Розділ 7

КОЛИВНІСТЬ ТА НЕКОЛИВНІСТЬ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

7.1 Коливні та неколивні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку

Оскільки будь-яке лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку за допомогою перетворень може бути зведеним до двочленого рівняння

$$u'' + q(t)u = 0 \tag{7.1}$$

де $q \in C(I;\ R)$, то в подальшому обмежимось, в основному, розглядом рівнянь лише такого виду. При цьому далі будемо вважати, що $I = [a, \omega[\ (\omega \leq +\infty)$.

Означення 7.1. *Розв'язок u рівняння (7.1) називається коливним, якщо існує послідовність $\{t_n\}$ $(t_n \in [\alpha, \omega[)$, яка збігається до ω, така, що $u(t_n) = 0$ $(n = 1, 2, \dots,)$ (послідовність нулів $u(t)$). У противному разі, розв'язок u рівняння (7.1) називається неколивним.*

Звідси , зокрема, випливає, що тривіальний розв'язок $u(t) \equiv 0$ рівняння (7.1) вважається коливним.

У зв'язку з цим означенням природним постає питання: чому послідовність нулів коливного розв'язку повина збігатися до ω? Відповідь на нього дає наступна

Лема 7.1 (про точки згущення нулів)**.** *Кожний нетривіальний розв'язок рівняння* (7.1) *на будь-якому відрізку $[a, b] \in [a, \omega[$ може мати не більш ніж скінчену кількість нулів.*

Д о в е д е н н я. Припустимо супротивне, що існує нетривіальний розв'язок u рівняння (7.1), який на деякому відрізку $[a, b] \in [a, \omega[$ має нескінченну кількість нулів. Ця множина нулів є обмеженою і тому за теоремою Больцано-Вейерштрасса з неї можна вилучити збіжну до деякої точки $t_0 \in [a, b]$ послідовність $\{t_n\}$ нулів $u(t)$. Оскільки

$u(t)$, як розв'язок диференціального рівняння (7.1), є неперервною функцією на проміжку $[a, b]$ і $u(t_n) = 0$ $(n = 1, 2, \dots, n)$, то згідно з означенням неперервності функції u у точці t_0 будемо мати

$$u(t_0) = \lim_{t \to t_0} u(t) = \lim_{n \to +\infty} u(t_n) = 0.$$

Враховуючи тепер, що u, як розв'язок рівняння (7.1), є неперервно диференційовною функцією на відрізку $[a, b]$ і $u(t_0) = 0$, то на підставі означення похідної, отримуємо, що

$$u'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{0 - 0}{t_n - t_0} = 0.$$

Таким чином, розглядаємий розв'язок u рівняння (7.1) задовольняє умови

$$u(t_0) = u'(t_0) = 0.$$

Однак, згідно з теоремою існування і єдиності розв'язку задачі Коші ці умови може задовольняти тільки тривіальний розв'язок рівняння (7.1), але це суперечить припущенню, що розглядаємий розв'язок $u(t)$ є нетривіальним. Отримане протерічя свідчить про справедливість твердження леми.

Зауваження 7.1. *З означення 7.1 і доведеної леми безпосередньо випливає, що: 1) кожний нетривіальний коливний розв'язок рівняння (7.1) має нескінчену кількість нулів у будь-якому лівому околі ω; 2) кожний неколивний розв'язок рівняння (7.1) має на проміжку $[a, \omega[$ не більш, ніж скінчену кількість нулів.*

Лема 7.2 (Штурма)**.** *Нехай функції $q, h : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ неперервні, рівняння (7.1) має нетривіальний розв'язок u такий, що*

$$u(t_1) = u(t_2) = 0, \quad \text{де} \quad a \le t_1 < t_2 < \omega, \tag{7.2}$$

і

$$h(t) \ge q(t) \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2. \tag{7.3}$$

Тоді для будь-якого розв'язку v диференціального рівняння

$$v'' + h(t)v = 0 \tag{7.4}$$

виконується одна з двох умов: або

$$v(t_1) = v(t_2) = 0; \tag{7.5}$$

або

$$\text{існує} \quad t_0 \in]t_1, t_2[\quad \text{таке, що} \quad v(t_0) = 0, \tag{7.6}$$

причому, якщо нерівність (7.3) є строгою хоча б в одній точці з проміжку $]t_1, t_2[$, то виконується умова (7.6).

Д о в е д е н н я . З урахуванням умов леми можемо вважати, не обмежуючи спільності, що t_1 і t_2 - послідовні нулі розв'язку $u(t)$ і $u(t) > 0$ при $t \in]t_1, t_2[$. Тоді згідно з нетривіальністю $u(t)$

$$u'(t_1) > 0, \quad u'(t_2) < 0. \tag{7.7}$$

Припустимо тепер, що твердження леми не є справедливим. У цьому випадку існує нетривіальний розв'язок v диференціального рівняння (7.4), який задовольняє умови

$$v(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]t_1, t_2[\quad \text{і або} \quad v(t_1) > 0,\ v(t_2) \geq 0, \quad \text{або} \quad v(t_2) > 0,\ v(t_1) \geq 0. \tag{7.8}$$

Для даних розв'язків диференціальних рівнянь (7.1) і (7.4) мають місце на проміжку $[a, \omega[$ тотожності

$$u''(t) + q(t)u(t) \equiv 0, \quad v''(t) + h(t)v(t) \equiv 0.$$

Помножаючи першу з них на $v(t)$, другу на $u(t)$ і потім віднімаючи з першої із отриманих тотожностей другу, знаходимо, що

$$(u'(t)v(t))' - (u(t)v'(t))' \equiv [h(t) - q(t)]u(t)v(t).$$

Інтегруючи цю тотожність на проміжку від t_1 до t_2, одержимо

$$u'(t_2)v(t_2) - u'(t_1)v(t_1) - u(t_2)v'(t_2) + u(t_1)v'(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt.$$

Оскільки $u(t_1) = u(t_2) = 0$, то ця рівність запишиться наступним чином

$$u'(t_2)v(t_2) - u'(t_2)v(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt. \tag{7.9}$$

Тут згідно з умовами (7.7) і (7.8) ліва частина від'ємна, а згідно з умов $u(t), v(t) > 0$ при $t \in]t_1, t_2[$ і (7.3)– права частина невід'ємна, чого бути не може. Отже, для будь-якого нетривіального розв'язку v диференціального рівняння(7.4) виконується одна з умов або (7.5), або (7.6).

