\infty, qquad \int\limits_a^{\omega} \|q(t)\|\,dt < +\infty,$$

то для будь-якого $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *система диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t)$$

має однин і лише один розв'язок, що задовольняє умову

$$\lim_{t\uparrow\omega} x(t) = c_0.$$

2.2.2 Теореми про коректність задачі Коші.

Добре відомо, що побудована математична модель (наприклад, диференціальне рівняння) будь-якого реального процесу приблизно відображає закон, якому підпорядкований цей процес. Вибір початкового стану аналізованого процесу (початкові дані) через недосконалість технічних умов, що використовуються для цієї мети, також визначається приблизно. Тому важливим видається відповісти на наступне важливе для практики питання: чи не виявиться розв'яязок початкової задачі математичної моделі, що описує динаміку процесу, сильно відрізняється на деякому відрізку часу від динаміки самого реального процесу?

Це питання тісно пов'язане з поняттям про коректність поставленої початкової задачі для диференціального рівняння.

Говорять, що початкову задачу для диференціального рівняння поставлено коректно, якщо: 1) розв'язок задачі існує; 2) розв'язок задачі єдине; 3) розв'язок задачі неперервно залежить від початкових даних та від збурень самого рівняння.

Нехай дано задачу Коші (2.1), (2.2), де $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$, I *- проміжок у* $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$.

Це задача, як встановлено раніше, має один і лише один розв'язок $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *тобто перші дві вимоги до коректності звдачі виконано.*

Поряд з нею розглянемо збурену задачу Коші.

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{P}(t)y + \tilde{q}(t), \tag{2.24}$$

$$y(\tilde{t}_0) = \tilde{c}_0, \tag{2.25}$$

де $\tilde{P} \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\tilde{q} \in C(I;\mathbb{R}^n)$, I *- проміжок у* $\mathbb{R}$, $\tilde{t}_0 \in I$, $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$. *Вона також має єдиний розв'язок* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Третя вимога коректності говорить про те, що малі відхилення початкових даних $t_0 - \tilde{t}_0$, $c_0 - \tilde{c}_0$ *та малі відхилення* $P(t) - \tilde{P}(t)$, $q(t) - \tilde{q}(t)$ *при* $t \in I$ *повинні призвести до малого відхилення* $x(t) - y(t)$ *по всьому проміжку* I .

Точніше це виражено у такому означенні.

Означення 2. 1. Задача Коші (2.1), (2.2) називається коректною, якщо для будь-яких скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ *і скільки завгодно великого* $\rho > 0$ *знайдеться* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких* $\tilde{t}_0 \in I$, $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{P} \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\tilde{q} \in C(I;\mathbb{R}^n)$, *що задовольняють умови*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta, \qquad \|\tilde{c}_0 - c_0\| < \delta, \tag{2.26}$$

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} [\tilde{P}(\tau) - P(\tau)]\, d\tau \right\| < \delta, \quad \left\| \int\limits_{t_0}^{t} [\tilde{q}(\tau) - q(\tau)]\, d\tau \right\| < \delta \quad \text{при} \quad t \in I \tag{2.27}$$

і

$$\int\limits_{I} \|\tilde{P}(\tau) - P(\tau)\|\, d\tau < \rho,^{1} \tag{2.28}$$

виконано нерівність

$$\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in I, \tag{2.29}$$

де x *і* y *- відповідно, розв'язки задач (2.1), (2.2) та (2.24), (2.25).*

Зауваження 2. 2. У разі, коли $\tilde{P}(t) = P(t)$, $\tilde{q}(t) = q(t)$ *при* $t \in I$, *означення 2.1. є означенням неперервної залежності розв'язку задачі Коші від початкових даних.*

Т е о р е м а 2. 3. Якщо $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$ *і* $I = [a,b]$, *то за будь-яких* $t_0 \in I$, $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *задача Коші (2.1), (2.2) є коректною.*

Доведення. Оскільки розв'язок x *задачі (2.1), (2.2) належить простору* $C^1(I;\mathbb{R}^n)$ *і* I *- це сегмент, то знайдуться числа* $M_0 \geq 0$ *і* $M_1 \geq 0$ *такі, що*

$$\|x(t)\| \leq M_0, \quad \|x'(t)\| \leq M_1 \quad \text{при} \quad t \in I = [a,b]. \tag{2.30}$$

Покладемо

$$\rho_1 = \int\limits_{a}^{b} \|P(\tau)\|\, d\tau \tag{2.31}$$

і для будь-яких $varepsilon > 0$ *і* $rho > 0$ *підберемо число* $\delta > 0$, *що задовольняє нерівності*

$$\delta[3 + M_1 + 2M_0 + 2M_1(b-a)]e^{\rho+\rho_1} < \varepsilon. \tag{2.32}$$

[1]Тут інтеграл за проміжком I розуміється в властивому чи невластивому сенсі.

Тепер поряд з (2.1), (2.2) розглянемо задачу Коші (2.24), (2.25), де $\tilde{t}_0 \in I$, $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{P} \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\tilde{q} \in C(I;\mathbb{R}^n)$ *задовольняють умовам (2.26)-(2.28), і нехай* y *- розв'язок задачі (2.24), (2.25).*

Враховуючи, що x *і* y *- розв'язок задачі Коші (2.1), (2.2) та (2.24), (2.25), які еквівалентні відповідним інтегральним рівнянням Вольтерра, матимемо*

$$y(t) = \tilde{c}_0 + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau)y(\tau) + \tilde{q}(\tau)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in I,$$

$$x(t) = c_0 + \int\limits_{t_0}^{t} [P(\tau)x(\tau) + q(\tau)]\, d\tau = c_0 + \int\limits_{t_0}^{\tilde{t}_0} [P(\tau)x(\tau) + q(\tau)]\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [P(\tau)x(\tau) + q(\tau)]\, d\tau =$$

$$= c_0 + \int\limits_{t_0}^{\tilde{t}_0} x'(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [P(\tau) - \tilde{P}(\tau)]x(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau)x(\tau) + q(\tau)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Звідки випливає, що при $t \in I$

$$y(t) - x(t) = \tilde{c}_0 - c_0 - \int\limits_{t_0}^{\tilde{t}_0} x'(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{q}(\tau) - q(\tau)]\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau) - P(\tau)]x(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \tilde{P}(\tau)[y(\tau) - x(\tau)]\, d\tau.$$

Тому, оцінюючи за нормою та враховуючи при цьому, що згідно методу інтегрування частинами

$$\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau) - P(\tau)]x(\tau)\, d\tau = x(t) \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau) - P(\tau)]\, d\tau - \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} x'(\tau) \left(\int\limits_{\tilde{t}_0}^{\tau} [\tilde{P}(s) - P(s)]\, ds \right) d\tau,$$

отримаємо

$$\|y(t) - x(t)\| \le \|\tilde{c}_0 - c_0\| + \left| \int\limits_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|x'(\tau)\|\, d\tau \right| + \left\| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{q}(\tau) - q(\tau)]\, d\tau \right\| + \|x(t)\| \left\| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} [\tilde{P}(\tau) - P(\tau)]\, d\tau \right\| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|x'(\tau)\| \left\| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{\tau} [\tilde{P}(s) - P(s)]\, ds \right\| d\tau \right| + \left| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|\tilde{P}(\tau)\|\, \|y(\tau) - x(\tau)\|\, d\tau \right| \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тоді в силу (2.26)-(2.28) і (2.30) матимемо

$$\|y(t) - x(t)\| < \delta + M_1\delta + 2\delta + 2M_0\delta + 2M_1(b-a)\delta + \left| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|\tilde{P}(\tau)\|\, \|y(\tau) - x(\tau)\|\, d\tau \right| \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Звідси, використовуючи нерівність Гроноулла-Беллмана, отримаємо

$$\|y(t) - x(t)\| \le \delta[3 + M_1 + 2M_0 + 2M_1(b-a)] e^{\left| \int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|\tilde{P}(\tau)\|\, d\tau \right|} \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тут через (2.28) і (2.31)

$$\left|\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|\tilde{P}(\tau)\|\,d\tau\right| \le \left|\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|\tilde{P}(\tau)-P(\tau)\|\,d\tau\right| + \left|\int\limits_{\tilde{t}_0}^{t} \|P(\tau)\|\,d\tau\right| < \rho+\rho_1 \quad \text{при} \quad t\in I.$$

Тому з урахуванням (2.32) маємо

$$\|y(t)-x(t)\| < \delta[3+M_1+2M_0+2M_1(b-a)]e^{\rho+\rho_1} < \varepsilon \quad \text{при} \quad t\in I.$$

Тим самим показано, що задача Коші (2.1), (2.2) є коректною. ■

З а у в а ж е н н я 2.3. Якщо I - довільний проміжок $\mathbb{R}$, то (див. [Гол. 1, §1.6, стор 36] твердження теореми 2.3 залишається правильним при наступних додаткових умовах

$$\int\limits_I \|P(t)\|\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_I \|q(t)\|\,dt < +\infty, \tag{2.33}$$

З а у в а ж е н н я 2.4. Відповідно з означенням 2.1 задача Коші (2.1), (2.2) є коректною тоді і лише тоді, коли для будь-яких послідовностей $t_{0k}\in I$, $c_{0k}\in\mathbb{R}^n$, $P_k\in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q_k\in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\dots)$, що задовольняють умовам

$$\lim_{k\to+\infty} t_{0k}=t_0, \qquad \lim_{k\to+\infty} c_{0k}=c_0, \tag{2.34}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t}[P_k(\tau)-P(\tau)]\,d\tau=0, \qquad \lim_{k\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{t}[q_k(\tau)-q(\tau)]\,d\tau=0 \quad \text{одностайно по} \quad t\in I \tag{2.35}$$

і

$$\limsup_{k\to+\infty}\int\limits_I \|P_k(\tau)-P(\tau)\|\,d\tau < +\infty, \tag{2.36}$$

маємо

$$\lim_{k\to+\infty}\|x_k(t)-x(t)\|=0 \quad \text{одностайно по} \quad t\in I, \tag{2.37}$$

де x є розв'язком задачі (2.1), (2.2), а x_k - розв'язком задачі

$$\frac{dx}{dt}=P_k(t)x+q_k(t), \tag{2.38_k}$$

$$x(t_{0k})=c_{0k}. \tag{2.39_k}$$

Тому теорему 2.3 можна переформулювати в такий спосіб.

Т е о р е м а 2.3′. Нехай $P\in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q\in C(I;\mathbb{R}^n)$ і $I=[a.b]$. Нехай, крім того, $t_{0k}\in I$, $c_{0k}\in\mathbb{R}^n$, $P_k\in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q_k\in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\dots)$ задовольняють умовам (2.34)-(2.36). Тоді має місце (2.37), де x - розв'язок задачі (2.1), (2.2), а x_k - розв'язок задачі (2.38_k), (2.39_k).

Покажемо, що умова (2.36) у теоремі $2.3'$ є суттєвою.

П р и к л а д 2.1. (див. [Гл. I, § 1.6, стор. 39]) Нехай $n=1$, $I=[0,1]$, $t_{0k}=t_0=0$, $c_{0k}=c_0=0$, $P(t)\equiv q(t)\equiv 0$, $P_k(t)=k\cos k^2t$, $q_k(t)=-k\sin k^2t$. В цьому у разі виконано (перевірити самостійно) всі умови теореми $2.3'$, крім (2.36). У цьому $x(t)=0$ і з формули Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$x_k(t)=-k\exp\left(\frac{\sin k^2t}{k}\right)\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\sin k^2\tau}{k}\right)\sin k^2\tau\,d\tau.$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо, що

$$x_k(t) = \frac{1}{k}\cos k^2 t - \frac{1}{k}\exp\left(\frac{\sin k^2 t}{k}\right) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{\sin k^2 t}{k}\right)\int\limits_0^t \exp\left(-\tfrac{\sin k^2\tau}{k}\right)\,d\tau + \tfrac{1}{2}\exp\left(\tfrac{\sin k^2 t}{k}\right)\int\limits_0^t \exp\left(-\tfrac{\sin k^2\tau}{k}\right)\cos 2k^2\tau\,d\tau$$

Тому замість (2.37) будемо мати

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(t) = x(t) + \frac{t}{2}.$$

З а у в а ж е н н я 2.5. Якщо I *- довільний проміжок у* $\mathbb{R}$ *, то твердження теореми* $2.3'$ *залишається правильним при додатковій умові (2.33). Те, що ці додаткові припущення є суттєвими підтверджується наступними контрприкладами.*

П р и к л а д 2.2. (см. [Гл. I, § 1.6, стор. 40]) Нехай $n = 1$ *,* $I = \mathbb{R}_+$ *,* $t_{0k} = t_0 = 0$ *,* $c_{0k} = c_0 = 0$ *,* $P(t) \equiv 0$ *,* $P_k(t) = \frac{1}{k(1+t)^2}$ *,* $q(t) \equiv q_k(t) \equiv 1$ *. Тоді виконано всі умови теореми* $2.3'$ *, але при цьому не дотримано другої з умов (2.33) (перевірити самостійно). Зрозуміло також, що* $x(t) = t$ *,*

$$x_k(t) = t + \frac{\ln(1+t)}{k} + \exp\left(-\frac{1}{k(1+t)}\right)\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{k(1+\tau)}\right)\frac{\ln(1+\tau)-k}{k^2(1+\tau)^2}\,d\tau.$$

Тому

$$x_k(t_k) - x(t_k) \longrightarrow 1 \quad \textit{при} \quad k \longrightarrow +\infty,$$

де $t_k = \exp(k) - 1$ *. Отже, порушується умова (2.37).*

П р и к л а д 2.3. (см. [Гл. I, § 1.6, стор. 40]) Нехай $n = 1$ *,* $I = \mathbb{R}_+$ *,* $t_{0k} = t_0 = 0$ *,* $c_{0k} = \frac{1}{k}$ *,* $c_0 = 0$ *,* $P(t) \equiv P_k(t) \equiv 1$ *,* $P_k(t) = \frac{1}{k(1+t)^2}$ *,* $q(t) \equiv q_k(t) \equiv 0$ *. Тоді виконано всі умови теореми* $2.3'$ *, але при цьому не дотримано першої з умов (2.33) (Перевірити самостійно). З іншого боку* $x(t) \equiv 0$ *,* $x_k(t) = \frac{1}{k}\exp(t)$ *і, отже, порушено умову (2.37).*

Вправи для самостійної роботи.

1. *Сформулювати означення коректності задачі Коші для лінійного диференціального рівняння* n *- го порядку та довести, що при* $I = [a, b]$ *вона коректна. Навести умови, за яких задача Коші буде коректною і у разі довільного проміжку* I *.*

   Вказівка: врахувати, що задача Коші для лінійного диференціального рівняння n *- го порядку еквівалентна задачі Коші для деякої системи лінійних диференціальних рівнянь.*

2.2.3 Теореми про неперервну залежність розв'язка задачі Коші від параметрів.

Задача Коші (2.1), (2.2) є задачою з параметрами $t_0 \in I$ *і* $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *. Теореми 2.3 та* $2.3'$ *, а також зауваження 2.3 та 2.5 дають при* $\tilde{P}(t) \equiv P(t)$ *і* $\tilde{q}(t) \equiv q(t)$ *умови, за яких розв'язок цій задачі неперервно залежить від цих параметрів, а точніше від початкових даних.*

Розглянемо тепер більш загальну ситуацію залежності задачі Коші від параметрів, а саме задачу Коші виду

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\lambda)x + q(t,\lambda), \tag{2.40}$$

$$x(t_0(\lambda)) = c_0(\lambda), \tag{2.41}$$

де матриця-функція $P : I \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ *і вектор-функція* $q : I \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- неперервні по* t *на проміжку* $I \subset \mathbb{R}$ *при кожном фіксованом* $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ *, тобто*

$$P(\cdot\,,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n}), \qquad q(\cdot\,,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^n), \tag{2.42}$$

а

$$t_0 : \Lambda \longrightarrow I, \qquad c_0 : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.43}$$

деякі функції, що залежать від λ *.*

Тут λ *- параметр, який вибирається з множини* Λ *. У силу теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші задача (2.40), (2.41) при кожному* $\lambda \in \Lambda$ *має один і тільки один розв'язок* $x(t,\ lambda)$ *, визначений на проміжку* I *. Припустимо тепер, що* λ *не фіксовано, а змінюється в* Λ *і* $\lambda_0 \in \Lambda$ *- гранична точка множини* Λ *. Постає питання, за яких умов*

$$\lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda\in\Lambda}} \|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| = 0 \quad \textit{одностайно по} \quad t \in I, \tag{2.44}$$

тобто коли має місце неперервна залежність розв'язку задачі Коші (2.40), (2.41) від параметра λ *?*

Означення 2.2. Нехай I *- проміжок у* $\mathbb{R}$ *,* $h(\cdot\,,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^l)$ *при кожному* $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ *і* $\lambda_0 \in \Lambda$ *- гранична точка множини* Λ *. Говоритимемо, що* h *інтегрально неперервна в точці* λ_0 *, якщо*

$$\lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda\in\Lambda}} \int_\tau^t h(s,\lambda)\,ds = \int_\tau^t h(s,\lambda_0)\,ds \quad \textit{одностайно по} \quad t,\tau \in I. \tag{2.45}$$

З а у в а ж е н н я 2.6. Звернемо увагу на те, що умова інтегральної неперервності не еквівалентна звичайній неперервності.

