Определение. *Общим решением системы дифференциальных уравнений (1) на множестве* $G_0 \subset G$ *называется* n *- параметрическое семейство* n *функций*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \end{cases}$$

непрерывно дифференцируемых по переменной t *и непрерывных по переменным* $(C_1, \ldots, C_n)$ *на некотором множестве* $J_0 \times C$ *, где* J_0 *- связный промежуток в* $\mathbb{R}$ *и* $C \in \mathbb{R}^n$ *, если они удовлетворяют следующим двум условиям:*

1) при любом фиксированном наборе постоянных $(C_1^0, \ldots, C_n^0) \in C$ *они являются решением системы дифференциальных уравнений (1);*

2) при любом фиксированном наборе $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *система соотношений*

$$\begin{cases} x_1^0 = \varphi_1(t_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots \\ x_n^0 = \varphi_n(t_0, C_1, \ldots, C_n), \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно $C_1, \ldots, C_n$ *, т.е. однозначно определяет решение задачи Коши*

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{cases}$$

Определение 2. *Общим интегралом системы дифференциальных уравнений (1) на множестве* $G_0 \subset G$ *называется* n *- параметрическая система* n *соотношений*

$$\begin{cases} U_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots \\ U_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n, \end{cases}$$

где U_i $(i = 1 \ldots, n)$ *– непрерывно дифференцируемые на множестве* G_0 *функции, если выполняются следующие два условия:*

1) функции U_i $(i = 1, \ldots, n)$ *являются функционально независимыми интегралами системы дифференциальных уравнений (1);*

2) при любом фиксированном наборе постоянных $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G_0$ *система соотношений*

$$\begin{cases} U_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1^0, \\ \ldots \\ U_n(t, x_1, ldots, x_n) = C_n^0, \end{cases}$$

где $C_i^0 = U_i(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(i = 1 \ldots, n)$ *, однозначно определяет систему неявных функций* $x_1(t, C_1^0, \ldots, C_n^0), \ldots, x_n$ *заданных в некоторой окрестности* t_0 *и удовлетворяющих условиям*

$$\begin{cases} x_1(t_0, {}^0_1, \ldots, C_n^0) = x_1^0, \\ \ldots \\ x_n(t_0, C_1^0, \ldots, C_n^0) = x_n^0, \end{cases}$$

т.е. решение задачи Коши

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{cases}$$

Каждое из n соотношений в общем интеграле называется первым интегралом системы дифференциальных уравнений (1).

Знание одного первого интеграла

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = C$$

позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1) на единицу.

Система дифференциальных уравнений (1) не может иметь более n функционально независимых первых интегралов. Критерий функциональной независимости.

Каждое из соотношений в общем интеграле называют первым интегралом системы дифференциальных уравнений (1).

Из определений ясно, что общий интеграл является общим решением записанном в неявном виде

Определение 3. *Частным решением дифференциального уравнения (1) называется решение, которое получается из общего его решения (или общего интеграла) при частных значениях постоянных* $C_1, \ldots, C_n)$ *, включая, возможно, значения* $\pm\infty$ *.*

Замечание. В силу определений общего решения и общего интеграла они при фиксированных $C_1, \ldots, C_n$ однозначно определяют решение задачи Коши. Однако, согласно теореме Пеано задача Коши имеет по крайней мере одно решение. Поэтому такая задача может содержать и решения, которые не определяются из общего решения и общего интеграла.

Определение 4. *Особым решением системы дифференциальных уравнений (1) называется решение этой системы, которое не получается из общего решения или общего интеграла этой системы ни при каких частных значениях постоянных* $C_1, \ldots, C_n$ *.*

Для каждой точки $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ интегральной кривой особого решения задача Коши

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \qquad \cdots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Значит, система дифференциальных уравнений (1) не будет иметь особых решений, если множество G состоит из точек, для которых соответствующая ей задача Коши имеет только одно решение.

Определение 5. *Задача Коши (1) – (2) имеет единственное решение, если любые ее два решения совпадают в некоторой окрестности точки* t_0 *.*

Существуют много различных признаков единственности решения задачи Коши. Укажем один из таких признаков условия которого являются легко проверяемыми. Он вытекает из известной **теоремы Осгуда**.

Теорема ($\exists$ и ! р. з. К) *Если в системе дифференциаальных уравнений (1) функции* f_i $(i = 1, \ldots, n)$ *непрерывны на множестве* G *(условия теоремы Пеано) и имеют на* G *непрерывные частные производные по фазовым переменным, то для любых* $(t_0, x_1^0), \ldots, x_n^0)$ *задача Коши (1), (2) имеет единственное решение, определенное в некоторой окрестности* t_0 *.*

Множество $G_0 \subset G$ назывется областью единственности задачи Коши, если для каждой точкки $(t_0, x_1^), \ldots, x_n^0) \in G_0$ задача коши (1), (2) имеет единственное решение.

Примеры.

Следовательно, если состоит из точе