Припустимо тепер, що нерівність (7.3) є строгою в деякій точці $t_* \in]t_1, t_2[$. Тоді знайдеться окіл цієї точки $U(t_*) \in]t_1, t_2[$ такий, що

$$h(t) > q(t) \quad \text{при} \quad t \in U(t_*). \tag{7.10}$$

Покажемо, що у цьому випадку для будь-якого нетривіального розв'язку $v(t)$ диференціального рівняння (7.4) виконується умова (7.6). Припустимо супротивне. Тоді знайдеться розв'язок $v(t)$ даного рівняння, додатний на інтервалі $]t_1, t_2[$, такий, що виконуються умови(7.5). В цьому випадку з (7.9) випливає, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt = 0.$$

Однак, цього бути не може, оскільки в силу нерівності (7.10) і умов $u(t) > 0,\ v(t) > 0$ при $t \in]t_1, t_2[$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt = \int\limits_{U(t_*)} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt + \int\limits_{[t_1,t_2[\setminus U(t_*)} [h(t) - q(t)]u(t)v(t)\,dt > 0.$$

Отже, отримано протиріччя Тому для будь-якого розв'язку v диференціального рівняння (7.4) виконується умова (7.6). Лему повністю доведено.

Лема 7.3 (про відокремлення нулів). *Між двома послідовними нулями нетривіального розв'язку рівняння* (7.1) *є один і тільки один нуль будь-якого лінійно незалежного з ним розв'язку цього рівняння.* (тобто. нулі двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (7.1) взаємно відокремлюють один одного).

Д о в е д е н н я . Нехай u_1 – нетривіальний розв'язок уравнения (7.1) і t_1, t_2 ($\alpha \leq t_1 < t_2 < \omega$) – послідовні нулі цього розв'язку, тобто $u_1(t_1) = u_1(t_2) = 0$ і $u_1(t) \neq 0$ при $t \in]t_1, t_2[$. Застосуємо до рівняння (7.1) лему Штурма, порівнюючи його з самим собою. Згідно з лемою Штурма для будь-якого лінійно незалежного з u_1 розв'язку u_2 рівняння (7.1) виконується одна з двох умов: або

$$u_2(t_1) = u_2(t_2) = 0 \tag{7.11}$$

або

$$\text{існує} \quad t_0 \in]t_1, t_2[\quad \text{таке, що} \quad u_2(t_0) = 0. \tag{7.12}$$

Покажемо, що перша можливість не може мати місця. Дійсно, якщо б виконувалась умова (7.11), то для вронскіана розв'язків u_1 і u_2, підрахованого, наприклад, у точці t_1, будемо мати

$$W(u_1, u_2)(t_1) = \begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) \\ u_1'(t_1) & u_2'(t_1) \end{vmatrix} = u_1(t_1)u_2'(t_1) - u_2(t_1)u_1'(t_1) = 0$$

(оскільки $u_1(t_1) = u_2(t_2) = 0$), що, очевидно, суперечить лінійній незалежності розв'язків u_1 і u_2 на проміжку $[a, \omega[$. Отже, для розв'язку u_2 справджується умова (7.12) Залишається лише довести, що на інтервалі $]t_1, t_2[$ розв'язок u_2 нулів, відмінних від t_0, не має. Припустимо супротивне, тобто, що існують принаймні два нулі розв'язку u_2 на інтервалі $]t_1, t_2[$. Тоді згідно вже доведеному між ними знайдеться хоча б один нуль розв'язку u_1, який є лінійно незалежними з u_2. Однак, це суперечить припущенню про те, що t_1 і t_2 – послідовні нулі розв'язку u_1. Лему повністю доведено.

Зауваження 7.2. *Оскільки для будь-яких лінійно залежних нетривіальних розв'язків u_1 і u_2 рівняння (7.1) існує стала $c \neq 0$ така, що $u_2(t) = cu_1(t)$ при $t \in [\alpha, \omega[$, то нулі таких розв'язків співпадають.*

З доведеної леми і попереднього зауваження безпосередньо випливає

Наслідок 7.1. *1. Якщо рівняння* (7.1) *має принаймні один коливний нетривіальний розв'язок, то і всі решта його розв'язків також є коливними. 2. Якщо рівняння* (7.1) *має хоча б один неколивний розв'язок, то і всі решта його нетривіальних розв'язків є неколивними.*

Цей висновок дозволяє терміни "коливність"і "неколивність "перенести з розв'язків на рівняння (7.1).

Означення 7.2. *Рівняння (7.1) називається коливним (неколивним), якщо воно має принаймні один нетривіальний коливний (відповідно неколивний) розв'язок. При цьому неколивне рівняння (7.1), кожний нетривіальний розв'язок якого має не більше одного нуля на проміжку $[a, \omega[$, називається рівнянням без спряжених точок на $[a, \omega[$.*

ПРИКЛАДИ 7.1. Найпростішими серед двочлених рівнянь є рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u'' - a^2 u = 0, \quad u'' + a^2 u = 0 \ (a \neq 0), \quad u'' = 0. \tag{7.13}$$

Вони мають (відповідно) наступні загальні розв'язки:

$$u(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} \quad u(t) = C_1 \sin(at) + C_2 \cos(at); \quad u(t) = C_1 + C_2 t,$$

де C_1, C_2 – довільні дійсні сталі. Тут перше і третте рівняння є неколивними, причому рівняннями без спряжених точок, а друге рівняння є коливними.

7.2 Деякі ознаки коливності та неколивності лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо два рівняння

$$u'' + q_1(t)u = 0 \tag{7.1_1}$$

і

$$u'' + q_2(t)u = 0, \tag{7.1_2}$$

в яких функції q_i $(i = 1, 2)$, неперервні на проміжку $I = [a, \omega[$ $(\omega \leq +\infty)$ і задовольняють нерівність

$$q_1(t) \leq q_2(t) \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \tag{7.14}$$

При виконанні цієї умови рівняння (7.1_2) називається мажорантою Штурма для (7.1_1) на I, а рівняння (7.1_1) – мінорантою Штурма для (7.1_2) на I. Якщо ж поряд з (7.14) хоча б в одній точці з проміжку $[a, \omega[$ виконуються нерівністі $q_1(t) < q_2(t)$ і $q_2(t) \neq 0$, то рівняння (7.1_2) називається строгою мажорантою Штурма для рівняння (7.1_1) на I.