П р к л а д 2.4. Нехай $I = \mathbb{R}$ *,* $\Lambda = [0,1]$ *,*

$$h(t,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\cos\dfrac{t}{\lambda^2} & \textit{при} \quad \lambda \in]0,1], \\[2ex] \quad 0 & \textit{при} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що в точці $lambda = 0$ *дана функція не є неперервній при кожному* $t \in \mathbb{R}$ *. З іншого боку для будь-яких фіксованих* $t,\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_\tau^t h(s,0)\,ds = \int_\tau^t 0\,ds = 0$$

і при $\lambda \neq 0$

$$\int_\tau^t \frac{1}{\lambda}\cos\frac{s}{\lambda^2}\,ds = \lambda\left[\sin\frac{t}{\lambda^2} - \sin\frac{\tau}{\lambda^2}\right] \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad \lambda \longrightarrow 0 \quad \textit{одностайно по} \quad t,\tau \in \mathbb{R}.$$

Отже, згідно з означенням 2.2, функція h *інтегрально неперервна в точці* $\lambda_0 = 0$ *.*

Т е о р е м а 2.4. Нехай матриця-функція $P : I\times\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ *і вектор-функція* $q : I\times\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *, де* $I = [a,b]$ *- сегмент в* $\mathbb{R}$ *и* $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ *, задовольняють умовам (2.42) та є інтегрально неперервними у точці* $\lambda_0 \in \Lambda$ *, граничною для множини* Λ *, а функції (2.43) неперервні в точці* λ_0 *. Нехай, крім того, виконано умову*

$$\limsup_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda\in\Lambda}} \int_I \|P(t,\lambda)\|\,dt < +\infty. \tag{2.46}$$

Тоді має місце(2.44), де $x(\cdot\,,\lambda)$ *- розв'язок задачі Коші (2.40), (2.41).*

Д о в е д е н н я. Нехай $x(\cdot\,,\lambda_0)$ - розв'язок задачі Коші (2.40), (2.41) при $\lambda = \lambda_0$. Оскільки цей розв'язок належить простору $C(I;\mathbb{R}^n)$ і $I=[a,b]$, то для деяких $M_0 \geq 0$ і $M_1 \geq 0$ виконано нерівності

$$\|x(t,\lambda_0)\| \leq M, \quad \|x'(t,\lambda_0)\| \leq M_1 \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{2.47}$$

Крім того, в силу (2.46) існують $\rho > 0$ і $\delta_0 > 0$ такі, що

$$\int\limits_a^b \|P(t,\lambda)\|\,dt < \rho \quad \text{за будь-якого} \quad \lambda \in \Lambda, \quad \text{що задовольняє нерівності} \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta_0. \tag{2.48}$$

Вибравши тепер довільним чином число varepsilon > 0, підберемо число $\varepsilon_1 > 0$, для якого має місце нерівність

$$\varepsilon_1[2 + M_0 + M_1 + M_1(b-a)]e^{\rho} < \varepsilon. \tag{2.49}$$

Для цього $\varepsilon_1 > 0$ через умови теореми існує $\delta \in]0,\delta_0[$ таке, що для будь-якого $\lambda \in \Lambda$ з умовою $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$

$$|t_0(\lambda) - t_0(\lambda_0)| < \varepsilon_1, \qquad \|c_0(\lambda) - c_0(\lambda_0)\| < \varepsilon_1, \tag{2.50}$$

і

$$\left\|\int\limits_\tau^t [P(s,\lambda) - P(s,\lambda_0)]\,ds\right\| < \varepsilon_1, \quad \left\|\int\limits_\tau^t [q(s,\lambda) - q(s,\lambda_0)]\,ds\right\| < \varepsilon_1 \quad \text{равномерно по} \quad t,\tau \in I. \tag{2.51}$$

Нехай $x(\cdot\,,\lambda)$ - розв'язок задачі Коші (2.40), (2.41) при $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє нерівності $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$. Тоді так само, як за доказом теореми 2.3, для $x(\cdot\,,\lambda)$ і $x(\cdot\,,\lambda_0)$, отримаємо оцінку

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| \leq \|c_0(\lambda) - c_(\lambda_0)\| + \left|\int\limits_{t_0(\lambda_0)}^{t_0(\lambda)} \|x'(\tau,\lambda_0)\|\,d\tau\right| + \left\|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} [q(\tau,\lambda) - q(\tau,\lambda_0)]\,d\tau\right\| +$$

$$+\|x(t,\lambda_0)\| \left\|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} [P(\tau,\lambda) - P(\tau,\lambda_0)]\,d\tau\right\| + \left|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} \|x'(\tau,\lambda_0)\| \left\|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{\tau} [P(s,\lambda) - P(s,\lambda_0)]\,ds\right\| d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} \|P(\tau,\lambda)\|\,\|x(\tau,\lambda) - x(\tau,\lambda_0)\|\,d\tau\right| \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Звідси з урахуванням (2.47), (2.50) та (2.51) випливає, що

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \varepsilon_1 + M_1\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + M_0\varepsilon_1 + M_1(b-a)\varepsilon_1 + \left|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} \|P(\tau,\lambda)\|\,\|x(\tau,\lambda) - x(\tau,\lambda_0)\|\,d\tau\right| \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тоді згідно з лемою Гронуолла-Беллмана матимемо

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| \leq \varepsilon_1[2 + M_0 + M_1 + M_1(b-a)]\exp\left(\left|\int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} \|P(\tau,\lambda)\|\,d\tau\right|\right) \quad \text{при} \quad t \in I$$

і тому в силу (2.48) і (2.49) отримаємо

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \varepsilon_1[2 + M_0 + M_1 + M_1(b-a)]e^{\rho} < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тим самим було показано, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє нерівності $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$, виконано умову

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \varepsilon \quad \textit{відразу для всіх} \quad t \in I.$$

Значить має місце (2.44). ■

З а у в а ж е н н я 2.7. Якщо I - довільний проміжок в $\mathbb{R}$, то твердження теореми 2.4 залишається правильним при наступних додаткових умовах

$$\int\limits_I \|P(t,\lambda_0)\|\, d\tau < +\infty, \qquad \int\limits_I \|q(t,\lambda_0)\|\, d\tau < +\infty, \tag{2.52}$$

З доведеної вище теореми 2.4 безпосередньо випливає

Н а с л і д о к 2.1. Нехай I -сегмент в $\mathbb{R}$, Λ - відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, $P \in C(I \times \Lambda; \mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in C(\Lambda; I)$, $c_0 \in C(\Lambda; \mathbb{R}^n)$ і за будь-якого $\lambda_0 \in \Lambda$ виконано умову (2.46). Тоді розв'язок x задачі Коші (2.40), (2.41) такий, що $x \in C(I \times \Lambda; \mathbb{R}^n)$.

З а у в а ж е н н я 2.7. Умова (2.46) в теоремі 2.4 і наслідку 2.1 є суттєвою.

П р и к л а д 2.5. Нехай система рівнянь при $\lambda \in]0,1]$ має вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{\lambda}\cos\dfrac{t}{\lambda^2}, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{t}{\lambda^2}\; x_1, \end{cases} \qquad \lambda \in]0,1] \tag{2.53}$$

а при $\lambda = 0$ вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = 0. \end{cases} \tag{2.53$_0$}$$

Початковою для цієї системи нехай буде така умова

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0 \quad \textit{при} \quad \lambda \in [0,1]. \tag{2.54}$$

Тут $I = \mathbb{R}$, $\Lambda = [0,1]$,

$$P(t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda}\sin\dfrac{t}{\lambda^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{при} \quad \lambda \in]0,1], \qquad P(t,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$q(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda}\cos\dfrac{t}{\lambda^2} \\[2ex] 0 \end{pmatrix} \quad \textit{при} \quad \lambda \in]0,1], \qquad q(t,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t_0(\lambda) = 0 \quad \textit{и} \quad c_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{при} \quad \lambda \in [0,1].$$

З розглянутого вище контрприкладу 2.4 ясно, що P і q інтегрально неперервні в точці $\lambda_0 = 0$ і виконано умови (2.52). При цьому розв'язки задачі Коші при $\lambda_0 = 0$ є набір функцій

$$x_1(t,0) \equiv 0, \quad x_2(t,0) \equiv 0,$$

а при $\lambda \in]0,1]$ *- набір функцій*

$$x_1(t,\lambda) = \lambda \sin\frac{t}{\lambda^2}, \quad x_2(t,\lambda) = \int\limits_0^t \sin^2\frac{\tau}{\lambda^2}\,d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\sin\frac{2\tau}{\lambda^2}.$$

Отже,

$$x_1(t,\lambda) \longrightarrow 0, \quad x_1(t,\lambda) \longrightarrow \frac{t}{2} \quad \text{при} \quad \lambda \longrightarrow 0,$$

і тому твердження, сформульоване у зауваженні 2.7, не є справедливим. Справа в тому, що тут не виконано умову (2.46). На закінчення наведемо один результат, який вказує на важливість встановленої теореми 2.4.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[P(t)x + q(t)], \tag{2.55}$$

$$x(0) = c_0, \tag{2.56}$$

де $P \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ *,* $q \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$ *,* $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *і* ε *- малий додатній параметр.*

Оскільки тут матриця P *та вектор* q *є змінними, то знайти розв'язок такої задачі, взагалі кажучи, неможливо. Постає питання, чи не можна для неї підібрати близьку, але вже сумісну задачу Коші, розв'язокякої хоча б на деякому скінченому проміжку мало відрізнялося від розв'язку даної задачі? У якості проміжку, що розглядаємо, зручним видається вибрати сегмент* $\left[0,\frac{a}{\varepsilon}\right]$ *, де* a *- деяке додатне число, яке можна робити як завгодно великим за рахунок вибору досить малого* $\varepsilon > 0$ *.*

Якщо для матриці-функції P *та вектор-функції* q *існують границі*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t P(s)\,ds = P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t q(s)\,ds = q_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.57}$$

то систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\,[P_0x + q_0] \tag{2.58}$$

називають усередненою по відношенню до системи (2.55). Вона на відміну від (2.55) є автономною. Більше того, як буде встановлено пізніше така система, будучи лінійною з постійною матрицею P_0 *і постійним вектором* q_0 *ефективно інтегрується.*

Т е о р е м а 2.5. (Лінійний випадок теореми Боголюбова Н.М.) Нехай $P \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{n\times n})$ *,* $q \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$ *,* $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *,* ε *- додатній параметр. Нехай, крім того,* P *є обмеженою на* $\mathbb{R}_+$ *та існують границі (2.57). Тоді для будь-якого* $a > 0$

$$\max\left\{\|x(t,\varepsilon) - x_0(t,\varepsilon)\| \,:\, t \in \left[0,\frac{a}{\varepsilon}\right]\right\} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow +0, \tag{2.59}$$

де x *- розв'язок задачі Коші (2.55), (2.56), а* x_0 *- розв'язок задачі Коші (2.58), (2.56).*

Доведення. В системі (2.55) зробимо заміну незалежної змінної

$$\tau = \varepsilon t. \tag{2.60}$$

Тоді, поклавши

$$x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = y(\tau), \tag{2.61}$$

та враховуючи, що

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dx\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{d\tau} = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=\frac{\tau}{\varepsilon}} \cdot \frac{d\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\tau}{\varepsilon}},$$

отримаємо систему рівнянь

$$\frac{dy}{d\tau} = P\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) y + q\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right). \tag{2.62}$$

При цьому в силу (2.61) та (2.62) початкова умова (2.56) прийме вигляд

$$y(0) = c_0. \tag{2.63}$$

Вибравши довільним чином число $a > 0$, розглянемо систему (2.62) на проміжку $I = [0, a]$. Оскільки

$$\int_0^\tau P\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = \left[\frac{s}{\varepsilon} = u, \quad \frac{ds}{\varepsilon} = du\right] = \varepsilon \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} P(u)\, du$$

і

$$\int_0^\tau q\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = \left[\frac{s}{\varepsilon} = u, \quad \frac{ds}{\varepsilon} = du\right] = \varepsilon \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} q(u)\, du,$$

то в силу (2.57) отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^\tau P\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = \tau \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} P(u)\, du = \tau P_0 = \int_0^\tau P_0\, ds \quad \textit{одностайно по} \quad \tau \in I,$$

і

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^\tau q\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) ds = \tau \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} q(u)\, du = \tau q_0 = \int_0^\tau q_0\, ds \quad \textit{одностайно по} \quad .\tau \in I,$$

Звідси ясно, що якщо доозначити функції $P\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ і $q\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ при $\varepsilon = 0$, поклавши

$$P\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = P_0, \qquad q\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = q_0,$$

вони стануть інтегрально неперервними за параметром ε у точці $\varepsilon = 0$. При цьому система рівнянь (2.62) при $\varepsilon = 0$ матиме вигляд

$$\frac{dy}{d\tau} = P_0 y + q_0, \tag{2.64}$$

а початкова умова (2.63) не зміниться.

Зважаючи на обмеженість матриці P на півосі $\mathbb{R}_+$, крім того, матимемо

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} \int_0^a \left\|P\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right\| ds \le Ma,$$

де M - деяка додатня стала.

Значить, для задачі Коші (2.62), (2.63), де $\varepsilon \ge 0$, виконано при $I = [0, a]$ всі умови теореми 2.4 про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів. Відповідно до цієї теоремі

$$\lim_{\varepsilon\to0} \|y(\tau, \varepsilon) - y_0(\tau)\| = 0 \quad \textit{одностайно по} \quad \tau \in [0, a],$$

де y - розв'язок задачі Коші (2.62), (2.63), а y_0 - розв'язок задачі Коші (2.64), (2.63). Згідно заміни (2.60), (2.61) їм відповідають розв'язки x і x_0 задач Коші (2.55), (2.56) та (2.58), (2.56), які задовольняють умову (2.59). Теорему повністю доведено. ■

Вправи для самостійної роботи.

1. *Сформулювати аналоги теорем 2.4 та 2.5 для лінійного диференціального рівняння n -го порядку.*

   Вказівка: врахувати, що задача Коші для лінійного диференціального рівняння n - го порядку еквівалентна задачі Коші для деякої системи лінійних диференціальних рівнянь.

2.2.4 Теореми про диференційовність за параметрами розв'язку задачі Коші.

Розглянемо задачу Коші (2.40), (2.41) та поставимо для неї більше складне питання, чим вивчене вище. За яких умов її розв'язок $x(\cdot,\lambda) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ буде p - раз диференційовний за параметрами?

Почнемо з випадку, коли $p = 1$.

