Розділ 1

ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ ДВОМІРНИХ АВТОНОМНИХ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Фазові криві та фазові портрети

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = p_{21}x_1 + p_{22}x_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

зі сталими дійснимим коефіцієнтами p_{ij} (i,j=1,2), або записану у векторно-матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = Px, \quad \text{де} \quad P = \begin{pmatrix} p_{11}p_{12} \\ p_{21}p_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Ця система є автономною системою диференціальних рівнянь і кожний її розв'язок визначений на всій числовій вісі $\mathbf{R}$. Нехай $x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t)$ – дійсний розв'язок системи (1.1). Тоді рівняння

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

(параметричні рівняння) визначають криву на фазовій площині x_1, x_2, яка,згідно з означенням фазової кривої системи диференціальних рівнянь загального виду, носить назву фазової кривої, або фазової траєкторії системи диференціальних рівнянь (1.1). Картину, яку утворюють всі фазові криві цієї системи на фазовій площині називають *фазовим портретом системи диференціальних рівнянь (1.1).* Система диференціальних рівнянь

(1.1), очевидно, має тривіальний розв'язок

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) \equiv 0.$$

Ці параметричні рівняння визначають на фазовій площині x_1, x_2 фазову криву – точку $(0,0)$, яка є точкою спокою, або положенням рівноваги системи (1.1). Множина всіх точок спокою системи (1.1) співпадає з множиною всіх розв'язків алгебраїчної лінійної однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 = 0, \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 = 0, \end{cases} \text{або у векторно – матричній формі} \quad Px = 0. \quad (1.3)$$

У випадку, коли $detP \neq 0$, ця алгебраїчна система має єдиний розв'язок $(0,0)$.

Оскільки для будь-яких дійсних t_0, x_1^0, x_2^0 задача Коші

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0$$

для системи диференціальних рівнянь (1.1) має єдиний розв'язок, то на підставі теореми про фазові криві загальної автономної системи диференціальних рівнянь кожна фазова крива (фазова траєкторія) системи диференціальних рівнянь (1.1) є кривою одного з наступних трьох типів:

1) точка спокою (положення рівноваги);

2) замкнена гладка крива (цикл), яка відповідає періодичному розв'язку системи;

3) гладка крива без самоперетину.

Так як система лінійних однорідних диференціальних рівнянь (1.1) є системою зі сталими коефіцієнтами, то вона інтегрується і тому можемо знайти всі її фазові криві, тобто побудувати її фазовий портрет.

Вигляд цього фазового портрету на фазовій площині суттєво залежить від власних значень матриці P, тобто від коренів характеристичного рівняння

$$\det(P - \lambda E) = 0, \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Звідси знаходимо вид цього рівняння

$$\lambda^2 - (Sp\, P)\lambda + \det P = 0 \quad (1.5)$$

Коефіцієнти цього квадратного рівняння є дійсними числами.Тому воно має або два дійсних корення $\lambda_1,\ \lambda_2$, або два комплексно - спряжних корення λ_1 і $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. В залежності від типу цих коренів і їх властивостей отримаємо відповідний фазовий портрет системи диференціальних рівнянь (1.1).

1.2 Основний випадок (власні значення матриці P різні і відмінні від нуля)

Оскільки у даному випадку власні значення матриці P відмінні від нуля, то з (1.5) виплиаає, що $\det P \neq 0$. Тоді, як вже було вказано вище, система диференціальних рівнянь (1.1) має єдину точку спокою (положення рівноваги) $(0,0)$. Далі, спочатку розглянемо ситуацію, коли корені λ_1, λ_2 є дійсними і різними. У цій ситуації система диференціальних рівнянь (1.1) має фундаментальну сім'ю розв'язків

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1, \quad e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_2,$$

де $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – дійсні власні вектори матриці P, що відповідають власним значенням λ_1, λ_2. Тому кожний розв'язок

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

системи диференціальних рівнянь (1.1) має вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{e}_2. \tag{1.6}$$

де C_1, C_2 – дійсні сталі. Вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, що відповідають різними власним значенням λ_1, λ_2, утворюють базис на площині x_1, x_2. Нехай ξ_1, ξ_2 — координати вектора $x(t)$ у цьому базисі. Тоді згідно з (1.6)

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{1.7}$$

Ці рівняння є параметричними рівняннями кривої на площині ξ_1, ξ_2, яка є фазовою траекторією системи (1.1) на площині x_1, x_2. Фазовий портрет достатньо побудувати тільки в першому квадранті: $C_1 \geq 0, \quad C_2 \geq 0$, оскільки в силу (1.6) фазовий портрет симетричний відносно вісів координат ξ_1, ξ_2. При цьому виникає потреба окремого розгляду випадків, коли корені λ_1, λ_2 одного знаку і різних знаків.