Теорема 7.1 (порівняння Штурма, 1836р)**.** 1. *Якщо рівняння* (7.1_1) *є коливним, то мажоранта Штурма для цього рівняння також є коливним рівнянням.* 2 . *Якщо рівняння* (7.1_2) *є неколивним, то міноранта Штурма для цього рівняння також є неколивним рівнянням.* 3 . *Якщо рівняння* (7.1_2) *є мажорантою Штурма для рівняння* (7.1_1) *на проміжку* $]a, \omega[$ *і має розв'язок, відмінний від нуля при* $a < t < \omega$, *то рівняння* (7.1_1) *є рівнянням без спряжених точок на проміжку* $[a, \omega[$.

Д о в е д е н н я. 1. Припустимо спочатку, що рівняння (7.1_1) є коливним. Тоді коливними є всі його нетривіальні розв'язки. Нехай u – будь-який з цих розв'язків і $\{t_k\}$ – зростаюча послідовність його нулів, що збігається до ω. Оскільки виконується нерівність (7.14), то при будь-якому фіксованому значенні $k \in \mathbf{N}$ для кожного розв'язку v рівняння (7.1_2) згідно з лемою Штурма справджується одна з умов: або $v(t_k) = v(t_{k+1}) = 0$, або існує $\tau_k \in]t_k, t_{k+1}[$ таке, що $v(\tau_k) = 0$, тобто цей розв'язок рівняння (7.1_2) на кажному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$ ($k \in \mathbf{N}$) має принаймні один нуль. Отже, розв'язок v рівняння (7.1_2) також є коливним. А тому коливними буде і саме рівняння (7.1_2) (мажоранта Штурма для рівняння (7.1_1)).

2. Нехай тепер рівняння (7.1_2) є неколивним. Покажемо, що у цьому випадку неколивним буде і мінoранта Штурма для рівняння (7.1_2). (тобто рівняння (7.1_1)). Припустимо супротивне, що рівняння (7.1_1) є коливним. Тоді згідно з вже доведеним рівняння (7.1_2) (мажоранта Штурма для рівняння (7.1_1)) також буде коливним, що суперечить припущенню про неколивність рівняння (7.1_2). Отримане протеріччя свідчить про справедливість другого твердження теореми. 3. Припустимо, нарешті, що рівняння (7.1_2) є мажорантою Штурма для рівняння (7.1_1) на проміжку $]a, \omega[$ і має розв'язок $u_0(t)$, відмінний від нуля при $a < t < \omega$. Доведемо, що у цьому випадку рівняння (7.1_1) є рівнянням без спряжених точок на проміжку $[a, \omega[$. Припустимо супротивне. Тоді існує розв'язок $u_0(t)$ рівняння (7.1_1), який має принаймні два нулі t_1 і t_2 на проміжку $[a, \omega[$, $a \leq t_1 < t^2 < \omega$. Тому згідно з лемою Штурма будь-який розв'язок рівняння (7.1_2) має хоча б один нуль на інтервалі $]t_1, t_2]$, чого не може бути для розв'язку $u_0(t)$. Отримано протеріччя і тому справедливим є третте твердження теореми. Теорему повністю доведено.

Найпростішими прикладами застосування тнореми порівняння Штурма є наступні

ПРИКЛАДИ 7.2.

1. Рівняння (7.1), в якому функція q неперервна на півосі $[a, +\infty[$ і задовольняє нерівність

$$q(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, +\infty[\tag{7.15}$$

є неколивним рівнянням без спряжених точок на $[a, +\infty[$.

2. Рівняння (7.1), в якому функція q неперервна на півосі $[a, +\infty[$ і задовольняє нерівність

$$q(t) \geq c > 0 \ (c - \text{дійсна стала}) \quad \text{при} \quad t \in [a, +\infty[\tag{7.16}$$

є коливним.

1. При виконанні нерівності (7.15) рівняння (7.1) порівнюємо з рівнянням

$$u'' = 0.$$

Це рівняння має фундаментальну сім'ю розв'язків $1, \ t$, які неколивні на $[a, +\infty[$, і тому є неколивним. Згідно з нерівністю (7.15) рівняння (7.1) є мінорантою Штурма для даного рівняння. Тоді на підставі другого твердження теореми порівняння Штурма мінорантне рівняння (7.1) також є неколивним. Більш того, на підставі третього твердження теореми порівняння Штурма це рівняння є рівнянням без спряжених точок на $[a, +\infty[$, оскільки мажоранта Штурма для даного рівняння має розв'язок $u_0(t) \equiv 1$.

2. При виконанні нерівності (7.16) рівняння (7.1) порівнюємо з рівнянням

$$u'' + cu = 0.$$

Це рівняння зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $\lambda^2 + c = 0$ має чисто уявні корені $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$ і тому воно має фундаментальну сім'ю розв'язків $\sin\sqrt{c}t, \ cos\sqrt{c}t$, які є коливними. Тоді і рівняння є коливним. В силу нерівності (7.16) рівняння (7.1) є мажорантою Штурма для даного рівняння. Тоді на підставі першого твердження теореми порівняння Штурма мажорантна Штурма (7.1) є коливним рівнянням.

У зв'язку з цими прикладами виникає природне питання: Чи може рівняння (7.1) бути неколивним у випадку коли $q(t) > 0$ при $t > 0$?

Відповідь на це питання містить наступна

Теорема 7.2 (Кнезера, 1893р)**.** *Нехай функція q неперервна на проміжку $[a, +\infty[$. Тоді:* 1) *якщо для деякого $t_0 \in [a, +\infty[$*

$$q(t) \leq \frac{1}{4t^2} \quad \textit{при} \quad t \geq t_0, \tag{7.17}$$

то рівняння (7.1) *є неколивним;* 2) *якщо для деяких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \in [a, +\infty[$*

$$q(t) \geq \frac{\frac{1}{4} + \varepsilon}{t^2} \quad \textit{при} \quad t \geq t_0, \tag{7.18}$$

то рівняння (7.1) *є коливним.*

Д о в е д е н н я . Скористаємося теоремою порівняння Штурма, порівнюючи рівняння (7.1) з рівнянням Ейлера

$$v'' + \frac{\mu}{t^2} v = 0, \tag{7.19}$$

яке інтегрується шляхом застосування заміни незалежної змінної $\tau = \ln t$

При $\mu = \frac{1}{4}$ рівняння (7.19) має загальний розв'язок виду

$$u(t) = t^{\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \ln t),$$

де c_1, c_2– довільні дійсні сталі, і тому є неколивним. Рівняння (7.1) буде мінорантою Штурма на проміжку $[t_0, +\infty[$ для цього рівняння при умові (7.17). Тому при виконані цієї умови рівняння (7.1) згідно з другим твердженням теореми порівняння Штурма буде неколивним.