Т е о р е м а *2.6. Нехай $I = [a, b]$ - сегмент в $\mathbb{R}$, Λ - відкрита множина в $\mathbb{R}^m$,*

$$P(\cdot,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad q(\cdot,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^n) \quad \text{за будь-якого} \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$P(t,\cdot) \in C^1(\Lambda;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad q(t,\cdot) \in C^1(\Lambda;\mathbb{R}^n) \quad \text{при будь-якому} \quad t \in I,$$

$t_0 \in C^1(\Lambda; I)$ і $c_0 \in C^1(\Lambda;\mathbb{R}^n)$. Тоді розв'язок $x(\cdot,\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ задачі Коші (2.40), (2.41) неперервно диференційований по всіх змінним (t,λ) на множині $I \times \Lambda$, причому його частинна похідна $\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial \lambda_i}$, де $i \in \{1,\dots,m\}$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dy}{dt} = P(t,\lambda)y + q_i(t,\lambda), \tag{2.65}$$

$$y(t_0(\lambda)) = c_i(\lambda), \tag{2.66}$$

в якій

$$q_i(t,\lambda) = \frac{\partial P(t,\lambda)}{\partial \lambda_i}\, x(t,\lambda) + \frac{\partial q(t,\lambda)}{\partial \lambda_i}, \qquad c_i(\lambda) = \frac{\partial c_0(\lambda)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial t_0(\lambda)}{\partial \lambda_i}\left[P(t_0(\lambda),\lambda)x(t_0(\lambda),\lambda) + q(t_0(\lambda),\lambda)\right].$$

Доведення. Нехай $x(\cdot,\lambda) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ - розв'язок задачі Коші (2.40), (2.41) при $\lambda \in \Lambda$. В силу означення розв'язку системи (2.40) воно при кожному $\lambda \in \Lambda$ має неперервну похідну t на проміжку I . Покажемо, що він має також і неперервні на множині $I \times \Lambda$ частинні похідні за параметрами. Зафіксуємо довільним чином точку $\lambda_0 \in \Lambda$ і підберемо, враховуючи, що Λ - відкрита множина $\mathbb{R}^m$, число $\rho > 0$ таким, щоб безліч

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda \,:\, \|\lambda - \lambda_0\| \le \rho\}$$

містилося у Λ . Далі, зафіксуємо $i \in \{1,\dots,m\}$ і для будь-якого μ , що задовольняє нерівності $0 < |\mu| \le \rho$, покладемо

$$z(t,\mu) = \frac{x(t,\lambda_0 + \mu e_i) - x(t,\lambda_0)}{\mu}, \tag{2.67}$$

де $e_i \in \mathbb{R}^m$ - одиничний вектор, у якого i - а компонента дорівнює одиниці, а інші – нулю.

Оскільки задача Коші (2.40), (2.41) еквівалентна інтегральному рівнянню Вольтерра

$$x(t,\lambda) = c_0(\lambda) + \int\limits_{t_0(\lambda)}^{t} \left[P(\tau,\lambda)x(\tau,\lambda) + q(\tau,\lambda)\right] d\tau,$$

то матимемо

$$z(t,\mu) = \frac{c_0(\lambda_0 + \mu e_i) - c_0(\lambda_0)}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int\limits_{t_0(\lambda_0+\mu e_i)}^{t_0(\lambda_0)} \left[P(\tau,\lambda_0)\, x(\tau,\lambda_0) + q(\tau,\lambda_0)\right] ds +$$

$$+\int\limits_{t_0(\lambda_0+\mu e_i)}^{t}\left[P(\tau,\lambda_0+\mu e_i)z(\tau,\mu)+\frac{P(\tau,\lambda_0+\mu e_i)-P(\tau,\lambda_0)}{\mu}x(\tau,\lambda_0)+\frac{q(\tau,\lambda_0+\mu e_i)-q(\tau,\lambda_0)}{\mu}\right]d\tau$$

Звідси зрозуміло, що $z(\cdot,\mu)$ *є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{dz}{dt}=\tilde{P}(t,\mu)y+\tilde{q}(t,\mu), \tag{2.68}$$

$$z(\tilde{t}_0(\mu))=\tilde{c}_0(\mu), \tag{2.69}$$

де

$$\tilde{P}(t,\mu)=P(t,\lambda_0+\mu e_i),\quad \tilde{q}(t,\mu)=\frac{P(t,\lambda_0+\mu e_i)-P(t,\lambda_0)}{\mu}x(t,\lambda_0)+\frac{q(t,\lambda_0+\mu e_i)-q(t,\lambda_0)}{\mu},$$

$$\tilde{t}_0(\mu)=t_0(\lambda_0+\mu e_i),\quad \tilde{c}_0(\mu)=\frac{c_0(\lambda_0+\mu e_i)-c_0(\lambda_0)}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int\limits_{t_0(\lambda_0+\mu e_i)}^{t_0(\lambda_0)}[P(\tau,\lambda_0)\,x(\tau,\lambda_0)+q(\tau,\lambda_0]\,ds.$$

Звернемо увагу на те, що тут через теорему про середнє значення

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{t_0(\lambda_0+\mu e_i)}^{t_0(\lambda_0)}[P(\tau,\lambda_0)\,x(\tau,\lambda_0)+q(\tau,\lambda_0]\,ds=-\frac{t_0(\lambda_0+\mu e_i)-t_0(\lambda_0)}{\mu}\left[P(\xi,\lambda_0)x(\xi,\lambda_0)+q(\xi,\lambda_0)\right].$$

де ξ *розташовано між* $t_0(\lambda_0+\mu e_i)$ *і* $t_0(\lambda_0)$.

Задачу (2.68), (2.69) отримано при $\mu\neq 0$. *Довизначимо її при* $\mu=0$ *задачею (2.65), (2.66), де* $\lambda=\lambda_0$, *яка наперед має розв'язок* $y(\cdot,\lambda_0):I\longrightarrow\mathbb{R}^n$.

Тепер, враховуючи умови теореми, зауважуємо, що одностайно $t\in I$ *дотримуються граничні співвідношення*

$$\lim_{\mu\to 0}\tilde{P}(t,\mu)=P(t,\lambda_0),\quad \lim_{\mu\to 0}\tilde{q}(t,\mu)=q_i(t,\lambda_0),\quad \lim_{\mu\to 0}\tilde{t}_0(\mu)=t_0(\lambda_0),\quad \lim_{\mu\to 0}\tilde{c}_0(\mu)=c_i(\lambda_0).$$

Крім того, через обмеженість P *на множині* $I\times\Lambda_0$, *маємо*

$$\limsup_{\substack{\mu\to 0\\ 0<|\mu|\le rho}}\int\limits_I\|\tilde{P}(t,\mu)\|\,dt=\limsup_{\substack{\mu\to 0\\ 0<|\mu|\le rho}}\int\limits_I\|P(t,\lambda_0+\mu e_i)\|\,dt<+\infty.$$

Тому згідно з теоремою 2.4

$$\lim_{\mu\to 0}z(t,\mu)=y(t,\lambda_0)\quad \text{одностайно по}\quad t\in I.$$

Із існування цієї границі та її значення випливає існування частинної похідної $\frac{\partial x(t,\lambda_0)}{\partial\lambda_i}$ *і рівність*

$$\frac{\partial x(t,\lambda_0)}{\partial\lambda_i}=y(t,\lambda_0)\quad \text{при}\quad t\in I.$$

Зважаючи на довільність $\lambda_0\in\Lambda$ *і* $i\in\{1,\dots,m\}$, *встановлено, що на множині* $I\times\Lambda$ *існують частинні похідні* $\frac{\partial x(t,\lambda)}{\partial\lambda_i}$ $(i=1,\dots,m)$, *причому* i *-я (* $i\in\{1,\dots,m\}$ *) є розв'язком задачі Коші (2.65), (2.66). Залишається лише зауважити, що ця частинна похідна в силу теореми 2.4 неперервна за параметрами на множині* Λ *для всіх* $t\in I$. *Отже,* $x\in C^1(I\times\Lambda:\mathbb{R}^n)$.

■

Оскільки кожна частинна похідна $\frac{\partial x(t,\lambda_0)}{\partial \lambda_i}$ $(i \in \{1,\ldots,m\})$ *розв'язку задачі Коші (2.40), (2.41) у свою чергу є розв'язком задачі Коші (2.65), (2.66), то використовуючи метод математичної індукції неважко переконатися, що має місце*

Т е о р е м а 2.7. Нехай $I=[a,b]$ *- сегмент в* $\mathbb{R}$, Λ *- відкрита множина в* $\mathbb{R}^m$,

$$P(\cdot,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad q(\cdot,\lambda) \in C(I;\mathbb{R}^n) \quad \text{при будь-якому} \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$P(t,\cdot) \in C^p(\Lambda;\mathbb{R}^{n\times n}), \quad q(t,\cdot) \in C^p(\Lambda;\mathbb{R}^n) \quad \text{при будь-якому} \quad t \in I,$$

$t_0 \in C^p(\Lambda;I)$ *і* $c_0 \in C^p(\Lambda;\mathbb{R}^n)$, *де* $p \geq 1$. *Тоді розв'язок* $x(\cdot,\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *задачі Коші (2.40), (2.41) такий, що* $x(t,\cdot) \in C^p(\Lambda;\mathbb{R}^n)$ *при будь-якому* $t \in I$.

З а у в а ж е н н я 2.8. У разі проміжку $I \subset \mathbb{R}$, *відмінного від сегмента, твердження наведених вище теорем залишаються чинними, якщо додатково припустити, що матриця-функція* P , *вектор-функція* q *і всі їх похідні за параметрам до* p *-го порядку включно, взяті за нормою, інтегровані по проміжку* I *у невластивому сенсі при кожному* $\lambda \in \Lambda$.

Вправи для самостійної роботи.

1. *Нехай* x *- розв'язок задачі Коші*
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + \dfrac{e^{\lambda t}}{t}, \\ x(1) = 3\lambda. \end{cases}$$
Записати та розв'язати задачу Коші, яка задовольняє $\frac{dx(t,\lambda)}{d\lambda}$. *Знайшовши цей розв'язок, відновити по ньому* $x(t,\lambda)$.

2. *При виконанні умов теореми 2.7 записати задачу Коші, розв'язком якої буде* $\frac{\partial^p x(t,\lambda)}{\partial \lambda_i^p}$, *де* x *- розв'язок задачі Коші (2.40), (2.41).*

3. *Сформулювати аналоги теорем 2.6 та 2.7 для лінійного диференціального рівняння* n *-го порядку.*

   Вказівка: врахувати, що завдання Коші для лінійного диференціального рівняння n *- го порядку еквівалентна задачі Коші для деякої системи лінійних диференціальних рівнянь.*

2.2.5 Задача Коші для комплекснозначних лінійних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь (2.1) у випадку, коли матриця-функція P *і вектор-функція* q *є комплекснозначними, тобто коли* $P \in C(I;\mathbb{C}^{n\times)n})$, $q \in C(I;\mathbb{C}^n)$, *де* I *- як і раніше проміжок* $\mathbb{R}$.

Розв'язком такої системи називається неперервно диференційована вектор-функція $x : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$, *при підстановці якої (2.1) отримуємо тотожність на проміжку* I .

Відповідно задача Коші - це задача знаходження розв'язку, що задовольняє початковій умові (2.2), де $t_0 \in I$ *і* $c_0 \in \mathbb{C}^n$.

Оскільки P *і* q *можна подати в виді* $P = P_1 + i\,P_2$, $q = q_1 + iq_2$, *де* $P_k \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2)$, *то для будь-якого розв'язку* $x = x^1 + i\,x^2$, *де* $x^k \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2)$, *має місце тотожність*

$$\frac{d(x^1(t)+i\,x^2(t))}{dt} \equiv [P_1(t)+i\,P_2(t)][x^1(t)+i\,x^2(t)] + q_1(t) + i\,q_2(t) \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{dx^1(t)}{dt} \equiv P_1(t)x^1(t) - P_2(t)x^2(t) + q_1(t) \quad \text{на проміжку} \quad I$$

і

$$\frac{dx^2(t)}{dt} \equiv P_2(t)x^1(t) + P_1(t)x^2(t) + q_2(t) \quad \textit{на проміжку} \quad I$$

або

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv \tilde{P}(t)y(t) + \tilde{q}(t) \quad \textit{на проміжку} \quad I,$$

де

$$\tilde{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) & -P_2(t) \\ P_2(t) & P_1(t) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, комплекснозначна вектор-функція $x = x^1 + i\,x^2$ *буде розв'язком системи (2.1) тоді і лише тоді, коли дійсна вектор-функція* $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ *буде розв'язком дійсної системи лінійних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dy}{dt} \equiv \tilde{P}(t)y + \tilde{q}(t). \tag{2.70}$$

Якщо в початковій умові (2.2) $c_0 = c_0^1 + ic_0^2$ *, то для системи (2.70) вона буде еквівалентна умові*

$$y(t_0) = \tilde{c}_0, \quad \textit{де} \quad \tilde{c}_0 = \begin{pmatrix} c_0^1 \\ c_0^2 \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

Оскільки задача (2.70), (2.71) має відповідно до теореми 2.1 єдиний розв'язок $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ *, то комплекснозначна задача Коші (2.1), (2.2) також матиме єдиний розв'язок* $x : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *, причому перші* n *компонент вектора* y *будуть являти собою дійсну частину розв'язку* x *, інші* n *- його уявну частину.*

Встановлений факт дозволяє легко сформулювати аналоги всіх доведених у цьому параграфі теорем для випадку комплекснозначної задачі Коші.

2.3 Основні властивості лінійних розв'язків однорідних диференціальних рівнянь

2.3.1 Простір розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{3.1}$$

де $P \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ *,* I *- проміжок в* $\mathbb{R}$ *.*

Лема 3.1 (про безліч усіх розв'язків системи (3.1)) Безліч розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) утворює лінійний простір над полем дійсних чисел.

Доведення. Для встановлення цього твердження достатньо показати, що для будь-яких двох розв'язків $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *і* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *системи диференціальних рівнянь (3.1) і для будь-яких двох дійсних чисел* α *та* β *вектор-функція* $(\alpha x + \beta y) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *також є розв'язком системи (3.1). Справедливість цього факту безпосередньо випливає, з урахуванням означення розв'язку системи (3.1), з наступних тотожностей*

$$\frac{d[\alpha x(t) + \beta y(t)]}{dt} \equiv \alpha\frac{dx(t)}{dt} + \beta\frac{dy(t)}{dt} \equiv \alpha P(t)x(t) + \beta P(t)y(t) \equiv P(t)\alpha x(t) + P(t)\beta y(t) \equiv P(t)[\alpha x(t) + \beta y(t)],$$

які мають місце на проміжку I *.* ■

Очевидно, що нулем лінійного простору розв'язків системи диференціальних рівнянь (3.1) є вектор-функція $x(t) \equiv 0$ *на* I *, яку називають тривіальним розв'язком системи (3.1).В силу встановленої для системи лінійних диференціальних рівнянь теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші початковій умові*

$$x(t_0) = 0, \tag{3.2}$$

де $t_0 \in I$ *, і* $0 \in \mathbb{R}^n$ *, задовольняє лише тривіальний розв'язок системи (3.1).*

О з н а ч е н н я 3.1. Вектор-функції

$$x_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.3}$$

називаються лінійно незалежними на проміжку I *, якщо для їхньої лінійної комбінації з дійсними коефіцієнтами істина наступна імплікація:*

$$(\, c_1 x_1(t) + \cdots + c_m x_m(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I\,) \Longleftrightarrow (\, c_1 = \cdots = c_m = 0\,).$$

Інакше, тобто коли існують $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *, не всі рівні нулю, для яких*

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_m x_m(t) \equiv 0 \quad \text{на} \quad I,$$

вектор-функції (3.3) називаються лінійно залежними на проміжку I *.*

Неважко зрозуміти, що якщо вектор-функції (3.3) у фіксованій точці $t_0 \in I$ *є лінійно незалежними, то вони будуть лінійно незалежними і на всьому проміжку* I *. Чи справедливо обернене твердження?*

П р и к л а д 3.1. Розглянемо при $m \geq 2$ *набір вектор-функцій*

$$x_k(t) = \begin{pmatrix} t^{k-1} \\ \vdots \\ t^{k+n-2} \end{pmatrix} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

визначених на $\mathbb{R}$ *. Записавши їх лінійну комбінацію з дійсними коефіцієнтами, зауважимо, що її подано у вигляді*

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_m x_m(t) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1} \\ t(c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1}) \\ \vdots \\ t^{n-1}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1}) \end{pmatrix}.$$

Звідси зрозуміло, що ця лінійна комбінація буде тотожньою нуль-вектор на проміжку $I \subset \mathbb{R}$ *, тоді і тільки тоді коли*

$$c_1 + c_2 t + \cdots + c_m t^{m-1} \equiv 0 \quad \text{на} \quad I.$$

А оскільки многочлен на будь-якому проміжку I *, що не зводиться до точці, може бути тотожно рівним нулю лише у випадку, коли всі його коефіцієнти дорівнюють нулю, то на кожному такому проміжку вектор-функції, що розглядаються, є лінійно незалежними.*

З іншого боку, якщо ми зафіксуємо довільним чином точку $t_0 \in \mathbb{R}$ *і виберемо довільним чином сталі* $c_2, \ldots, c_m$ *так, щоб хоча б одна з них була відмінна від нуля, то завжди знайдеться число* c_1 *при якому матиме місце рівність*

$$c_1 + c_2 t_0 + \cdots + c_m t_0^{m-1} = 0.$$

Тому в точці $t_0 \in \mathbb{R}$ *дані векторні функції будуть лінійно залежними.*