I. Числа λ_1, λ_2 *одного знаку.*

A. $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$.

При $C_1 = C_2 = 0$ отримуємо точку спокою $(0,0)$. Якщо $C_1 > 0,\ C_2 = 0$, то фазова траєкторія вісь ξ_1, якщо $C_1 = 0,\ C_2 > 0$ – вісь ξ_2. Стрілки на малюнку вказають напрямок руху точки $x(t)$ зі зростанням t. Нехай $C_1 > 0,\ C_2 > 0$. Тоді

$$e^{\lambda_j t} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty, \qquad e^{\lambda_j t} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \longrightarrow -\infty \ (j = 1, 2)$$

Таким чином, фазова траєкторія – необмежена крива, що входить в початок координат (в точку спокою) при $t \longrightarrow +\infty$.

Якщо $\lambda_1 > \lambda_2$, то

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\xi_2}{\xi_1} = \lim_{t \to +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0,$$

звідки ясно що фазова траєкторія дотикається вісі ξ_1 у початку координат (і вісі ξ_2. якщо $\lambda_1 < \lambda_2$).

Крім того, з (1.7) маємо

$$\xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{C_2}{(C_1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \left(C_1 e^{\lambda_1 t}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

тобто отримуємо наступне рівняння фазової траєкторії

$$\xi_2 = C \xi_1^{\alpha}, \quad \text{де} \quad C > 0, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0, \tag{1.8}$$

звідки видно, що фазові траєкторії мають вид "парабол". Зображена на малюнку картина (і точка спокою $(0,0)$) називається *стійким вузлом* (стійким тому, що точка $x(t)$ прямує до точки спокою $(0,0)$ при $t \longrightarrow +\infty$).

B. $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$. У цьому випадку фазовий портрет такий самий, як і на малюнку, тільки всі стрілки спрямовані від початку координат. Така картина (і точка спокою $(0,0)$) називається *нестійким вузлом*

II. Числа λ_1, λ_2 *різних знаків* (сідло).

Нехай для визначеності $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0$. Якщо $C_1 = C_2 = 0$, то фазовою траєкторією є точка спокою $(0,0)$. При $C_1 = 0,\ C_2 > 0$ маємо $\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$, а при $C_1 > 0,\ C_2 = 0$ маємо $\xi_2 = 0, \quad \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$. Отримані чотири проміння (ще два проміння одержуємо при $C_1 = 0,\ C_2 < 0$ і при $C_2 = 0,\ C_1 < 0$) називають вусами сідла.

Якщо $C_1 > 0, \quad C_2 > 0$, то $\xi_1 \longrightarrow +\infty, \quad \xi_2 \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$ і рівняння траєкторії на площині ξ_1, ξ_2 має вигляд (1.8), в якому $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, тобто фазові траєкторії мають вид гіпербол (мал.). Таку картину (і точку спокою $(0,0)$) називають *сідлом.*

III. Числа λ_1, λ_2 різні, комплексно спряжені.

Покладемо $\lambda_1 = \lambda$. Тоді $\lambda_2 = \overline{\lambda}$. Нехай $\mathbf{e}$ – власний вектор матриці P, що відповідає власному значенню λ: $P\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$. Тоді $P\overline{\mathbf{e}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{e}}$, тобто, $\overline{\mathbf{e}}$ -власний вектор, що відповідає власному значенню $\overline{\lambda}$. Звідси ясно, що система диференціальних рівнянь (1.1) має комплексну фундаментальну сім'ю розв'язків

$$e^{\lambda t}\mathbf{e}, \quad e^{\overline{\lambda}t}\overline{\mathbf{e}}.$$

Дійсна та уявні частини цих векторів утворюють дійсну фундаментальну сім'ю розв'язків системи (1.1). Знайдемо ці дійсні і уявні частини. Покладемо