При $\mu = \frac{1}{4} + \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, загальний розв'язок диференціального рівняння (7.19) має вид

$$u((t) = t^{\frac{1}{2}}(c_1 \sin \sqrt{\varepsilon} t + c_2 \cos \sqrt{\varepsilon} t),$$

де c_1, c_2– довільні дійсні сталі, і тому воно є коливним. Якщо для деякого $t_0 \geq a$ виконується нерівність (7.18), то рівняння (7.1) буде мажорантою Штурма на проміжку $[t_0, +\infty[$ для цього рівняння і тому згідно з першим твердженям теореми порівняння Штурма диференціальне рівняння (7.1) також буде коливним. Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ 7.3. Дослідити на коливність та неколивність рівняння:

a) $u'' + tu = 0$, *b*) $u'' + t^{-\frac{5}{2}} u = 0$.

Для першого рівняння маємо

$$\frac{t}{\frac{1}{t^2}} = t^3 \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

і тому для будь- якого $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке що

$$\frac{t}{\frac{1}{t^2}} \geq \frac{1}{4} + \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geq t_0,$$

тобто
$$t \geq \frac{\frac{1}{4}+\varepsilon}{t^2} \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$
Тоді згідно з другим твердженням теореми Кнезера рівняння є коливним.

Для другого рівняння
$$\frac{t^{-\frac{5}{2}}}{\frac{1}{t^2}} = t^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty.$$
Тому існує $t_0 > 0$ таке, що
$$\frac{t^{-\frac{5}{2}}}{\frac{1}{t^2}} \leq \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad t \geq t_0,$$
тобто
$$t^{-\frac{5}{2}} \leq \frac{1}{4t^2} \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$
Звідси з урахуванням першого твердження теореми Кнезера, випливає, що рівняння b) є неколивним.

Далі, наведемо деякі ознаки неколивних диференціальних рівнянь без спряжених точок.

Теорема 7.3 (критерій Бохера рівняння без спряжених точок, 1900р)**.** . *Для того, щоб рівняння (7.1) було рівнянням без спряжених точок на проміжку* $[a,\omega[$ *необхідно і достатньо, щоб існувала неперервно диференційовна функція* r *на проміжку* $]a,\omega[$ *така, що*
$$r'(t)+q(t)+r^2(t) \leq 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[. \tag{7.20}$$

Д о в е д е н н я .*Необхідність.* Нехай рівняння (7.1) є рівнянням без спряжених точок на проміжку $[a,\omega[$ і $u_0(t)$ його розв'язок, що задовольняє початкові умови $u(a) = 0$, $u'(a) = 1$. Тоді $u_0(t) > 0$ при $t \in]a,\omega[$. У цьому випадку функція $r(t) = \frac{u_0'(t)}{u_0(t)}$ задовольняє відповідному до (7.1) рівнянню Ріккаті
$$r' + q(t) + r^2 = 0 \tag{7.21}$$
при $t \in]a,\omega[$, а тому і нерівність (7.20).

Достатність. Припустимо, що існує неперервно диференційовна на інтервалі $]a,\omega[$ функція $r(t)$, яка задовольняє нерівність (7.20). Позначимо через $q_0(t) \leq 0$ ліву частину (7.20) при $t \in [a,\omega[$ Тому $r(t)$ задовольняє рівнянню Ріккаті
$$r' + [q(t) - q_0(t)] + r^2 = 0,$$
яке є відповідним для диференціального рівняння другого порядку
$$u'' + [q(t) - q_0(t)]u = 0. \tag{7.22}$$
Це рівняння згідно з умовою $q_0(t) \leq 0$ є мажорантою Штурма для рівняння (7.1) при $a < t < \omega$ і має додатний при $a < t < \omega$ розв'язок
$$u(t) = e^{\int\limits_c^t r(s)\,ds}, \quad \text{де} \quad a < c < \omega$$

і тому на підставі третього твердження теореми порівняння Штурма є рівнянням без спряжених точок на проміжку $[a,\omega[$.

Наслідок 7.2 (теорема Хартмана, 1951р.)**.** *Нехай в диференціальному рівнянні (7.1) функція q неперервна на проміжку $[a,\omega[$ і Q – будь-яка неперервно диференційовна на $[a,\omega[$ функція, для якої*

$$Q'(t) = -q(t) \quad \textit{при} \quad t \in [a,\omega[. \tag{7.23}$$

Тоді, якщо диференціальне рівняння

$$u'' + 4Q^2(t)u = 0 \tag{7.24}$$

є рівнянням без спряжених точок, то рівняння (7.1) також є рівнянням без спряжених точок.

Д о в е д е н н я . Оскільки рівняння (7.24) є рівнянням без спряжених точок, то згідно з критерієм Бохера існує неперервно диференційовна на проміжку $]a,\omega[$ функція $r(t)$ така, що

$$r'(t) + 4Q^2(t) + r^2(t) \le 0 \quad \text{при} \quad a < t < \omega.$$

Тоді для функції

$$\varrho(t) = Q(t) + \frac{r(t)}{2}$$

будемо мати

$$2\varrho'(t) + 2q(t) + 4Q^2(t) + \varrho^2(t) - 4Q(t)\varrho(t) + 4Q^2(t) \le 0,$$

або

$$\varrho'(t) + Q(t) = \varrho^2(t) + \varrho^2(t) - 2Q(t)\varrho(t) + 4Q^2(t) \le 0,$$

або

$$\varrho'(t) + q(t) = \varrho^2(t) + (\varrho(t) - 2Q(t))^2 \le 0.$$

Звідси випливає, що

$$\varrho'(t) + q(t) + \varrho^2(t) \le 0 \quad \text{при} \quad a < t < \omega, \tag{7.25}$$

тобто існує неперервно диференційовна на проміжку $]a,\omega[$ функція ϱ, для якої виконується нерівність (7.25). А тоді згідно з критерієм Бохера рівняння (7.1) є рівнянням без спряжених точок на проміжку $[a,\omega[$

Наслідок 7.3. *Якщо функція q неперервна на проміжку $[a,+\infty[$ і*

$$\left| \int\limits_a^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau \right| < +\infty, \tag{7.26}$$

то рівняння (7.1) є неколивним.