Таким чином, показано, що дані у прикладі вектор-функції є лінійно незалежними на будь-якому, що не зводиться до точки, проміжку $I \subset \mathbb{R}$ *, але будуть при цьому лінійно залежними у будь-якій фіксованій точці* $t_0 \in \mathbb{R}$ *.*

Виявляється, що зовсім інакша справа, якщо ми розглянемо набір лінійно незалежних на проміжку I *розвя'зків системи диференціальних рівнянь (3.1).*

Лема 3.2 (про звуження лнз розв'язків системи (3.1) у точку). Якщо векторні функції (3.3), де $m \geq 2$ *, є лінійно незалежними на проміжку* I *розв'язками системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), то вони будуть лінійно незалежними та в будь-якій точці* $t_0 \in I$ *.*

Д о в е д е н н я. Припустимо супротивне, тобто що векторні функції (3.3) є лінійно незалежними на проміжку I *розв'язками системи диференціальних рівнянь (3.1) та існує точка* $t_0 \in I$ *, у якій ці розв'язки лінійно залежні. Тоді знайдуться сталі* $c_i^0 \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ *, не всі рівні нулю, такі, що має місце рівність*

$$c_1^0 x_1(t_0) + \cdots + c_m^0 x_m(t_0) = 0. \tag{3.4}$$

Далі розглянемо на проміжку I *вектор-функцію*

$$x(t) = c_1^0 x_1(t) + \cdots + c_m^0 x_m(t).$$

У силу леми 3.1 ця вектор-функція є розв'язком системи диференціальних рівнянь (3.1), причому згідно з (3.4) воно задовольняє умову (3.2). Але цій умові, як було зазначено раніше, може задовольняти лише тривиальний розв'язок системи (3.1). Тому $x(t) \equiv 0$ *на проміжку* I *, тобто*

$$c_1^0 x_1(t) + \cdots + c_m^0 x_m(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Оскільки тут не всі сталі c_i^0 $(i = 1, \dots, m)$ *рівні нулю, то розв'язки (3.3) системи диференціальних рівнянь (3.1) є лінійно залежними* I *. Отримано протиріччя, з якого випливає справедливість твердження леми.* ■

О з н а ч е н н я 3.2. Будь-які n *- лінійно незалежних розв'язки системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) називають фундаментальною системою рішень (ФСР) системи (3.1).*

О з н а ч е н н я 3.3. Визначником Вронського або вронскіаном n *вектор-функцій*

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (k = 1, \dots, n) \tag{3.5}$$

називається визначник

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

стовпцями якого є дані вектор-функції.

Л е м а 3.3 (критерій фундаментальності системи з n *розв'язків). Для того, щоб* n *розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) були її фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб Вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля всюди на проміжку* I *. Більше того, якщо він відмінний від нуля хоча б в одній точці з проміжку* I *, то він буде відмінним від нуля і на всьому проміжку* I *.*

Д о в е д е н н я. Необхідність. Нехай n *вектор-функцій (3.5) утворюють фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) та* t_0 *- довільна точка із проміжку* I *. Тоді згідно з лемою 3.2 вектор* $x_k(t_0)$ $(k = 1, \dots, n)$ *є лінійно незалежними. Тому згідно відповідній теоремі з алгебри визначник* I *.*

$$W(x_1, \dots, x_n)(t_0) = \begin{vmatrix} x_{11}(t_0) & \dots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \dots & x_{nn}(t_0) \end{vmatrix},$$

стовпцями якого є ці вектори, буде відмінним від нуля. Звідси, зважаючи на довільність $t_0 \in I$ *, випливає, що визначник Вронського даних* n *розв'язків відмінний від нуля всюди на проміжку* I *.*

Достатність. Нехай векторні функції (3.5) є розв'язками системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) і існує $t_0 \in I$ *таке, що* $W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0$ *. Тоді стовпці цього визначника, тобто вектори* $x_k(t_0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *є лінійно незалежними. Звідси випливає, що векторні функції (3.5) лінійно незалежні на проміжку* I *і тому утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (3.1). Крім того, в силу вже встановленої необхідності визначник Вронського розв'язків буде відмінним від нуля усюди на проміжку* I *.* ■

Л е м а 3.4 (про існування ФСР). Для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь існує фундаментальна система розв'язків.

Д о в е д е н н я. Поставимо для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) n задач Коші зі наступними початковими умовами

$$x(t_0) = e_k \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.6_k}$$

де t_0 *будь-яка точка з проміжку* I *і* e_k *- одиничний вектор простору* $\mathbb{R}^n$ *,* k *-я координата якого дорівнює одиниці, інші - нулю.*

В силу теореми 2.1 (існування та единості розв'язку задачі Коші) кожна із задач (3.1), (3.6_k) $(k \in \{1, \ldots, n\})$ *має единий розв'язок* $x_k^0 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *. Для вронскіана цих* n *розв'язків у точці* t_0 *згідно* (3.6_k) *маємо*

$$W(x_1^0, \ldots, x_n^0)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому з леми 3.3 розв'язки x_k^0 $(k = 1, \ldots, n)$ *системи (3.1) утворюють фундаментальну систему розв'язків.* ■

Т е о р е м а 3.1 (Про простір розв'язків системи (3.1)). Безліч всіх розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) утворює n *- мірне лінійний простір над полем дійсних чисел, базисом якого є будь-яка фундаментальна система розв'язків.*

Д ов е д е н н я. В силу леми 3.1 безліч усіх розв'язків системи (3.1) являє собою лінійний простір над полем дійсних чисел. Нехай $x_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(k = 1,\ ldots, n)$ *- фундаментальна система розв'язків системи (3.1). Її існування випливає із леми 3.4. Для доказу твердження теореми залишається лише встановити, що будь-який розв'язок* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *системи (3.1) представим у вигляді лінійної комбінації розв'язків* x_k $(k = 1, \ldots, n)$ *с дійсними коефіцієнтами. Вибравши довільним чином точку* $t_0 \in I$ *, розглянемо систему векторів* $x(t_0), x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ *. Ці вектори з* $\mathbb{R}^n$ *є лінійно залежними, оскільки* $\mathbb{R}^n$ *число лінійно незалежних векторів не перевищує* n *. Звідси, зважаючи на лему 3.2, випливає лінійна залежність на проміжку* I *вектор-функцій* $x, x_1, \ldots, x_n$ *. Тому існують постійні* α_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *, не всі рівні нулю, такі, що*

$$\alpha_0 x(t) + \alpha_1 x_1(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I. \tag{3.7}$$

Покажемо, що тут $\alpha_0 \neq 0$ *. Справді, якби це було не так, то на* I *дотримувалася б тотожность*

$$\alpha_1 x_1(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) \equiv 0,$$

де не всі α_k $(k = 1, \ldots, n)$ *рівні нулю, що суперечить лінійній незалежності рішень, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.*

Оскільки $\alpha_0 \neq 0$ *, то з (3.7) отримаємо*

$$x(t) \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} x_1(t) - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} x_n(t) \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Значить, розв'язок x є представимий у вигляді лінійної комбінації с дійсними коефіцієнтами розв'язків x_k $(k = 1, \ldots, n)$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (3.1). ■

З а у в а ж е н н я 3.1. З теореми 3.1 ясно, що якщо $x_1, \ldots, x_n$ - фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), то безліч її розв'язків міститься у формулі

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t),$$

де $c_1, \ldots, c_n$ - довільні дійсні сталі. У у зв'язку з цим цю формулу називають загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь (3.1).

П р к л а д 3.1. Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Px, \quad \textit{где} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

яка в координатній формі має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тут $n = 2$. Неважко перевірити, що вектор-функції

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

є розв'язком цієї системи.

Оскільки вронскіан цих розв'язків

$$W(x^1, x^2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то вони відповідно до леми 3.3 утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому згідно з теоремою 3.1 безліч усіх розв'язків даної системи міститься у формулі

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

де c_1, c_2 - довільні дійсні сталі, яка в координатної формі набуває вигляду

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

З а у в а ж е н н я 3.2. У разі комплекснозначної системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) множина всіх розв'язків утворює n - мірний лінійний простір над полем комплексних чисел, базисом якого є будь-яка фундаментальна система розв'язків. При цьому залишаються справедливими леми 3.2-3.4, а також лема 3.1 с заміною в ній виразу "над полем дійсних чисел"виразом "над полем комплексних чисел".

Для дійсних систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь часто вдається отримати не дійсний, а комплексний базис. Він дозволяє, враховуючи, що дійсна система є окремим випадком комплексної, описати безліч всіх комплексних розв'язків даної системи, що містить у собі безліч його дійсних розв'язків. Запитується чи можна по комплексному базису отримати дійсний базис?
П р к л а д 3.2. Неважко перевірити, що розглянута вище система (3.8) має комплексний розв'язок

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\,t}.$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{a+i\,b} = e^a(\cos b + i\,\sin b)$, *виділимо дійсну та уявну частини цього розв'язка:*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i\,\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що дійсна та уявна частини комплексного розв'язку є речові розв'язки системи (3.8), які утворюють речову фундаментальну систему розв'язків. Зазначений висновок підтверджують такі загальні твердження.

Л е м а 3.5 *(Про одійснення комплексного розв'язку). Якщо вектор-функція* $x = x_1 + i\,x_2$, *де* $x_k \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ $(k = 1,2)$, *є розв'язком системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), то дійсна частина цього розв'язку* $x_1 = \operatorname{Re} x$ *та його уявна частина* $x_2 = \operatorname{Im} x$ *також є розв'язком цієї системи.*

Д о в е д е н н я. *Оскільки вектор-функція* $x = x_1 + i\,x_2$ *є розв'яком системи (3.1), то має місце тотожність*

$$\frac{d\,[x_1(t) + i\,x_2(t)]}{dt} \equiv P(t)[x_1(t) + i\,x_2(t)] \quad \text{на проміжку} \quad I,$$

або

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + i\,\frac{dx_2(t)}{dt} \equiv P(t)x_1(t) + i\,P(t)x_2(t) \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Звідси, враховуючи, що P *- дійсна матриця-функція, маємо*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \equiv P(t)x_1(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} \equiv P(t)x_2(t) \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

І це означає, що x_1 *і* x_2 *є розв'язками системи (3.1).* ■

Л е м а 3.6 *(Про комплексно спряжені розв'язки). Якщо вектор-функція* $x = x_1 + i\,x_2$, *де* $x_k \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ $(k = 1,2)$, *є розв'язком системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), то вектор-функція* $\bar{x} = x_1 - i\,x_2$ *також є розв'язком цієї системи.*

Д о в е д е н н я. *провести самостійно.* ■

Л е м а 3.7 *(Про одійснення комплексного базису). (Якщо система лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) має фундаментальну систему розв'язків виду*

$$\xi_1 = x_1 + i\,x_2,\ \xi_2 = x_1 - i\,x_2,\ \ldots,\ \xi_{2m-1} = x_{2m-1} + i\,x_{2m},\ \xi_{2m} = x_{2m-1} - i\,x_{2m},\ x_{2m+1}, \ldots, x_n,$$

де $x_k \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ $(k = 1,\ldots,n)$, *то вектор-функції* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *утворюють дійсну фундаментальну систему розв'язків системи (3.1).*

Д о в е д е н н я. *В силу леми 3.5 вектор-функції* $x_k \in C(I;\mathbb{R}^n)$ $(k = 1,\ldots,n)$ *є розв'язками системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) Покажемо, що вони утворюють фундаментальну систему розв'язків. Допустимо супротивне. Тоді існують дійсні числа* c_k $(k = 1,\ldots,n)$, *одночасно не рівні нулю, такі, що*

$$c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Цю тотожність можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{2}c_1[\xi_1(t) + \xi_2(t)] + \frac{1}{2i}c_2[\xi_1(t) - \xi_2(t)] + \cdots + \frac{1}{2}c_{2m-1}[\xi_{2m-1}(t) + \bar{\xi}_{2m}(t)] + \frac{1}{2i}c_{2m}[\xi_{2m-1}(t) - \bar{\xi}_{2m}(t)] +$$

$$+ c_{2m+1}x_{2m+1}(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I,$$

або

$$\frac{1}{2}(c_1 - i\,c_2)\xi_1(t) + \frac{1}{2}(c_1 + i\,c_2)\xi_2(t) + \cdots + \frac{1}{2}(c_{2m-1} - i\,c_{2m})\xi_{2m-1} + \frac{1}{2}(c_{2m-1} + i\,c_{2m})\xi_{2m} +$$

$$+ c_{2m+1}x_{2m+1} + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Оскільки $\xi_1, \ldots, \xi_{2m}, x_{2m+1}, \ldots, x_n$ *лінійно незалежні на* I *, це можливо лише у разі, коли*

$$c_1 + i\,c_2 = c_1 - i\,c_2 = \cdots = c_{2m-1} + i\,c_{2m} = c_{2m-1} - i\,c_{2m} = c_{2m+1} = \cdots = c_n = 0.$$

Звідси випливає, що c_k $(k = 1, \ldots, n)$ *рівні нулю. Тим самим, отримано протиріччя. Значить, вектор-функції* $x_1, \ldots, x_n$ *лінійно незалежні на проміжку* I *.* ■

2.3.2 Матриці розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь та їх основні властивості.

О з н а ч е н н я *3.4. Матриця розмірності* $n \times m$ *, стовпцями якої є* m *розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), називається матрицею розв'язків системи (3.1).*

Якщо

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (k = 1, \ldots, m) -$$

розв'язків системи диференціальних рівнянь (3.1), то матриця цих розв'язків має вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{m1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{mn}(t) \end{pmatrix}.$$

Під похідною від матриці-функції X *ми розуміємо матрицю, елементами якої є похідні елементів матриці* X *. Тому враховуючи, що стовпцями* X *є розв'язки системи (3.1), матимемо наступні тотожності на проміжку* I

$$\frac{dX(t)}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{dx_{11}(t)}{dt} & \ldots & \frac{dx_{m1}(t)}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{1n}(t)}{dt} & \ldots & \frac{dx_{mn}(t)}{dt} \end{pmatrix} \equiv \left(\frac{dx_1(t)}{dt} \ldots \frac{dx_m(t)}{dt} \right) \equiv (P(t)x_1(t) \ldots P(t)x_m(t)) \equiv P(t)X(t).$$

Отже, кожна матриця розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) є розв'язками матричного диференціального рівняння

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X. \tag{3.9}$$

З наведених вище тотожностей ясно, що правильним є і протилежне твердження: кожний розв'язок $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ *матричного рівняння (3.9) представляє собою матрицю розв'язків системи (3.1).*

Далі зауважимо, що якщо для матричного рівняння (2.9) поставити матричну початкову умову

$$X(t_0) = C_0, \tag{3.10}$$

де $t_0 \in I$ *и* $C_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *, то в силу теореми існування та единості розв'язку задачі Коші для векторної системи лінійних диференціальних рівнянь Коші (3.9), (3.10) матиме один і лише один матричний розв'язок* $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ *, причому стовпцями цього розв'язку будуть* m *розв'язками системи (3.1), які задовольняють початковим умовам*

$$x(t_0) = c_{0k} \quad (k = 1, \ldots, m),$$

де $c_{0k} \in \mathbb{R}^n$ $(k = 1, \ldots, m)$ *- стовпці матриці* C_0 *.*

Для добуткубудь-яких матриць-функцій $A \in C(I; \mathbb{R}^{n \times m})$ *і* $B \in C(I; \mathbb{R}^{m \times k})$ *має місце тотожність*

$$(A(t)B(t))' \equiv A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \quad \text{на проміжку} \quad I.$$

Використовуючи його встановимо ще одну важливу властивість матриці рішень системи (3.1).