Д о в е д е н н я . Покладемо

$$r(t) = \frac{\left[2\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau + 1\right]}{2t}.$$

Тоді будемо мати

$$r'(t) + q(t) + r^2(t) = -q(t) - \frac{\left[2\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau + 1\right]}{2t^2} + q(t) + \frac{\left[2\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau + 1\right]^2}{4t^2} =$$

$$= \frac{\left[2\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau + 1\right]}{2t^2}\left[-1 + \frac{\left[2\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau + 1\right]}{2t^2}\right].$$

Тут згідно з умовою (7.26)

$$\int\limits_t^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

і тому у правій частині отриманій рівності перший множник є додатним при великих значеннях t, а другий прямує до -1 при $t \longrightarrow +\infty$, тобто є від'ємним при великих значеннях t. Таким чином, існує достатньо велике значення $t_0 \geq a$, таке, що для обраної функції r виконується нерівність

$$r'(t) + q(t) + r^2(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad t > t_0.$$

Тоді на підставі критерія Бохера рівняння (7.1) є рівнянням без спряжених точок на проміжку $[t_0, +\infty[$, а тому і неколивним на проміжку $[a, +\infty[$.

Доповнюючи результат цього наслідку, М. Зламал у 1950 році довів, що у випадку, коли

$$\int\limits_a^{+\infty} s^\sigma q(s)\, ds = +\infty \quad \text{при деякій сталій} \quad \sigma < 1,$$

рівняння (7.1) є коливним.

Зауваження 7.3. *Звернемо увагу на те, що умови на функцію q в попередніх двох наслідках і в результаті Зламала не передбачають (як, наприклад, у теоремі Кнезера), що вона зберігає знак в деякому околі $+\infty$. Зокрема, вони можуть застосовуватья для рівнянь виду*

$$u'' + \alpha\frac{\sin \mu t}{t^\beta}u = 0, \quad u'' + \frac{\gamma + \cos \mu t}{t^\beta}u = 0.$$

Далі, відзначимо, що аналог теореми порівняння Штурма має місце і для найбільш загального виду рівнянь самоспряженого виду

$$(p_1(t)u)' + q_1(t)u = 0, \tag{7.1$_1^*$}$$

$$(p_2(t)u)' + q_2(t)u = 0, \tag{7.1$_2^*$}$$

в яких функції $p_i\,, q_i$ $(i = 1,2)$ неперервні на проміжку $I = [a,\omega[$ і задовольняють нерівності

$$p_1(t) \geq p_2(t) > 0, \quad q_2(t) \geq q_1(t) \quad \text{при} \quad t \in I. \tag{7.27}$$

При виконані цих умов рівняння (7.1_2^*) називається мажорантою Штурма для рівняння (7.1_1^*) на I, а рівняння (7.1_1^*) – мінорантою Штурма для рівняння (7.1_2^*) на I. Якщо додатково до (7.27) у деякій точці $t \in]a,\omega[$ виконуються нерівності

$$p_1(t) > p_2(t) > 0, \quad q_2(t) > q_1(t) \quad \text{і} \quad q_2(t) \neq 0,$$

то рівняння (7.1_2^*) називається строгою мажорантою Штурма для рівняння (7.1_1^*) на I.

Теорема 7.1 залишається справедливою при заміні в ній (7.1_1) і (7.1_2) на відповідно (7.1_1^*) і (7.1_2^*). При доведенні допоміжного твердження (аналога леми Штурма) тут використовується відома тотожність Піконе

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{u(t)}{v(t)}\left(p_1(t)u'(t)v(t) - p_2(t)u(t)v'(t)\right)\right] = (q_2(t) - q_1(t))u^2(t) +$$

$$+ (p_1(t) - p_2(t))u'^2(t) + p_2(t)\left(u'(t) - \frac{u(t)v'(t)}{v(t)}\right)^2,$$

де $u(t)$ і $v(t)$ – розв'язки рівнянь (7.1_1^*) і (7.1_2^*) (відповідно).

Особливо також треба відзначити результати М. Раба, які з використанням перетворень Боля і Ріккаті були отримані для рівняння самоспряженого виду

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0, \tag{7.1*}$$

де функції $p,\, q$ неперервні на проміжку $I = [a, +\infty[$ і $p(t) > 0$ при $t \in I$.

Наведемо найбільш вагомий серед них.

Теорема 7.4 (критерій коливності М.Раба, 1959 р.)**.** *Для того, щоб рівняння* (7.1^*) *було коливним необхідно і достатньо, щоб існувала неперервно диференційовна на* I *функція* $g(t)$, $g(t) > 0$ *при* $t \in I$ *така, що*

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \left\{ \frac{1}{p(x)} \exp\left(2\int\limits_{t_0}^{x} \frac{1}{p(s)g^2(s)} \int\limits_{t_0}^{s} \left[q(\tau)g^2(\tau) - p(\tau)g'^2(\tau)\right] d\tau - c \right) ds \right\} dx = +\infty \tag{7.28}$$

для будь-якої сталої c.

Звідси при $p(t) \equiv 1$ одержуємо критерій коливності рівіняння (7.1).

З критерія М.Раба за рахунок вибору будь-якої неперервно диференційовної і додатної на проміжку I функції g можна отримати безліч достатніх умов коливності рівнянь (7.1) і (7.1^*).

7.3 Властивості нулів і екстремумів розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Теорема 7.5 (про оцінку відстані між послідовними нулями нетривіального розв'язку)**.** *Нехай проміжок* $[\alpha, \beta] \subset [a, \omega[$ *такий, що*

$$0 < m \leq q(t) \leq M \quad \text{при} \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{7.29}$$

де m, M *– дійсні сталі. Тоді відстань* ρ *між двома послідовними нулями з проміжку* $[\alpha, \beta]$ *будь-якого нетривіального розв'язку рівняння (7.1) задовольняє оцінки*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \tag{7.30}$$

Д о в е д е н н я . Порівняємо спочатку рівняння (7.1) з рівнянням $v'' + Mv = 0$, що має розв'язки

$$v(t) = c_1 \sin \sqrt{M}t + c_2 \cos \sqrt{M}t = d_1 \sin \sqrt{M}(t + d_2), \tag{7.31}$$

де c_i, d_i –довільні сталі. Нехай t_0, t_1 – послідовні нулі нетривіального розв'язку $u(t)$ диференціального рівняння (7.1). Покладаючи в (7.31) $d_2 = -t_0$, будемо мати $v(t_0) = 0$. Оскільки $q(t) \leq M$ при $t_0 < t < t_1$, то з леми Штурма випливає, що наступний нуль t_2 розв'язку $v(t) = d_1\sqrt{M}(t - t_0)$ знаходиться на проміжку $]t_0, t_1]$. Крім того, він визначається наступним чином: $t_2 = t_0 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Тоиу $t_1 - t_0 \geq t_2 - t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$, тобто виконується ліва частина нерівності (7.30).

Тепер порівняємо рівняння (7.1) з рівнянням $z'' + mz = 0$, яке має розв'язки

$$z(t) = c_1 \sin \sqrt{m}t + c_2 \cos \sqrt{m}t = d_3 \sin \sqrt{m}(t + d_4),$$

Обираючи тут $d_4 = -t_0$, отримуємо розв'язок $z(t) = d_3 \sin \sqrt{m}(t - t_0)$, сусідні нулі якого t_0 і $t_3 = t_0 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Оскільки $q(t) \geq m$ при $t_0 < t < t_3$, то згідно з лемою Штурма, нуль t_1 розв'язку $u(t)$ рівняння (7.1) розташований на проміжку $]t_0, t_3]$, тобто $t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ Отже, має місце права частина нерівності (7.30)

Наслідок 7.4. *1. Нехай функція* q *неперервна на проміжку* $[a, +\infty[$ *і існує* $T \geq a$ *таке,*

$$q(t) > 0 \quad \text{і неспадна на проміжку} \quad [T, +\infty[.$$

Тоді для послідовних нулів $t_1, t_2, \ldots$ *будь-якого нетривільного розв'язку рівняння (7.1) відстань між сусідніми нулями не зростає при* $t \to +\infty$, *тобто* $t_{n+1} - t_n \leq t_n - t_{n-1}$ *при* $n \geq n_0$, *причому*

$$\lim_{n\to+\infty} [t_{n+1} - t_n] = 0 \quad \text{у випадку, коли} \quad \lim_{t\to+\infty} q(t) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} [t_{n+1} - t_n] = \frac{\pi}{\sqrt{c}} \quad \text{у випадку, коли} \quad \lim_{t\to+\infty} q(t) = c = \text{const}.$$

2. Нехай функція q *неперервна на проміжку* $[a, +\infty[$, *існує* $T \geq a$ *таке,*

$$q(t) > 0 \quad \text{і незростаюча на проміжку} \quad [T, +\infty[$$

і рівняння (7.1) є коливним. Тоді для послідовних нулів $t_1, t_2, \ldots$ *будь-якого нетривільного розв'язку рівняння (7.1) відстань між сусідніми нулями не спадає при* $t \to +\infty$, *тобто* $t_{n+1} - t_n \geq t_n - t_{n-1}$ *при* $n \geq n_0$, *причому*

$$\lim_{n \to +\infty} [t_{n+1} - t_n] = +\infty \quad \textit{у випадку, коли} \quad \lim_{t \to +\infty} q(t) = 0,$$

$$\lim_{n \to +\infty} [t_{n+1} - t_n] = \frac{\pi}{\sqrt{c}} \quad \textit{у випадку, коли} \quad \lim_{t \to +\infty} q(t) = c = \mathrm{const} > 0.$$

3. Нехай функція q *неперервна на проміжку* $[a, +\infty[$ *і існує* $T \geq a$ *таке, що* $q(t) > 0$ *при* $t \geq T$, *причому*

$$\textit{або} \quad \lim_{t \to +\infty} q(t) = +\infty, \quad \textit{або} \quad \lim_{t \to +\infty} q(t) = 0.$$

Нехай, крім того, для будь-яких додатних сталих k *і* τ *існує таке значення* $T_0 \geq T$, *що при*

$$t \geq T_0 \quad \textit{і} \quad 0 \leq h \leq \frac{k}{\sqrt{q(t)}} \tag{7.32}$$

виконується нерівність

$$\left| \frac{q(t \pm h)}{q(t)} - 1 \right| < \tau. \tag{7.33}$$

Тоді будь-який нетривіальний розв'язок u *рівняння (7.1) має нескінчену кількість нулів* $t_1, t_2, \ldots$ *і кожному значенню* τ, $0 < \tau < 1$ *відповідає такий індекс* n_0 , *що при* $n > n_0$ *мають місце оцінки*

$$\frac{\pi}{\sqrt{q(t_n)}(1 + \tau)} < t_{n+1} - t_n < \frac{\pi}{\sqrt{q(t_n)}(1 - \tau)},$$

зокрема, для відстані між послідовними нулями розв'язку u *маємо*

$$\lim_{n \to +\infty} [t_{n+1} - t_n] = 0 \quad \textit{у випадку, коли} \quad \lim_{n \to +\infty} q(t) = +\infty$$

і

$$\lim_{n \to +\infty} [t_{n+1} - t_n] = +\infty \quad \textit{у випадку, коли} \quad \lim_{n \to +\infty} q(t) = 0.$$

Д о в е д е н н я першого твердження. Окільки функція q неспадна на проміжку $[T, +\infty[$, то при $t_{n-1} \geq T$

$$q(t_{n-1}) \leq q(t) \leq q(t_n) \quad \text{при} \quad t \in [t_{n-1}, t_n],$$

$$q(t_n) \leq q(t) \leq q(t_{n+1}) \qquad \text{при} \quad t \in [t_n, t_{n+1}],$$

Тоді згідно з теоремою 7.5

$$\frac{\pi}{\sqrt{q(t_n)}} \leq t_n - t_{n-1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{q(t_{n-1})}}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{q(t_{n+1})}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{q(t_n)}},$$

звідки безпосередньо випливає справедливість першого твердження наслідку. Друге твердження доводиться аналогічно. Доведення третього твердження можна знайти в [Дж. Сансоне,т. 2] (Розд 7, §4, стор. 49).