Л е м а 3.8. Якщо $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ *- матриця розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* (3.1) *та* $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ *- стала матриця, то матриця* XC *розмірності* $n \times k$ *також буде матрицею розв'язків цієї системи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оскільки матриця X *задовольняє матричне рівняння (3.9), то для матриці* XC *будемо мати*

$$\frac{d}{dt}[\,X(t)\,C\,] \equiv \frac{dX(t)}{dt}\,C \equiv P(t)X(t)C \equiv P(t)[\,X(t)\,C\,] \quad \text{на промежутке} \quad I.$$

Отже, матриця XC *також є розв'язком матричного рівняння (3.9) і тому буде матрицею розв'язків системи (3.9).* ■

Л е м а 3.9 (Формула Ліувіля-Остроградського). Якщо матриця розв'язків X *системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* (3.1) *має розмірність* $n \times n$, *то для будь-якого* $t_0 \in I$

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} P(\tau)\, d\tau\right) \quad \text{при} \quad t \in I, \tag{3.11}$$

де $\operatorname{Sp} P(t)$ *- слід матриці* P *, який дорівнює сумі її діагональних елементів.*

Д о в е д е н н я. Оскільки стовпцями матриці X *є* n *розв'язків системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), то визначник матриці* X *збігається з вронскіаном цих розв'язків. В силу леми 3.3 цей вронскіан або відрізняється від нуля у всіх точках проміжку* I *, або тотожно дорівнює нулю на проміжку* I *. У другому випадку очевидно, що дотримується формула (3.11). Тому обмежимося розглядом лише випадку, коли* $\det X(t) \neq 0$ *при всіх* $t \in I$ *. Зафіксуємо довільним чином точку* $t \in I$ *і надамо їй мале приріст* Δt *, при якому* $t + \Delta t \in I$ *. Оскільки* X *- матриця розв'язків системи (3.1), то через її диференційність у точці* t *матимемо*

$$X(t+\Delta t) = X(t) + X'(t)\Delta t + Q(t,\Delta t)\Delta t,$$

де матриця Q *задовольняє умову*

$$\lim_{\Delta t \to 0} Q(t,\Delta t) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Враховуючи, що матриця X *є розв'язком матричного диференціального рівняння (3.9), перепишемо дану матричну рівність у вигляді*

$$X(t+\Delta t) = X(t) + P(t)X(t)\Delta t + Q(t,\Delta t)\Delta t,$$

або

$$X(t+\Delta t) = [E + P(t)\Delta t + R(t,\Delta t)\Delta t]\, X(t),$$

де $R(t,\Delta t) = Q(t,\Delta t)X^{-1}(t)$ *і в силу зазначеної вище умови на матрицю* Q *задовольняє властивість*

$$\lim_{\Delta t \to 0} R(t,\Delta t) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Звідси, поклавши

$$W(t) = \det X(t), \tag{3.12}$$

отримаємо

$$W(t+\Delta t) = W(t) \det\left[E + P(t)\Delta t + R(t,\Delta t)\Delta t\right]. \tag{3.13}$$

Тут $\det\left[E + P(t)\Delta t + R(t,\Delta t)\Delta t\right]$ *згідно з означенням визначника є сумою всіляких добутків (з відповідними знаками)* n *елементів визначника, взятих по одному з кожного рядка та кожного* *стовпця. Одним з таких доданків буде добуток елементів головної діагоналі визначника, яке після очевидних обчислень може бути записане у вигляді* $1+\mathrm{Sp}\,P(t)\,\Delta t+r_1(t,\Delta t)\Delta t$ *, где* $r_1(t,\Delta t) \longrightarrow 0$ *при* $\Delta t \longrightarrow 0$ *. Кожен з інших доданків, що входять до визначника, містить у своєму добутку принаймні два елементи визначника, які не стоять на головній діагоналі, і тому буде виразом виду* $r_k(t,\Delta t)\Delta t$ $(k \in \{2,\dots,n!\}$ *, где* $r_k(t,\Delta t) \longrightarrow 0$ *при* $\Delta t \longrightarrow 0$ *. Тому,*

$$\det\left[E + P(t)\Delta t + R(t,\Delta t)\Delta t\right] = 1 + \Delta t\,\mathrm{Sp}\,P(t) + \Delta t\sum_{k=1}^{n!} r_k(t,\Delta t).$$

Підставляючи це значення (3.13) будемо мати

$$W(t+\Delta t) = \left[1 + \Delta t\,\mathrm{Sp}\,P(t) + \Delta t\sum_{k=1}^{n!} r_k(t,\Delta t)\right] W(t),$$

звідки випливає, що

$$\frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \left[\mathrm{Sp}\,P(t) + \sum_{k=1}^{n!} r_k(t,\Delta t)\right] W(t).$$

Переходячи тут до границі при $\Delta t \longrightarrow 0$ *и враховуючи що всі* $r_k(t,\Delta t) \longrightarrow 0$ *при* $\Delta t \longrightarrow 0$ *, отримаємо*

$$W'(t) = [\,\mathrm{Sp}\,P(t)]\,W(t).$$

Через довільність вибору $t \in I$ *ця рівність має місце на всьому проміжку* I *. Оскільки вона на цьому проміжку є лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку, то згідно з формулою Коші для будь-якого* $t_0 \in I$

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\,P(\tau)\,d\tau\right) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Звідси з урахуванням заміни (3.12) отримуємо формулу Ліувілля-Остроградського (3.11). ■

З а у в а ж е н н я 3.3. Формула Ліувіля-Остроградського важлива тим, що завжди може бути обчислений у будь-якій точці $t \in I$ *визначник невідомої матриці, яка є розв'язком матричної задачі Коші (3.9), (3.10), де* C_0 *-квадратна* $n \times n$ *- матриця.*

О з н а ч е н н я 3.5. Матриця $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ *, стовпцями якої є* n *лінійно незалежних розв'язків (ФСР) системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), називається фундаментальною матрицею системи (3.1).*

Л е м а 3.10 (про фудаментальні матриці системи (3.1)).

1) *. Матриця* $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ *розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь* (3.1) *є фундаментальною матрицею цієї системи тоді і тільки тоді, коли* $\det X(t) \neq 0$ *при всіх* $t \in I$ *.*

2) *. Фундаментальна матриця диференціальної системи* (3.1) *є розв'язком матричного диференціального рівняння* (3.9) *.*

3) *. Якщо матриця* $X \in C^1(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *невироджена на проміжку* I *, то існує єдина система лінійних однорідних диференціальних рівнянь, для якої матриця* X *буде фундаментальною, тобто фундаментальна матриця системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь однозначно визначає цю систему.*

4) *. Якщо* X *-фундаментальна матриця системи* (3.1) *, то множина всіх розв'язків цієї системи міститься у формулі*

$$x(t) = X(t)c, \quad \text{де} \quad c - \text{довільний вектор простору} \quad \mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

5) . *Якщо* X *-фундаментальна матриця системи* (3.1) , *то множина всіх фундаментальних матриць цієї системи міститься у формулі* $\Phi(t) = X(t)C$, *де* C *- довільна невироджена* $n \times n$ *- матриця.*

Д о в е д е н н я. 1).Справедливість першого твердження випливає із леми 3.3, якщо врахувати, що в даному випадку визначник матриці X *збігається з вронскіаном розв'язків, які є стовпцями матриці* X .

2). Друге твердження випливає з того, що будь-яка матриця розв'язків системи (3.1) є розв'язком матричного рівняння (3.9).

3). Нехай матриця $X \in C^1(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *, невироджена на проміжку* I *та є фундаментальною матрицею деякої системи диференціальних рівнянь виду (3.1). Тоді згідно 2) має місце тотожність*

$$\frac{dX(t)}{dt} \equiv P(t)X(t) \quad \textit{на проміжку} \quad I. \tag{3.15}$$

Множуючи цю тотожність праворуч на матрицю $X^{-1}(t)$ *, отримаємо*

$$P(t) \equiv \frac{dX(t)}{dt}\, X^{-1}(t) \quad \textit{на проміжку} \quad I,$$

тобто матриця $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *і однозначно визначається матрицею* X *. З іншого боку, якщо матриця* P *визначається з цієї тотожності, то має місце (3.15), звідки випливає, з урахуванням невиродженості матриці* X *, що* X *- фундаментальна матриця системи (3.1).*

4). Нехай X *- фундаментальна матриця системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) та її стовпцями є вектор-функції (3.5). В силу означення фундаментальної матриці ці вектор-функції утворюють фундаментальну систему розв'язків. диференційної системи (3.1). Тоді, як було встановлено раніше, множина всіх розв'язків системи (3.1) міститься у формулі* $x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ *, де* c_k $(k = 1, \ldots, n)$ *- довільні дійсні сталі. Звідси з урахуванням рівностей*

$$c_1x_1(t)+\cdots+c_nx_n(t) = c_1\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x_{11}(t) + \cdots + c_nx_{n1}(t) \\ \vdots \\ c_1x_{1n}(t) + \cdots + c_nx_{nn}(t) \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

випливає справедливість четвертого твердження леми.

5). Нехай X *- фундаментальна матриця системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1). Оскільки для будь-якої сталої невиродженої матриці* C *розмірності* $n \times n$ *матриця* $X(t)C$ *є матрицею розв'язків диференціальної системи (3.1) і* $\det[X(t)C] = \det X(t) \det C \neq 0$ *при всіх* $t \in I$ *, то згідно 1)* $X(t)C$ *- фундаментальна матриця диференціальної системи (3.1). Залишається лише показати, що будь-яка фундаментальна матриця* Φ *системи (3.1) може бути подана у виді* $\Phi(t) = X(t)C$ *, де* C *- деяка невироджена стала* $n \times n$ *- матриця. Покладемо* $X^{-1}(t)\Phi(t) = Y(t)$ *при* $t \in I$ *. Тоді* $Y \in C^1(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *, є невиродженою і* $\Phi(t) = X(t)Y(t)$ *при всіх* $t \in I$ *. В силу властивості 2)*

$$\Phi'(t) = P(t)\Phi(t), \quad X'(t) = P(t)X(t) \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

Підставляючи в перше з цих матричних співвідношень значення $\Phi(t) = X(t)Y(t)$ *і враховуючи друге, отримаємо*

$$X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t) = P(t)[X(t)Y(t)] \quad \textit{при} \quad t \in I,$$

або

$$P(t)X(t)Y(t) + X(t)Y'(t) = P(t)X(t)Y(t) \quad \textit{при} \quad t \in I.$$

Звідси маємо

$$X(t)Y'(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t \in I,$$

або

$$Y'(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t \in I,$$

що можливо лише у разі, коли $Y(t) = C$ *при* $t \in I$, *де* C - *стала* $n \times n$ - *матриця. Ця матриця невироджена, оскільки такою є матриця* Y . *Отже,* $Phi(t) = X(t)C$, *де* C - *стала невироджена матриця розмірності* $n \times n$. ■

Поставимо тепер для диференціальної системи (3.1) задачу Коші про знаходження розв'язку, що задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = c_0, \tag{3.16}$$

де $t_0 \in I$ *і* $c_0 \in \mathbb{R}^n$. *Якщо* X - *фундаментальна матриця диференціальної системи (3.1), цей розв'язок згідно з четвертим твердженням леми 3.10 міститься у формулі (3.14). Для нього через (3.16) маємо* $c_0 = X(t_0)c$. *Звідси з урахуванням першого затвердження леми 3.10 знаходимо* $c = X^{-1}(t_0)c_0$. *Вносячи це значення* c *в (3.14) отримаємо для розв'язку задачі Коші (3.1), (3.16) наступне зображення*

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)c_0. \tag{3.17}$$

Звернем увагу на те, що у цій формулі матриця $X(t)X^{-1}(t_0)$ *має наступні дві властивості. По перше, вона, як добуток фундаменальної матриці* X *на невироджену сталу матрицю* $X^{-1}(t_0)$, *є відповідно твердження 5) леми 3.10 фундаментальною матрицею системи (3.1). По-друге, при* $t = t_0$ *вона є одиничною матрицею розмірності* $n \times n$.

О з н а ч е н н я 3.6. Матрична функція $C : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ *називається матрицею Коші системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), якщо для кожного фіксованого* $\tau \in I$ *дотримуються такі дві умови: 1)* $C(\cdot, \tau) : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ *є фундаментальною матрицею диференціальної системи (3.1);*
2) $C(\tau, \tau) = E$, *де* E - *одинична* $n \times n$ - *матриця.*

Л е м а 3.11 (про матрицю Коші). Для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) існує одна і лише одна матриця Коші.

Д о в е д е н н я. Якщо X - *фундаментальна матриця диференціальної системи (3.1), то матриця* $C(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$, *очевидно, є її матрицею Коші. Отже, залишається лише встановити єдиність такої матриці. Справді, якщо* C - *матриця Коші диференціальної системи (3.1),то при будь-якому фіксованому* $\tau \in I$ *кожен її* k - *й стовпець (* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *) в силу першої умови означення 3.6 представляє собою розв'язок диференціальної системи (3.1), яке згідно з другою умовою цього означення задовольняє початковій умові* $x(\tau) = e_k$, *де* e_k - *одиничний вектор,* k *-я компонента якого дорівнює одиниці, інші - нулю. Оскільки такий розв'язок з теореми 2.1 єдиний, то стовпці матриці* C *визначаються однозначно.* ■

З а у в а ж е н н я 3.4. Звернемо увагу на те, що доведення цієї леми вказує на два способи побудови матриці Коші диференціальної системи (3.1).

П р и к л а д 3.3. Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Як було встановлено раніше, вона має фундаментальну систему розв'язків

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} -$$

є фундаментальною матрицею диференціальної системи (3.18). Оберненою для неї буде матриця

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тому матриця Коші диференціальної системи (3.18) матиме вигляд

$$C(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}$$

Інший спосіб побудови матриці Коші заснований на побудові двох розв'язків системи (3.18), які задовольняють початковим умовам

$$\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Оскільки загальний розв'язок диференціальної системи (3.18) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

де c_1, c_2 *- довільні дійсні сталі, то шукані розв'язки містяться в цій формулі при деяких значеннях* c_1 *та* c_2 *. Для знаходження використовуємо початкові умови. При цьому матимемо*

$$\begin{cases} 1 = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau \\ 0 = -c_1 \sin\tau + c_2 \cos\tau \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau \\ 1 = -c_1 \sin\tau + c_2 \cos\tau \end{cases}$$

Звідси, відповідно, знаходимо

$$c_1 = \cos\tau, \quad c_2 = \sin\tau \quad \text{и} \quad c_1 = -\sin\tau, \quad c_2 = \cos\tau.$$

Підставляючи ці значення c_1, c_2 *у формулу для загального розв'язку, отримаємо такі два розв'язки, що задовольняють початковим умовам (3.19)*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \cos\tau \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \sin\tau \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) \end{pmatrix}$$

і

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\sin\tau \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \cos\tau \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Ці розв'язки є відповідно першим та другим стовпцями матриці Коші диференціальної системи (3.18).

З леми 3.11 з урахуванням встановленої вище формули (3.17) для розв'язку задачі Коші (3.1), (3.16) очевидно випливає наступне твердження.

Л е м а 3.12 (формула Коші для диференціальної системи (3.1)). Для будь-якого $t_0 \in I$ *кожний розв'язок* x *системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* (3.1) *допускає зображення*

$$x(t) = C(t, t_0)x(t_0), \tag{3.20}$$

де C *- матриця Коші системи* (3.1) *.*

З а у в а ж е н н я. Оскільки

$$C(t,\tau)'_t = P(t)C(t,\tau),$$

то

$$C(t,\tau) = E + \int\limits_{\tau}^{t} P(s)C(s,\tau)\,ds$$

Звідси випливає що

$$\|C(t,\tau)\| \le \|E\| + \left|\int\limits_{\tau}^{t} \|P(s)\|\|C(s,\tau)\|\,ds\right|,$$

$$\|C(t,\tau)\| \le n\exp\left(\left|\int\limits_{\tau}^{t} \|P(s)\|\,ds\right|\right).$$

2.3.3 Множина розв'язків системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

Розглянемо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \tag{3.21}$$

де $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$, $q \in C(I;\mathbb{R}^n)$ *,* I *- проміжок в* $\mathbb{R}$ *, та відповідну їй систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x. \tag{3.21$_0$}$$

Л е м а 3.13. *(Принцип суперпозиції).* 1 *. Якщо вектор-функції* $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *є розв'язками СЛОДР* (3.21_0) *, то їх лінійна комбинація* $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ *з дійсними коефіцієнтами також є розв'язками СЛОДР* (3.21_0) *.*

2 *. Якщо* $x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛНДР* (3.21) *і* $x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛОДР* (3.21_0) *, то їх сума* $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ *- розв'язок СЛНДР* (3.21) *.*

3 *. Якщо* $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛНДР* (3.21) *, то їх різниця* $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ *є розв'язком СЛОДР* (3.21_0) *.*

Доведення. *Справедливість першого твердження випливає з леми 3.1 про множину всіх розв'язків СЛОДР.*

2. Якщо $x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛНДР* (3.21) *і* $x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛОДР* (3.21_0) *, то*

$$\frac{d[x_1(t)+x_2(t)]}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} = [P(t)x_1(t)+q(t)] + P(t)x_2(t) = P(t)[x_1(t)+x_2(t)] + q(t) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Отже, сума $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ *є розв'язком СЛНДР (3.21).*

3. Нехай $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *- розв'язок СЛНДР* (3.21) *. Тоді*

$$\frac{d[x_1(t)-x_2(t)]}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} = [P(t)x_1(t)+q(t)] - [P(t)x_2(t)+q(t)] = P(t)[x_1(t)-x_2(t)] \quad \text{при} \quad t \in I.$$

Тому, різниця $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ *- розв'язок СЛОДР* (3.21_0) *.* ■

Теорема. *(Про множину розв'язків СЛНДР). Якщо* $x_0(t)$ *- частинний розв'язок СЛНДР* (3.21) *і* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *- фундаментальна система розв'язків відповідної СЛОДР* (3.21_0) *, то множина всіх розв'язків СДНДР* (3.21) *міститься у формулі*

$$x(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t) + x_0(t), \tag{3.22}$$

де $c_1, \ldots, c_n$ *- довільні дійсні сталі.*

Зауваження. *Формула (3.22) є формулою загального розв'язків. Через властивості фундаментальних матриць СЛОДР вона може бути переписана у вигляді*

$$x(t) = X(t)c + x_0(t), \tag{3.23}$$

де $X(t)$ *- фундаментальна матриця СЛОДР* (3.21_0) *і* c *- довільний* n *-мірний додатній дійсний вектор.*

Доведення теореми. *Нехай* $x_0(t)$ *- частинний розв'язок СЛНДР* (3.21) *і* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *- фундаментальна система розв'язків відповідної СЛОДР* (3.21_0) *. Тоді з перших двох тверджень принципу суперпозиції функція (3.22) при будь-яких дійсних* $c_1, \ldots, c_n$ *є розв'язком СЛНДР (2.21). Залишається лише показати, що будь-який розв'язок СЛНДР (3.21) міститься у формулі (3.22) при деяких дійсних значеннях* $c_1, \ldots, c_n$ *. Справді, якщо* $x(t)$ *- довільний розв'язок СЛНДР (3.21), то враховуючи, що* $x_0(t)$ *також розв'язок цієї системи та використовуючи третє твердження принципу суперпозиції, приходимо до висновку, що їхня різниця* $x(t) - x_0(t)$ *є розв'язком відповідної СЛОДР* (3.21_0) *і тому міститься у встановленій раніше формулі її загального розв'язку при деяких значеннях довільних сталих. Отже, існують сталі* $c_1^0, \ldots, c_n^0$ *такі, що*

$$x(t) - x_0(t) = c_1^0 x_1(t) + \ldots + c_n^0 x_n(t) \quad \text{при} \quad t \in I$$

і тому

$$x(t) = c_1^0 x_1(t) + \ldots + c_n^0 x_n(t) + x_0(t) \quad \text{при} \quad t \in I.$$

■

2.3.4 Знаходження частинного розв'язку системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих. Формула Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \tag{1}$$

де $P \in C(I; \mathbb{R}^{n \times n})$, $q \in C(I; \mathbb{R}^n)$, I *- проміжок в* $\mathbb{R}$ *. Вибравши довільним чином сталу* $t_0 \in I$ *і сталий вектор* $c_0 \in \mathbb{R}^n$ *, поставимо задачу Коші про знаходження розв'язку системи (1), який задовольняє початкову умову*

$$x(t_0) = c_0. \tag{2}$$

Цей розв'язок легко можна знайти, якщо відома фундаментальна матриця відповідної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x. \tag{1_0}$$

Нехай $X(t)$ *- фундаментальна матриця системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь* (1_0) *. Тоді множина всіх розв'язків системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь* (1_0) *міститься у формулі*

$$x(t) = X(t)c,$$

де c *– довільний сталий дійсний* n *-вимірний вектор.*

Тепер розв'язок задачі Коші (1), (2) будемо шукати в виді

$$x(t) = X(t)z(t) \tag{3}$$

(метод вариації довільної), де $z(t)$ *–невідома вектор-функція.*

Оскільки (3) - шуканий розв'язок задачі Коші (1), (2), то

$$(X(t)z(t))' = P(t)X(t)z(t) + q(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in I \tag{4_1}$$

і

$$x(t_0) = X(t_0)z(t_0) = c_0. \tag{4_2}$$

З (4_1) *маємо*

$$X'(t)z(t) + X(t)z'(t) = P(t)X(t)z(t) + q(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in I.$$

Оскільки $X(t)$ *- фундаментальна матриця системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* (1_0) *, то згідно з властивостями фундаментальних матриць*

$$X'(t) = P(t)X(t),$$

і тому попередня тотожність набуває вигляду

$$P(t)X(t)z(t) + X(t)z'(t) = P(t)X(t)z(t) + q(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in I,$$

або

$$X(t)z'(t) = q(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in I.$$

Звідси, враховуючи, що $X(t)$ *невироджена матриця при* $t \in I$ *, знаходимо*

$$z'(t) = X^{-1}(t)q(t) \quad \textit{для всіх} \quad t \in I. \tag{5}$$

Крім того, із (4_2) *маємо*

$$z(t_0) = X^{-1}(t_0)x(t_0) = X^{-1}(t_0)c_0. \tag{6}$$

Отримали задачу Коші (5), (6), але тут вже система (5) інтегрована.

Інтегруючи (5) на проміжку від t_0 *до* t *, отримаємо*

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)q(\tau)\,d\tau,$$

звідки з урахуванням (6) знаходимо, що

$$z(t) = X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)q(\tau)\,d\tau \quad \textit{для всіх} \quad t \in I.$$

Тим самим розв'язок задачі Коші (5), (6) знайдений.

В силу заміни (3) йому відповідає такий розв'язок задачі Коші (1), (2)

$$x(t) = X(t)\left[X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)q(\tau)\,d\tau\right],$$

або

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)q(\tau)\,d\tau,$$

або

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(\tau)q(\tau)\,d\tau.$$

Якщо ж тепер врахувати, що

$$X(t)X^{-1}(\tau) = C(t,\tau)$$

матриця Коші однорідної системи рівнянь (1_0) *, то данний розв'язок можна переписати в виді*

$$x(t) = C(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t,\tau)q(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Цю формулу називають формулою Коші системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь (1).
Таким чином, встановлена така

Теорема *(Про подання розв'язків СЛНДР). Кожний розв'язок системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь (1) при будь-якому* $t_0 \in I$ *можна подати у вигляді формули Коші (7).*

Зауваження 1. При фіксованому t_0 *вектор* $x(t_0) = c_0$ *є сталим вектор і формула Коші (7) відразу дає зображення для розв'язку задачі Коші (1), (2).*

Зауваження 2. Перший доданок в формулі Коші (7) при $x(t_0) = c_0$ *дає розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \qquad x(t_0) = c_0$$

(для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (1_0) *), а другий доданок дає розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t), \qquad x(t_0) = 0$$

(Для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь).

Зауваження 3. При $n = 1$ *формула (7) співпадає з формулою Коші, отриманої раніше для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку.*

З вищевикладеного ясно, що з інтегрування системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь достатньо знайти будь-яку фундаментальну матрицю (фундаментальну систему розв'язків) відповідної однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь.

2.4 Основні властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.

2.4.1 Основні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} = 0, \tag{4.1}$$

де $p_k \in C(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,\dots,n)$ *,* I *- проміжок в* $\mathbb{R}$ *. Раніше було встановлено, що воно еквівалентно системі лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), у якій*

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_1(t) & -p_2(t) & -p_3(t) & \dots & -p_{n-1}(t) & -p_n(t) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

причому тут $P \in C(I;\mathbb{R}^{n\times n})$ *. В силу цієї еквівалентності функція* u *із класу* $C^n(I;\mathbb{R})$ *є розв'язком диференціального рівняння (4.1), якщо вектор-функція (4.2) – розв'язок диференціальної системи (3.1) з матрицею* P *виду (4.3) і, навпаки, якщо неперервно диференційована вектор-функція* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *є розв'язком диференціальної системи (3.1) з матрицею* P *виду (4.3), то ця вектор-функція має вигляд (4.2), де* u *- розв'язок диференціального рівняння (4.1).*

Звідси з урахуванням леми 3.1 випливає, що для будь-яких двох розв'язків u_1 *,* u_2 *диференціального рівняння (4.1) та для будь-яких* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *вектор-функція*

$$x(t) = \alpha \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \\ \alpha u_1'(t) + \beta u_2'(t) \\ \vdots \\ \alpha u_1^{(n-1)}(t) + \beta u_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язком диференціальної системи (3.1) із матрицею P *виду (4.3). Але тоді перша компонента цієї векторної функції буде розв'язком диференціального рівняння (4.1). Тим самим, встановлена*

Л е м а 3.13. (про множину розв'язків диференціального рівняння (4.1)). Множина розв'язків лінійного диференціального рівняння (4.1) утворює лінійний простір над полем дійсних чисел.

З а у в а ж е н н я 3.5. У справедливості цього твердження легко можна було переконатися шляхом безпосередньої підстановки лінійної комбінації $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ *розв'язків диференціального рівняння (4.1) в це рівняння.*

Далі, зважаючи на лему 3.2, приходимо до наступного твердження.

Л е м а 3.14. (про звуження ЛНЗ розв'язків (4.1) в точку). Якщо функції $u_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,\dots,m)$ *є лінійно незалежними на проміжку* I *розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1), то для будь-якого* $t_0 \in I$ *лінійно незалежними будуть вектори*

$$x_k(t_0) = \begin{pmatrix} u_k(t_0) \\ u_k'(t_0) \\ \vdots \\ u_k^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \quad (k = 1,\dots,m). \tag{4.4}$$

З а у в а ж е н н я 3.6. Слід звернути увагу, що з лінійної незалежності на проміжку I *розв'язків* u_k $(k = 1,\dots,m)$ *диференціального рівняння (4.1) не витікає при будь-якому* $t_0 \in I$ *лінійна незалежність* $u_k(t_0)$ $(k = 1,\dots,m)$ *у випадку, коли* $m > 1$ *, тоді як для будь-яких функцій* $u_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,\dots,m)$ *з лінійної незалежності векторів (4.4) хоча б у одній точці* $t_0 \in I$ *випливає лінійна незалежність цих функцій на проміжку* I *.*

Тепер введемо необхідні для подальшого означення.

О з н а ч е н н я 3.7. Вронскіаном (або визначником Вронського) n *- розв'язків* $u_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k =$

$1,\dots,n)$ *диференціального рівняння (4.1) називаеться визначник виду*

$$W(u_1,\dots,u_n)(t)=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_{n-1} & u_n(t)\\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_{n-1}'(t) & u_n'(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ u_1^{(n-2)}(t) & u_2^{(n-2)}(t) & \dots & u_{n-1}^{(n-2)}(t) & u_n^{(n-2)}(t)\\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_{n-1}^{(n-1)}(t) & u_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}.$$

О з н а ч е н н я 3.8. Множина з n лінійно незалежних на проміжку I розв'язків диференціального рівняння (4.1) називається фундаментальною системою розв'язків (ФСР) диференціального рівняння (4.1).

В силу леми 3.3 и зауваження 3.6 має місце

Л е м а 3.15 (Критерій фундаментальності системи n розв'язків (4.1)). Для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1) були його фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб Вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля всюди на проміжку I. Більше того, якщо він відмінний від нуля хоча б в одній точці з проміжку I, то він буде відмінним від нуля і на всьому проміжку I.

З використанням цього критерію та леми 3.4 встановлюється

Л е м а 3.16 (про існування ФСР). Для лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1) існує фундаментальна система розв'язків.

При цьому для диференціального рівняння (4.1) ставиться n задач Коші про знаходження n розв'язків, що задовольняють початковим умовам

$$u^{(i-1)}(t_0)=\delta_{ik},\quad i=1,\dots,n\quad(k=1,\dots,n),$$

де t_0 - якась точка з проміжку I і δ_{ik} - символ Кронекера, які еквівалентні n задачам Коші (3.6_k) для диференціальної системи (3.1) з матрицею P виду (4.3). Оскільки кожна k - я ($k\in\{1,\dots,n\}$) із цих задач має згідно з теоремою 2.2 один і тільки один розв'язок u_k і для них $W(u_1,\dots,u_n)(t_0)=1$, то ці розв'язки з леми 3.15 утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (4.1).

Зрештою, з теореми 3.1 випливає наступний результат.

Т е о р е м а 3.2 (про простір розв'язків диференціального рівняння(4.1)). Множина всіх розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1) утворює n - вимірний лінійний простір над полем дійсних чисел, базисом якого є будь-яка фундаментальна система розв'язків.

З теореми 3.2 ясно, що якщо $u_1,\dots,u_n$ - фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1), то множина його розв'язків міститься у формулі

$$u(t)=c_1u_1(t)+cdots+c_nu_n(t),$$

де $c_1,\dots,c_n$ - довільні дійсні сталі. У у зв'язку з цим цю формулу називають загальним розв'язком системи диференціального рівняння (4.1).

П р и к л а д 3.4. Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$u''+u=0.$$

Неважко перевірити, що функції $u_1(t)=\cos t$ і $u_2(t)=\sin t$ є його розв'язками. Для цих розв'язків

$$w(u_1,u_2)(t)=\begin{vmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}=1\neq0.$$

Тому з леми 3.15 вони утворюють фундаментальну систему. розв'язків. Отже, згідно з теоремою 3.2 множина всіх розв'язків даного рівняння міститься у формулі

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

де c_1, c_2 *- додатні дійсні сталі.*

З а у в а ж е н н я 3.7. У разі комплекснозначних коефіцієнтів лінійного однорідного диференціального рівняння (4.21) множина всіх розв'язків утворює n *- вимірний лінійний простір над полем комплексних чисел, базисом якого є будь-яка фундаментальна система розв'язків. При цьому залишаються справедливими леми 3.14-3.16, а також лема 3.13 с заміною в ній виразу "над полем дійсних чисел"виразом "над полем комплексних чисел".*

Для дійсних лінійних однорідних диференціальних рівнянь так само, як і для систем, часто вдається отримати не дійсний, а комплексний базис. Він дозволяє, враховуючи, що дійсне диференціальне рівняння є окремим випадком комплекснозначного, описати множину всіх комплексних розв'язків даного рівняння, яке містить у собі множину всіх його дійсних розв'язків. Тут також виникає проблема про одійснення комплексного базису.

З лем 3.5 - 3.6 випливають такі твердження.

Л е м а 3.17 (про одійснення комплексного розв'язку). Якщо функція $u = u_1 + i\,u_2$ *, де* $u_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,2)$ *, є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1), то дійсна частина цього розв'язку* $u_1 = \mathrm{Re}\,u$ *та його уявна частина* $u_2 = \mathrm{Im}\,u$ *також є розв'язками цього рівняння.*

Л е м а 3.18 (про комплексно спряжені розв'язки). Якщо функція $u = u_1 + i\,u_2$ *, де* $u_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,2)$ *, є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1), то функція* $\bar{u} = u_1 - i\,u_2$ *также є розв'язком цього рівняння.*

Л е м а 3.19 (про одійснення комплексного базису). Якщо лінійне однорідне диференціальне рівняння (4.1) має фундаментальну систему розв'язків виду

$$u_1 = v_1 + i\,v_2,\ u_2 = v_1 - i\,v_2,\ \ldots,\ u_{2m-1} = v_{2m-1} + i\,v_{2m},\ u_{2m} =\ v_{2m-1} - i\,v_{2m},\ v_{2m+1}, \ldots, v_n,$$

де $v_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,\ldots,n)$ *, то функції* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *утворюють дійсну фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (4.1).*

Далі отримаємо для лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1) деякі наслідки результатів для систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1), що стосуються властивостей їх матриць рішень.