Зауваження 7.4. *Відзначимо, що умова (7.33) виконується, наприклад, для функції* $q(t) = ct^{\gamma}$ *при* $t > 0$, $c > 0$ *і* $\gamma > -2$ *(коли рівняння (7.1) є коливним згілно з теоремою Кнезера). Дійсно, для цієї функції*

$$\left|\frac{q(t \pm h)}{q(t)} - 1\right| = \left|\left(1 \pm \frac{h}{t}\right)^{\gamma} - 1\right| = \frac{h}{t}\gamma\left(1 \pm \theta\frac{h}{t}\right)^{\gamma-1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Однак, при $0 \le h \le \frac{k}{\sqrt{c}t^{\frac{\gamma}{2}}}$ *маємо*

$$\frac{h}{t} < \frac{k}{\sqrt{c}t^{\frac{\gamma}{2}+1}} \quad \text{і тому} \quad \frac{h}{t} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty,$$

оскільки множник $\gamma\left(1 \pm \theta\frac{h}{t}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$ *обмежений.*

В наступній теоремі у випадку, коли функція q неперервна на проміжку $[a, +\infty[$ і рівняння (7.1) є коливним, будемо для будь-якого його нетривіального розв'язку u позначати через $t_0, t_2, \ldots, t_{2k}, \ldots$ – послідовність його нулів на деякому проміжку $[T, +\infty[$, а через $t_1, t_3, \ldots,\ t_{2_{k+1}}, \ldots$ – послідовність точок його екстремумів, де t_1 – перша точка екстремума після нуля t_0, t_3 – перша точка екстремума після нуля t_2, і так далі, t_{2k+1} – перша точка екстремума після нуля t_{2k}, тобто для цих точок будемо мати

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{2k} < t_{2k+1} < \ldots.$$

При цьому треба зазначити, що послідовність $\{t_{2k}\}$ нулів $u(t)$ буде послідовністю екстремумів для $u'(t)$.

Теорема 7.6 (про поведінку екстремумів коливних розв'язків). 1 *([10], Розд.VII, §4, стор. 25–55]). Нехай функція* q *– неперервна на проміжку* $[a, +\infty[$ *і для деякого* $T \ge a$

$$q(t) > 0 \quad \text{і неспадна при} \quad t \ge T.$$

Тоді для будь-якого розв'язку u *диференціального рівняння (7.l)*

$$|u(t_{2k+1})| \le |u(t_{2k-1})|,\ k = 1, 2\ldots,$$

границі тобто послідовність максимумів $\{|u(t_{2k+1})|\}$ *є незростаючею і тому має скінчену границю, а послідовність максимумів* $\{|u'(t_{2k})|\}$ *є неспадною і тому має скінчену, або нескінчену границю. Більш того, у випадку, коли*

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = \alpha = \text{const} > 0 \tag{7.34}$$

обидві границі

$$\lim_{k\to+\infty} |u_{2k+1}| = l, \quad \lim_{k\to+\infty} |u'(t_{2k}| = l' \tag{7.35}$$

скінчені, відмінні від нуля і задовольняють рівність

$$l' = \sqrt{\alpha}l. \tag{7.36}$$

2 *([10], Розд.VII, §4, стор. 25–55]). Нехай функція* q *– неперервна на проміжку* $[a, +\infty[$ *і для деякого* $T \ge a$

$$q(t) > 0, \quad \text{незростаюча при} \quad t \ge T$$

і рівняння (7.1) є коливним. Тоді для будь-якого розв'язку u диференціального рівняння (7.l) послідовність максимумів $\{|u(t_{2k+1})|\}$ є неспадною і тому має скінчену, або нескінчену границю, а послідовність максимумів $\{|u'(t_{2k})|\}$ є незростаючею і тому має скінчену границю. Більш того, у випадку, коли виконується умова (7.34) обидві границі (7.35) скінчені, відмінні від нуля і задовольняють рівність (7.36). 3 *(А.Віман, 1936р.). Нехай функція q неперервна на проміжку $[a, +\infty[$ і існує $T \geq a$ таке, що $q(t) > 0$ при $t \geq T$, причому*

$$\text{або} \quad \lim_{t\to+\infty} q(t) = +\infty, \quad \text{або} \quad \lim_{t\to+\infty} q(t) = 0.$$

Нехай також q має неперервну похідну $q'(t)$, відмінну від нуля при $t \geq T$, і, крім того, для будь-яких додатних сталих k і τ існує $T_0 \geq T$, таке, що при

$$t \geq T_0 \quad i \quad 0 \leq h \leq \frac{k}{\sqrt{q(t)}} \tag{7.37}$$

виконуються одночастно нерівності

$$\left|\frac{q(t \pm h)}{q(t)} - 1\right| < \tau, \quad \left|\frac{q'(t \pm h)}{q(t)} - 1\right| < \tau. \tag{7.38}$$

Тоді для кожного нетривіального розв'язку диференціального рівняння (7.1) мають місце асимптотичні зображення

$$|y(t_{2n+1})| = |q(t_{2n+1})|^{-\frac{1}{4}+\alpha_n}, \quad |y'(t_{2n})| = |q(t_{2n})|^{\frac{1}{4}+\beta_n},$$

де $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – нескінчено малі числові послідовності.

Зауваження 7.5. *Умови (7.43) свідомо виконуються, наприклад, для функції $q(t) = ct^\gamma$ при $t > 0, c > 0$ і $\gamma > -1$ (див. заувження 7.4).*

Подамо без доведення ще один результат, який дає можливість оцінити відстань між послідовними нулями нетривіального розв'язку рівняння (7.1).

Теорема 7.7 (О. Ляпунов, 1896 р.). *Нехай функція q неперервна на проміжку $[a, b]$. Для того, щоб рівняння(7.1) мало нетривіальний розв'язок з двома нулями на $[a, b]$, необхідно, щоб виконувалась нерівність*

$$\int_a^b q^+(t)\,dt > \frac{4}{b-a},$$

де

$$q^+(t) = \max\{q(t); 0\}.$$

Наслідок 7.5 (про кількість нулів Ф. Хартмана і А. Уінтнера, 1949 р.). *Нехай функція q неперервна на проміжку $[0, +\infty]$, $u(t)$ – його нетривіальний розв'язок і N – кількість нулів цього розв'язку на проміжку $]0, T]$. Тоді*

$$N < \frac{1}{2}\left(T\int_0^T q^+(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} + 1. \tag{7.39}$$

Д о в е д е н н я . Нехай $N \geq 2$ і нетривіальний розв'язок $u(t)$ рівняння (7.1) має N нулів на проміжку $]0, T]$ у точках $(0 <) \, t_1 < t_2 < \ldots t_N \, (\leq T)$. Згідно з теоремою 7.7

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} q^+(t)\, dt > \frac{4}{t_{k+1} - t_k}, \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{7.40}$$

Оскільки середнє гармонічне $N-1$ додатних чисел не перевищує середнього арифметичного цих чисел, то

$$\left[\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \right]^{-1} \leq \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N-!} = \frac{t_N - t_1}{N-1},$$

і тому в силу (7.40)

$$\int\limits_{t_1}^{t_N} q^+(t)\, dt > \frac{4(N-1)^2}{t_N - t_1} \geq \frac{4(N-1)^2}{T},$$

звідки випливає нерівність (7.39).

Доповненням до наслідку 7.5 може бути наступний результат

Теорема 7.8 (А. Виман, 1917 р.)**.** *Нехай функція q додатна і неперервно диференційовна на проміжку $[0, T]$ при будь-якому $T > 0$ і задовольняє умову*

$$q'(t) = o\left(q^{\frac{3}{2}}(t) \right) \quad \textit{при} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Тоді, якщо $N(T)$ – кількість нулів на проміжку $]0, T]$ нетривіального розв'язку диференціального рівняння (7.1), то

$$N(T) \sim \int\limits_0^T q^{\frac{1}{2}}(t)\, dt \quad \textit{при} \quad T \longrightarrow +\infty.$$

ПРИКЛАДИ 7.4. Дослідити на коливність і неколивність рівняння:

$$1) \quad u'' + \frac{1}{\sqrt{t^5 + 1}} u = 0; \quad 2) \quad u'' + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 100}} u = 0.$$

У випадку, коли рівняння є неколивним, визначити чи є воно рівнянням без спряжених точок, а у випадку коли рівняння є коливним визначити поведінку нулів та екстремумів будь-якого його нетривіального розв'язку і отримати оцінку для кількості нулів цього розв'язку на проміжку $]0, 100]$.

1. Для першого рівняння маємо

$$\frac{q(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t^5+1}}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^5 + 1}} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

і тому згідно з теоремою Кнезера рівняння є неколивним. Далі, помічаємо, що

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} \tau q(\tau)\, d\tau\right| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^5+1}}\right| < +\infty.$$

Тоді на підставі наслідку 7.3 рівняння є рівнянням без спряжених точок.

2. Для другого рівняння

$$\frac{q(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+100}}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^3}{\sqrt{t^2+100}} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty$$

і тому згідно з теоремою Кнезера рівняння є коливним. Крім того,

$$q'(t) = \left(t(t^2+100)^{-\frac{1}{2}}\right)' = (t^2+100)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(t^2+100)^{-\frac{3}{2}}2t^2 = \frac{100}{(t^2+100)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

і

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2+100}} = 1,$$

тобто q зростає на півосі $[0,+\infty[$ і має скінчену границю, рівну 1 при $t \to +\infty$.. Тоді згідно з наслідку 7.4 і теореми 7.6 для кожного нетривіального розв'язку рівняння: а) відстань між його сусідніми нулями не зростає при $t \to +\infty$, тобто $t_{n+1} - t_n \geq t_n - t_{n-1}$ при $n \geq n_0$, причому

$$\lim_{n\to+\infty} [t_{n+1} - t_n] = \pi;$$

б) послідовність максимумів $\{|u(t_{2k+1})|\}$ є незростаючею, а послідовність максимумів $\{|u'(t_{2k})|\}$ є неспадною, де $\{t_{2k}\}$ ($\{t_{2k+1}\}$) – послідовність нулів u (відповідно послідовність точок екстремума), причому

$$\lim_{k+\infty} |u(t_{2k+1})| = \lim_{\to+\infty} |u'(t_{2k})| = \mathrm{const}\,.$$

Для оцінки кількості нулів на проміжку $]0,100]$ нетривіального розв'язку рівняння скористаємося наслідком 7.5. Будемо мати

$$N < \frac{1}{2}\left(T\int\limits_0^T q^+(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{2}\left(100\int\limits_0^{100} \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2+100}}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(200\sqrt{t^2+100}\Big|_0^{100}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\left(200(101-\sqrt{100})\right)^{\frac{1}{2}} + 1 < \frac{1}{2}\sqrt{200\cdot 91} + 1 = \sqrt{4550} + 1 < 67 + 1 = 68.$$

7.4 Властивості розв'язків неколивних лінійних однорідних диференціальних рівнянь

Тут поряд з рівнянням (7.1) буде розглядатися і рівняння більш загального самоспряженого виду

$$(p(t)u')' + q(t)u = 0 \qquad (7.1^*),$$

де функції p, q неперервні на проміжку $I = [a,\omega[$ ($\omega \leq +\infty$) і $p(t) > 0$ при $a \leq t < \omega$.

Теорема 7.9 (про головний та неголовні розв'язки, Ф.Хартман, А. Уінтнер, 1955р.). *Нехай диференціальне рівняння* (7.1*) *є неколивним. Тоді існує розв'язок* $u = u_0(t)$ *рівняння* (7.1*)*, однозначно визначений з точністю до сталого множника однією з наступних умов (в яких через* $u_1(t)$ *позначений довільний розв'язок, що є лінійно незалежним з* $u_0(t)$ *):*

(i) u_0, u_1 *такі, що*

$$\frac{u_0(t)}{u_1(t)} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega; \tag{7.41}$$

(ii) u_0, u_1 *такі, що*

$$\int\limits_{a_0}^{\omega} \frac{dt}{p(t)u_0^2(t)} = +\infty, \quad \int\limits_{a_0}^{\omega} \frac{dt}{p(t)u_1^2(t)} < +\infty \quad \textit{при деякому} \quad a_0 \in [a, \omega[; \tag{7.42}$$

(iii) якщо $T \in I$ *більше самого правого нуля функції* $u_0(t)$ *(якщо він існує) і* $u_1(T) \neq 0$*, то* $u_1(t)$ *має один нуль, або не має жодного нуля при* $T < t < \omega$ *в залежності від того, чи виконується умова*

$$\frac{u_1'(t)}{u_1(t)} < \frac{u_0'(t)}{u_0(t)}, \quad \textit{або умова} \quad \frac{u_1'(t)}{u_1(t)} > \frac{u_0'(t)}{u_0(t)} \tag{7.43}$$

при $t = T$*, зокрема, в деякому лівому околі* ω*.*