Л е м м а 3.20. Якщо функції $u_k \in C^n(I;\mathbb{R})$ $(k = 1,\ldots,n)$ *утворюють фундаментальну систему розв'язків деякого лінійного однорідного диференціального рівняння* n *-го порядку, вони це рівняння однозначно визначають.*

Очевидно, що це рівняння визначається із співвідношення

$$\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \ldots & u_n(t) & u \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \ldots & u_n'(t) & u' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) & u^{(n-1)} \\ u_1^{(n)}(t) & u_2^{(n)}(t) & \ldots & u_n^{(n)}(t) & u^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Л е м а 3.21 (формула Ліувіля-Остроградського). Для будь-яких розв'язків u_k $(k = 1,\ldots,n)$

лінійного однорідного диференціального рівняння виду (4.1) та будь-якому $t_0 \in I$ *має місце формула*

$$W(u_1, \ldots, u_n)(t) = W(u_1, \ldots, u_n)(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p_n(\tau)\, d\tau\right) \quad при \quad t \in I. \tag{4.5}$$

Д о в е д е н н я. *Якщо функції* $u_k \in C^n(I; \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ *є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння (4.1), то вектор-функції*

$$x_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_k' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (k = 1, \ldots, n)$$

є розв'язками системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь (3.1) із матрицею P *виду (4.3). Оскільки для цієї матриці* $\operatorname{Sp} P(t) = -p_n(t)$, *то для будь-якого* $t_0 \in I$ *згідно з формулою Ліувіля-Остроградського (3.21)*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} p_n(\tau)\, d\tau\right) \quad при \quad t \in I.$$

де X *- матриця, стовпцями якої є вектор-функції* $x_1, \ldots, x_n$. *Звідси випливає справедливість твердження леми.* ∎

Л е м а 3.22 *(формула Коші для диференціального рівняння (4.1)). Кожен розв'язок диференціального рівняння (4.1) допускає при будь-якому* $t_0 \in I$ *зображення виду*

$$u(t) = c_1(t, t_0) u(t_0) + \cdots + c_n(t, t_0) u^{(n-1)}(t_0), \tag{4.6}$$

де $c_1, \ldots, c_n$ *- розв'язки диференціального рівняння (4.1), які задовольняють умовам*

$$\left.\frac{\partial c_k^{i-1}(t, t_0)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=t_0} = \delta_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{4.7}$$

δ_{ki} *- символ Кронеккера.*

Д о в е д е н н я. *Лінійне однорідне диференціальне рівняння (4.1) еквівалентне системі лінійних однорідних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x$$

з матрицею P *виду (4.3), причому розв'язок цієї системи*

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

де $u(t)$ *– розв'язок диференціального рівняння (4.1).*

У силу формули Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь кожний її розв'язок при будь-якому $t_0 \in I$ *представимий у вигляді*

$$x(t) = C(t, t_0) x(t_0),$$

де $C(t,t_0)$ *матриця Коші системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.*

Згідно з означенням матриці Коші її стовпцями є розв'язки і $C(t_0,t_0)=E$. *Тому, зважаючи на еквівалентність системи лінійному однорідному диференціальному рівнянню (4.1) матриця Коші* $C(t,t_0)$ *має вигляд*

$$C(t,t_0)=\begin{pmatrix} c_1(t,t_0) & c_2(t,t_0) & \dots & c_n(t,t_0) \\ \frac{\partial c_1(t,t_0)}{\partial t} & \frac{\partial c_2(t,t_0)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial c_n(t,t_0)}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} c_1(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} c_2(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1} c_n(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} \end{pmatrix},$$

де $c_k(t,t_0)$ $(k=1,\dots,n)$ *– розв'язки диференціального рівняння ((4.1), які задовольняють початковим умовам*

$$\left.\frac{\partial c_k^{i-1}(t,t_0)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=t_0}=\delta_{ik},\quad i=1,\dots,n.$$

Тоді в силу формули Коші та (4.2)

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1(t,t_0) & c_2(t,t_0) & \dots & c_n(t,t_0) \\ \frac{\partial c_1(t,t_0)}{\partial t} & \frac{\partial c_2(t,t_0)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial c_n(t,t_0)}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} c_1(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} c_2(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1} c_n(t,t_0)}{\partial t^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Звідси ясно, що для першої компоненти вектора, що стоїть ліворуч, маємо

$$u(t)=c_1(t,t_0)u(t_0)+c_2(t,t_0)u'(t_0)+\dots c_n(t,t_0)u^{(n-1)}(t_0),$$

що й потрібно було довести.

ПРИКЛАД 1. Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$u''+u=0.$$

Положимо

$$u(t)=x_1(t),\quad u'(t)=x_2(t),$$

отримаємо для цього рівняння еквівалентну систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=-x_1. \end{cases}$$

Раніше для цієї системи рівнянь було отримано матрицю Коші виду

$$C(t,\tau)=\begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix}.$$

Тут $c_1(t,\tau)=\cos(t-\tau)$, $\quad c_2(t,\tau)=\sin(t-\tau)$. *Тому формула Коші для рівняння, що розглядається, має вигляд*

$$u(t)=\cos(t-t_0)u(t_0)+\sin(t-t_0)u'(t_0).$$

Вона дає зображення для будь-якого розв'язку з початковими умовами $u(t_0)=c_1,\quad u'(t_0)=c_2$.

ПРИКЛАД 2. Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$u^{(n)}=0.$$

Очевидно, що розв'язком цього рівняння є будь-який многочлен $n-1$ *-го порядку. Серед цих многочленів знайдемо* n *функцій* $c_k(t,t_0)$, $(k=1,\ldots,n)$, *які задовольняють початковим умовам*

$$\left.\frac{\partial c_k^{i-1}(t,t_0)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=t_0} = \delta_{ik}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Неважко зрозуміти, що такими є функції виду

$$c_k(t,t_0) = \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \ (k=1,\ldots,n).$$

Тому формула Коші для диференціального рівняння, що розглянуто, має такий вигляд

$$u(t) = u(t_0) + (t-t_0)u'(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}u^{(n-1)}(t_0),$$

або

$$u(t) = u(t_0) + \frac{u'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{u''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots \frac{u^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}.$$

Це формула Тейлора для многочлена $n-1$ *-го порядку.*

2.4.2 Основні властивості розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} = f(t), \tag{1}$$

де $p_k \in C(I;\mathbb{R})$ $(k=1,\ldots,n)$, $f \in C(I;\mathbb{R})$, *і відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння*

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u^{(k-1)} = 0. \tag{1_0}$$

Лема *(принцип суперпозиції). 1. Якщо* u_1, u_2 *– розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння* (1_0), *то їх лінійна комбінація* $u = c_1u_1 + c_2u_2$ *з дійсними коефіцієнтами також є розв'язком цього рівняння. 2. Якщо* u_1 *- розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1) і* u_2 *- розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння* (1_0), *то їх сума* $u = u_1 + u_2$ *є розв'язком лінійного неоднорідного (1). 3. Якщо* u_1, u_2 *- розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1), їх різниця* $u = u_1 - u_2$ *є розв'язком відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння* (1_0).

Доведення *проводиться також, як і доведення відповідної леми для систем лінійних диференціальних рівнянь. Наприклад, доведемо третє твердження.*

3. Нехай $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ *– розв'язок неоднорідного рівняння (1). Тоді через означення розв'язку*

$$u_1^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u_1^{(k-1)}(t) = f(t) \quad \text{для всіх} \quad t \in I$$

і

$$u_2^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)u_2^{(k-1)}(t) = f(t) \quad \text{для всіх} \quad t \in I.$$

Віднімаючи з першої тотожності другу, отримаємо

$$u_1^{(n)}(t) - u_2^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)[u_1^{(k-1)}(t) - u_2^{(k-1)}(t)] = 0 \quad \textit{для всіх} \quad t \in I,$$

або

$$[u_1(t) - u_2(t)]^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)[u_1(t) - u_2(t)]^{(k-1)} = 0 \quad \textit{для всіх} \quad t \in I,$$

а це означає, що $u_1(t) - u_2(t)$ *є розв'язком однорідного диференціального рівняння* (1_0) *.*

Теорема *(про множину всіх розв'язків ЛНДР (1)). Якщо* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *– фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння* (1_0) *і* $u_0(t)$ *– будь-який розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, то множина всіх розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1) міститься у формулі*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t) + u_0(t), \tag{2}$$

де $c_1, \ldots, c_n$ *– довільні додатні сталі.*

Ця формула дає загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння. У ній сума $c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t)$ *– представляє загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння* (1_0) *і* $u_0(t)$ *– частинний розв'язоу лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1).*

Доведення теореми. *Оскільки* $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *- це розв'язки однорідного диференціального рівняння* (1_0) *, то з першого твердження принципу суперпозиції лінійна комбінація з дійсними сталими* $c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t)$ *є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння* (1_0) *. А тоді, враховуючи, що* $u_0(t)$ *це розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, з використанням другого твердження принципу суперпозиції приходимо до висновку, що функція* $u(t)$ *з формули (2) буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1). Отже, при будь-яких дійсних значеннях* $c_1, \ldots, c_n$ *функція* $u(t)$ *з формули (2) є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1).*

Залишається лише довести, що розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1) міститься у формулі (2) при деяких дійсних значеннях $c_1, \ldots, c_n$ *. Нехай* $u_*(t)$ *- довільний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1). Оскільки за умовою теореми функція* $u_0(t)$ *також є розв'язками цього рівняння, то в силу третього твердження цієї теореми їх різниця* $u_*(t) - u_0(t)$ *є розв'язком відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння і тому міститься в множині його розв'язків, що задається формулою*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t).$$

Це означає, що існують такі сталі $c_1^0, \ldots, c_n^0$ *, що*

$$u_*(t) - u_0(t) = c_1^0 u_1(t) + \ldots + c_n^0 u_n(t),$$

звідки випливає, що

$$u_*(t) = c_1^0 u_1(t) + \ldots + c_n^0 u_n(t) + u_0(t),$$

тобто розв'язок $u_*(t)$ *міститься в формулі (2) при деяких значеннях* $c_1, \ldots, c_n$ *.*

Тепер зауважимо, що знання фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння дозволяє побудувати будь-який окремий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Нехай $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *– фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння* (1_0) *. Вона дозволяє для будь-якого фіксованого* $\tau \in I$ *знайти* n *розв'язків цього рівняння, які відповідають наступним початковим умовам*

$$\begin{array}{ccccc} u(\tau) = 1, & u(\tau) = 0, & & u(\tau) = 0, \\ u'(\tau) = 0, & u'(\tau) = 1, & & u'(\tau) = 0, \\ u''(\tau) = 0 & u''(\tau) = 0, & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u^{(n-2)}(\tau) = 0 \\ u^{(n-1)}(\tau) = 0, & u^{(n-1)}(\tau) = 0, & & u^{(n-1)}(\tau) = 1, \end{array}$$

Позначимо розв'язки цих n *задач Коші за* $c_1(t,\tau), c_2(t,\tau), \ldots, c_n(t,\tau)$ *відповідно.*

Тепер рівняння (1) і (1_0) *за допомогою замін*

$$\begin{gathered} u(t) = x_1(t), \\ u'(t) = x_2(t), \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) = x_n(t) \end{gathered}$$

зведемо до еквівалентних систем лінійних диференціальних рівнянь виду

$$x' = P(t)x + q(t) \tag{3}$$

і

$$x' = P(t)x, \tag{3_0}$$

де

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_1(t) & -p_2(t) & -p_3(t) & \ldots & -p_{n-1}(t) & -p_n(t) \end{pmatrix}, \qquad q(t) = \begin{pmatrix} 0, \\ 0, \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

При цьому, як ми вже показали вище, матриця

$$C(t,\tau) = \begin{pmatrix} c_1(t,\tau) & c_2(t,\tau) & \ldots & c_n(t,\tau) \\ \frac{\partial c_1(t,\tau)}{\partial t} & \frac{\partial c_2(t,\tau)}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial c_n(t,\tau)}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{n-1} c_1(t,\tau)}{\partial t^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} c_2(t,\tau)}{\partial t^{n-1}} & \ldots & \frac{\partial^{n-1} c_n(t,\tau)}{\partial t^{n-1}} \end{pmatrix}$$

буде матрицею Коші однорідної системи диференціальних рівнянь (3_0) *.*

Тоді в силу формули Коші, отриманої раніше для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, будь-який розв'язок цієї системи для кожного $t_0 \in I$ *представимий у вигляді*

$$x(t) = C(t,t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} C(t,\tau)q(\tau)\,d\tau.$$

Оскільки тут

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

то дана формула набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = C(t,t_0) \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_)) \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} C(t,\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Звідси, враховуючи вид матриці $C(t,\tau)$ *, отримаємо*

$$u(t) = c_1(t,t_0)u(t_0) + c_2(t,t_0)u'(t_0) + \ldots + c_n(t,t_0)u^{(n-1)}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} c_n(t,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Цю формулу називають формулою Коші для лінійного неоднорідного жиференціального рівняння (1), а функцію $c_n(t,\tau)$ *- функцією Коші. Таким чином, встановлена наступна теорема.*

Теорема *(про формулу Коші для ЛНДР). Кожний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1) при будь-якому* $t_0 \in I$ *представимо у вигляді формули Коші(4).*

ЗАУВАЖЕННЯ. У формулі Коші сума перших n *доданків є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння* (1_0) *з початковими умовами* $u(t_0), \ldots, u^{(n-1)}(t_0)$ *, а останній доданок - розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1), що задовольняє умовам* $u(t_0) = 0,\, u'(t_0) = 0, \ldots, u^{(n-1)}(t_0) = 0$.

ПРИКЛАД 1. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$u'' + u = f(t).$$

Раніше ми показали, що для відповідного однорідного диференціального рівняння

$$u'' + u = 0$$

функції $c_1(t,\tau)$ *и* $c_(t,\tau)$ *мають вид*

$$c_1(t,\tau) = \cos(t-\tau), \qquad c_2(t,\tau) = \sin(t-\tau).$$

Тоді в силу формули Коші (4) будь-який розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння для кожного $t_0 \in I$ *представимий у вигляді*

$$u(t) = u(t_0)\cos(t-t_0) + u'(t_0)\sin(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sin(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

ПРИКЛАД 2. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$u^{(n)} = f(t),$$

де f *– непрерервна функція на деякому проміжкі* $I \subset \mathbb{R}$ *.*

Раніше було встановлено, що для відповідного однорідного диференціального рівняння

$$u^{(n)} = 0$$

функції $c_k(t,\tau)$ $(k = 1, \ldots, n)$ *мають вид*

$$c_k(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Тому в силу формули Коші (4) будь-який розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння для кожного $t_0 \in I$ *представимий у вигляді*

$$u(t) = u(t_0) + \frac{u'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{u^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.$$

Відповідно до вищевикладеного лінійне неоднорідне рівняння (1) завжди може бути проінтегровано, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння (1_0) *.*

Вкажемо тепер один клас лінійних однорідних диференціальних рівнянь, для якого фундаментальна система розв'язків завжди можна визначити.

2.5 ФСР ЛОДР зі сталими коефіцієнтами.

Розглядаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k u^{(k-1)} = 0 \tag{1}$$

де p_k $(k = 1, \ldots, n)$ *– дійсні сталі, або*

$$u^{(n)} + p_n u^{(n-1)} + p_{n-1} u^{(n-2)} + \ldots + p_2 u' + p_1 u = 0.$$

Для цього диференціального рівняння введемо відповідні йому многочлен та оператор

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_n \lambda^{n-1} + p_{n-1} \lambda^{n-2} + \ldots + p_2 \lambda + p_1,$$

$$L_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + p_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \ldots + p_2 \frac{\partial}{\partial t} + p_1$$

або в короткому записі

$$f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{k-1}, \tag{2}$$

$$L_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}. \tag{3}$$

Рівняння

$$f(\lambda) = 0$$

або

$$\lambda^n + p_n \lambda^{n-1} + p_{n-1} \lambda^{n-2} + \ldots + p_2 \lambda + p_1 = 0 \tag{4}$$

або в короткому записі

$$\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{k-1} = 0$$

називається характеристичним для диференціального рівняння (1). Оператор L_n *кожної* n *-раз неперервно диференційованої функції* u *ставить у відповідність функцію*

$$L_n(u(t)) = \frac{\partial^n u(t)}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^{k-1} u(t)}{\partial t^{k-1}}.$$

Між рівнянням (1) та оператором L_n *існує тісний зв'язок. А саме*

Лема 1. *Функція* $u(t)$ *є розв'язком диференціального рівняння (1) тоді і лише тоді, коли* $L_n(u)(t) \equiv 0$ *на* $\mathbb{R}$ *.*

Лема є очевидною.

Лема 2 *(перша основна властивість оператора).*

$$L_n(e^{\lambda t}) = f(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Доведення. *Дійсно, в сиду означення лінійного оператора*

$$L_n(e^{\lambda t}) = \lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{k-1} e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t}[\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{k-1}] = f(\lambda) e^{\lambda t}$$

з лем 1 і 2 безпосередньо випливає

Лема 3. *Функція* $e^{\lambda t}$ *є розв'язком диференціального рівняння (1) тоді і лише тоді, коли* λ *є коренем характеристичного рівняння (4).*

Теорема 1 *(випадок простих коренів характеристичного рівняння). Якщо характеристичне рівняння (4) має* n *простих (різних) коренів* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *, то диференціальне рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків виду*

$$e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}. \tag{5}$$

Доведення. *Нехай характеристичне рівняння (4) має* n *різних коренів* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *. Тоді згідно лемі 3 функції (5) є розв'язками диференціального рівняння (1). Залишається лише встановити, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків. Для цього скористаємося критерієм фундаментальності. Запишемо Вронскіан для цих розв'язків*

$$W\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t} \prod_{1 \le k < m \le n} (\lambda_m - \lambda_k) \neq 0 \quad \text{при всіх} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тому згідно з критерієм фундаментальності функції (5) утворюють фундаментальну систему розв'язків. Теорему доведено.

ЗАУВАЖЕННЯ. Оскільки корені характеристичного рівняння, взагалі кажучи, комплексні, то фундаментальна система може містити комплексні розв'язки. І тут виникає необхідність одійснити комплексний базис. Для цього можемо скористатися лемою про одійснення комплексного базису. Якщо число $lambda_k$ *- комплексний корінь характеристичного рівняння (4), тобто. має вигляд* $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ *, де* α_k *і* β_k *- дійсні числа, то характеристичне рівняння має і комплексно спряжений розв'язок* $\tilde{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$ *. Цим двом корінням характеристичного рівняння (4) відповідають два розв'язки*

$$e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}, \qquad e^{(\alpha_k - i\beta_k)t}$$

в комплексній фундаментальній системі розв'язків (5).

Для цмх розв'язків в силу формули Ейлера маємо

$$e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} = e^{\alpha_k t}(\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t), \qquad e^{(\alpha_k - i\beta_k)t} = e^{\alpha_k t}(\cos \beta_k t - i \sin \beta_k t)$$

Цим двом комплексним розв'язкам із комплексної фундаментальної системи розв'язкам в силу леми про одійснення комплексного базису відповідатимуть два дійсні розв'язки

$$e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, \qquad e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t$$

з дійсної фундаментальної системи розв'язків.

ПРИКЛАД 1. Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Запишемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Це рівняння має прості корені

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Оскільки корені дійсні та різні, то диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків.

$$e^{3t}, \qquad e^{2t}.$$

А тоді множина всіх розв'язків даного диференціального рівняння міститься у формулі

$$u(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t},$$

де $c_1,\ c_2$ *– довільні дійсні сталі.*

ПРИКЛАД 2. Розглянемо рівняння

$$u'' + u' + u = 0.$$

Запишемо відповідне йому характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Коренями цього рівняння є комплексні числа

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Цим комплексно спряженим кореням характеристичного рівняння в дійсному базисі відповідають наступні два розв'язки диференціального рівняння

$$e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \qquad e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

А тоді множина всіх розв'язків диференціального рівняння міститься у формулі

$$u(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),$$

де c_1, c_2 *– довільні дійсні сталі.*

ПРИКЛАД 3. Розглянемо рівняння

$$u'' + u = 0.$$

Запишемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Його коріннями є комплексні спряжі числа

$$\lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -i.$$

Цим кореням відповідає наступна дійсна фундаментальна система розв'язків

$$\cos t, \qquad \sin t,$$

і загальний розв'язок матиме вигляд

$$u(t) = c_1\cos t + c_2\sin t,$$

де c_1, c_2 *– додатні дійсні сталі.*

ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК (наявності кратних коренів).

Щоб встановити для рівняння (1) з постійними коефіцієнтами загальний результат, що охоплює і випадок наявності кратних коренів у характеристичного рівняння (4), наведемо спочатку ряд необхідних для цього допоміжних тверджень.

Лема 4 (наслідок з теореми Шварца про рівність змішаних похідних). *Якщо функція $f(u,v)$, задана на деякої відкритій множині $D \in \mathbb{R}^2$, має для деяких цілих додатніх k і m неперервні на D змішані частинні похідні*

$$\frac{\partial^{k+m} f(u,v)}{\partial^k u \partial^m v} \qquad і \qquad \frac{\partial^{k+m} f(u,v)}{\partial^m v \partial^k u},$$

то

$$\frac{\partial^{k+m} f(u,v)}{\partial^k u \partial^m v} = \frac{\partial^{k+m} f(u,v)}{\partial^m v \partial^k u} \quad на \quad D.$$

Лемма 5 (формула Лейбниця). *Якщо функції u і v n-рвз диференціюються на проміжку $J \in \mathbb{R}$, то*

$$(u(t)v(t))^{(n)} = u^{(n)}(t) + \sum_{k=i}^{n} C_n^i u^{(n-i)}(t) v^{(i)}(t) + v^{(n)}(t), \quad при \quad t \in J$$

де C_n^i – число сполучень з n по i, тобто

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Лема 6 (про властивість многочленів) *Якщо многочлен $f(\lambda)$ степеня n має корінь λ_k кратності $n_k \leq n$, то*

$$F(\lambda_k) = f'(\lambda_k) = \ldots = f^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad і \quad f^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0.$$

Лема 7 (про властивості лінейного оператора L_n). *Для будь-якого цілого додатнього m*

$$L_n\left(t^m e^{\lambda t}\right) = \left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i f^{(i)}(\lambda) t^{m-i}\right) e^{\lambda t}.$$

Доведення. *Зауважимо спочатку, що $t^m e^{\lambda t} = \frac{\partial^m e^{\lambda t}}{\partial \lambda^m}$. Тоді в силу вида оператора L_n маємо*

$$L_n\left(t^m e^{\lambda t}\right) = L_n\left(\frac{\partial^m e^{\lambda t}}{\partial \lambda^m}\right) = \frac{\partial^n}{\partial^n t}\left(\frac{\partial^m e^{\lambda t}}{\partial \lambda^m}\right) + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left(\frac{\partial^m e^{\lambda t}}{\partial \lambda^m}\right).$$

Враховуючи тепер лему 4 про рівність змішаних похідних, перепишемо це співвідношення у вигляді

$$L_n\left(t^m e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}\left(\frac{\partial^n e^{\lambda t}}{\partial t^n}\right) + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}\left(\frac{\partial^{k-1} e^{\lambda t}}{\partial t^{k-1}}\right).$$

А оскільки сталу можна виносити за знак похідної та похідна від суми дорівнює сумі похідних, то з цього співвідношення з урахуванням леми 2 отримаємо

$$L_n\left(t^m e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}\left[\frac{\partial^n e^{\lambda t}}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^{k-1} e^{\lambda t}}{\partial t^{k-1}}\right] = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L_n(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda_m}\left(f(\lambda) e^{\lambda t}\right).$$

Використовуючи тепер формулу Лейбниця для похідних вищих порядків від виконання функцій, остаточно знаходимо, що

$$L_n\left(t^m e^{\lambda t}\right)=\left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i f^{(i)}(\lambda) t^{m-i}\right) e^{\lambda t}.$$

Лему доведено.

Тепер з використанням наведених вище лем встановимо наступний результат.

Теорема 2 (загальний випадок). *Якщо характеристичне рівняння (4) має s різних коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ кратностей $n_1,\ldots,n_s$ відповідно ($n_1+\ldots+n_s=n$), то диференціальне рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків*

$$e^{\lambda_k t}, \quad t e^{\lambda_k t}, \quad \ldots, \quad t^{n_k-1} e^{\lambda_k t} \qquad (k=1,\ldots,s). \tag{6}$$

Доведення. *Спочатку покажемо, що функції (6) є розв'язками диференціального рівняння (1). Для кожного кореня λ_k кратності n_k розглянемо функцію $t^m e^{\lambda_k t}$, де $0\le m\le n_k-1$ і покажемо, що вона є розв'язком диференціального рівняння (1). Для цього знайдемо образ лінійного оператора L_n для цієї функції. З використанням леми 7 будемо мати*

$$L_n\left(t^m e^{\lambda_k t}\right)=\left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i f^{(i)}(\lambda_k) t^{m-i}\right) e^{\lambda_k t}.$$

Тут в сумі праворуч $f^{(i)}(\lambda_k)$ $(i=0,1,\ldots,n_k-1)$ – похідні характеристичного многочлену $f(\lambda)$, що обчислені при $\lambda=\lambda_k$. В силу леми 6 всі ці похідні рівні нулю. Тому

$$L_n\left(t^m e^{\lambda_k t}\right)=0 \quad \text{при} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Тому згідно лемі 1 функція $t^m e^{\lambda_k t}$ для будь-якого $0\le m\le n_k-1$ є розв'язком диференціального рівняння (1).

Залишається лише довести, що це функції (6) утворюють фундаментальну систему розв'язів диференціального рівняння (1), тобто є лінійно незалежними $\mathbb{R}$. Припустимо супротивн, що вони є лінійно залежними на $\mathbb{R}$, тоді існують сталі $c_{k0},c_{k1},\ldots,c_{k,n_k-1}$ $(k=1,\ldots,s)$, не всі рівні нулю, такі, що

$$\sum_{k=1}^{s}\left(c_{k0}+c_{k1}t+\ldots+c_{k,n_k-1}t^{n_k-1}\right)e^{\lambda_k t}\equiv 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}.$$

Враховуючи, що тут серед сталих c_{ki} можуть бути рівні нулю, перепишемо це тотожність у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\sigma} P_k(t) e^{\lambda_k t}\equiv 0, \tag{7}$$

де P_k - многочлени степенів не вище n_k-1 і σ выбрано так, що P_σ – многочлен, не рівний тотожно нулю, а $P_{\sigma+i}(t)\equiv 0$ на $\mathbb{R}$ при $i\ge 1$.

Розділимо тотожність (7) на $e^{\lambda_1 t}$. В результаті отримаємо тотожність

$$P_1(t)+\sum_{k=2}^{\sigma} P_k(t) e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}\equiv 0.$$

Тут $P_1(t)$ - многочлен ступеня не вище n_1-1. Продиференціюемо цю тотожність достатню кількість разів, так, щоб многочлен $P_1(t)$ дорівнював би нулю. При цьому зауважимо, що ступінь і властивість бути не рівними тотожно нулю у многочленів, що стоять множниками при $e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}$, зберігаються при цій операції. Тому отримаємо

$$\sum_{k=2}^{\sigma} Q_k(t) e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}\equiv 0,$$

де Q_k – многочлени ступеня не вище $n_k - 1$ и Q_σ – многочлен, не рівний тожньо нулю.

Тепер розділимо тотожність на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$. В результаті приходимо до тотожності виду

$$Q_2(t) + \sum_{k=3}^{\sigma} Q_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_2)t} \equiv 0.$$

Диференціюючи його достатню кількість разів так, щоб дорівнював нулю многочлен Q_2, отримаємо тотожність

$$\sum_{k=3}^{\sigma} R_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_2)t} \equiv 0,$$

де могочлени R_k мають той же ступень, що і многочлени P_k, і при цьому многочлен $R_\sigma(t)$ не рівений тотожньо нулю. Продовжуючи цей процес так само, як і вище, отримаємо наприкінці цього процесу тотожність

$$F_\sigma(t)e^{(\lambda_\sigma-\lambda_{\sigma-1})t} \equiv 0,$$

де F_σ многочлен, не дорівнює тотожньо нулю. Однак ця тотожність може мати місце лише у випадку, коли многочлен $F_\sigma(t)$ дорівнює тотожньо нулю на $\mathbb{R}$. Отримали протиріччя, яке говорить про те, що наше припущення про лінійну залежність функцій з (6) на $\mathbb{R}$ було неправильним. Отже, вони є лінійно незалежними на $\mathbb{R}$ розв'язками диференціального рівняння (1) і тому утворюють фундаментальну систему розв'язками. Теорему повністю доведено.

Зауваження 1. *Вказана в теоремі 2 фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (1) є, власне кажучи, комплексною. Щоб отримати дійсну фундаментальну систему розв'язків, потрібно скористатися лемою про одійснення комплексного базису. В силу цієї леми комплексно спряженим розв'язкам у комплексному базисі відповідатимуть їх дійсні та уявні частини у дійсному базисі. Нехай $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ - комплексний корінь кратності n_k характеристичного рівняння (4). Оскільки це рівняння з дійсними коефіцієнтами, воно має і комплексно спряжений корінь $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ кратності n_k. Цим кореням через теорему 2 відповідають $2n_k$ комплексних рішень*

$$e^{(\alpha_k+i\beta_k)t},\ te^{(\alpha_k+i\beta_k)t},\ \ldots,\ t^{n_k-1}e^{(\alpha_k+i\beta_k)t} \qquad i \qquad e^{(\alpha_k-i\beta_k)t},\ te^{(\alpha_k-i\beta_k)t},\ \ldots,\ t^{n_k-1}e^{(\alpha_k-i\beta_k)t} \tag{8}$$

в комплексном базисі.

Згідно з формулою Ейлера

$$e^{(\alpha_k+i\beta_k)t} = e^{\alpha_k t}\left(\cos\beta_k t + i\sin\beta_k t\right), \qquad e^{(\alpha_k-i\beta_k)t} = e^{\alpha_k t}\left(\cos\beta_k t - i\sin\beta_k t\right).$$

Тому згідно з лемою про одійснення комплексного базису $2n_k$ розв'язкам (8) у комплексному базисі відповідатимуть у дійсному базисі $2n_k$ розв'язків диференціального рівняння (1) наступного виду

$$e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t,\ te^{\alpha_k t}\cos\beta_k t,\ \ldots,\ t^{n_k-1}e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t \qquad i \qquad e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t,\ te^{\alpha_k t}\sin\beta_k t,\ \ldots,\ t^{n_k-1}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t.$$

Зауваження 2. *З теореми 2 у разі, коли $n_k = 1$ витікає теорема 1 випадку простих коренів характеристичного рівняння (4), тобто теорема 2 охоплює всі можливі випадки коренів характеристичного рівняння (4).*

ПРИКЛАД 1.

Записати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$u'' - 4u' + 4u = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з дійсними коефіцієнтами. Запишемо відповідне для цього диференціального рівняння характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Це рівняння має дійсний корінь $\lambda_1 = 2$ *другої кратності* $(n_1 = 2)$. *Тоді згідно з теоремою 2 диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків виду*

$$e^{2t},\ te^{2t}.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$u(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

або

$$u(t) = (c_1 + c_2t)e^{2t},$$

де $c_1,\ c_2$ *– довільні дійсні сталі.*

ПРИКЛАД 2. *Розглянемо диференціальне рівняння*

$$u^{(8)} - 2u^{(4)} + u = 0.$$

Запишемо його характеристичне рівняння

$$\lambda^8 - 2\lambda^4 + 1 = 0.$$

Знайдемо корені цього рівняння. Зауважимо, що це рівняння може бути записано у вигляді

$$(\lambda^4 - 1)^2 = 0,$$

або

$$(\lambda^2 - 1)^2(\lambda^2 + 1)^2 = 0,$$

або

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2 = 0.$$

Звідси ясно, що характеристичне рівняння має корені

$$\lambda_1 = 1 \quad \textit{кратності} \quad 2, \qquad \lambda_2 = -1 \quad \textit{кратності} \quad 2,$$

$$\lambda_3 = i \quad \textit{кратності} \quad 2, \qquad \lambda_4 = -i \quad \textit{кратності} \quad 2,$$

Тоді в силу теореми 2 і зауваження 1 диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків

$$e^t,\ te^t,\ e^{-t},\ te^{-t},\ cost,\ t\cos t, \sin t,\ t\sin t.$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок диференціального рівняння, що розглядається, має вигляд

$$u(t) = (c_1 + c_2t)e^t + (c_3 + c_4t)e^{-t} + (c_5 + c_6t)\cos t + (c_7 + c_8t)\sin t,$$

де $c_i\ (i = 1, \ldots, 8)$ *– додатні дійсні сталі.*

ПРИКЛАД 2. *Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння*

$$u^{(5)} + 7u^{(4)} - 8u''' = 0.$$

$$\lambda^5 + 7\lambda^4 - 8\lambda^3 = 0.$$

$$(\lambda^2 + 7\lambda = 8)\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \textit{кратності} \quad 3, \qquad \lambda_2 = -8, \qquad \lambda_3 = 1.$$

ФСР

$$1,\ t,\ t^2,\ e^t,\ e^{-8t}$$

Загальний розв'язок

$$u(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^t + c_5e^{-8t}.$$