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \mathbf{e} = \mathbf{f_1} + i\mathbf{f_2},$$

де α, β – дійні числа ($\beta \neq 0$) і $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ – дійсні вектори. Тоді з використанням формули Ейлера одержимо

$$e^{\lambda t}\mathbf{e} = e^{\alpha t + i\beta t}(\mathbf{f_1} + i\mathbf{f_2}) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{f_1} + i\mathbf{f_2}) =$$
$$= \left(e^{\alpha t}\cos\beta t\,\mathbf{f_1} - e^{\alpha t}\sin\beta t\,\mathbf{f_2}\right) + i\left(e^{\alpha t}\cos\beta t\,\mathbf{f_2} + e^{\alpha t}\sin\beta t\,\mathbf{f_1}\right).$$

Звідси отримуємо наступну дійсну фундаментальну сім'ю розв'язків системи (1.1)

$$e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\,\mathbf{f_1} - \sin\beta t\,\mathbf{f_2}\right), \qquad e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\,\mathbf{f_2} + \sin\beta t\,\mathbf{f_1}\right).$$

Тому кожний дійсний розв'язок системи (1.1) має вид

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\,\mathbf{f_1} - \sin\beta t\,\mathbf{f_2}\right) + C_2 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\,\mathbf{f_2} + \sin\beta t\,\mathbf{f_1}\right),$$

де C_1, C_2 – дійсні сталі. Вектори $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ є лінійно незалежними (так як лінійно незалежними є вектори $\mathbf{e}$ і $\overline{\mathbf{e}}$) , і тому утворбюють базис на площині x_1, x_2. В цьому базисі вектор $x(t)$ має розклад

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t\right)\mathbf{f_1} + e^{\alpha t}\left(-C_1\sin\beta t + (C_2\cos\beta t\right)\mathbf{f_2} \quad (1.9)$$

Координатами ξ_1, ξ_2 вектора $x(t)$ у базисі $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ є

$$\xi_1 = e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t\right), \quad \xi_2 = e^{\alpha t}\left(-C_1\sin\beta t + (C_2\cos\beta t\right)$$

Якщо $C_1 = C_2 = 0$, то фазовою траекторією є точка спокою $(0,0)$ При $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ маємо

$$C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\ \cos\beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\beta t\right) =$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\sin(\beta t + \gamma),$$

$$-C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(-\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\beta t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\beta t\right) =$$

$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos(\beta t + \gamma), \quad \text{де} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{C_1}{C_2},$$

тобто

$$\xi_1 = \rho_0 e^{\alpha t}\sin(\beta t + \gamma), \qquad \xi_2 = \rho_0 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \gamma), \tag{1.10}$$

де $\rho_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

I. $\alpha = 0$ (корені чисто уявні $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$). У цьому випадку

$$\xi_1 = \rho_0 \sin(\beta t + \gamma), \qquad \xi_2 = \rho_0 \cos(\beta t + \gamma),$$

і тому

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho_0^2,$$

тобто фазовими кривими на площині x_1, x_2 є еліпси с центром у точці спокою. Напрямок обхіда еліпсів залежить від знаку β (на малюнку $\beta < 0$) Такий фазовий портрет (і точка спокою $(0,0)$) носить назву *центр.*

II. $\alpha \neq 0$: *Фокус.*

A. $\alpha < 0$: *Стійкий фокус.*

У даному випадку згідно з (1.10)

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho_0^2 e^{2\alpha t} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty,$$

тобто фазовими траєторіями э спіралі, які закручуються в початок координат. Напрямок закручування залежить від знаку β.

B. $\alpha > 0$: *Нестійкий фокус.*

Фазовий портрет системи такий же, як і у попередньому випадку, але при $t \longrightarrow +\infty$ точка уходить по спіралі на нескінченість

1.3 Особливі випадки

I. Корені кратні та відмінні від нуля. Нехай

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \text{де} \quad \lambda \neq 0.$$

У цьому випадку вигляд фазового портрету системи диференцыальних рівнянь (1.1) залежить від структури жорданової нормальної форми матриці P. В розглядаємому випадку жорданова номальна форма матриці P має один з двох наступних видів

$$\text{або} \quad G_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad G_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Більш того, для кожного $i \in \{1, 2\}$ існує невироджена дійсна матриця S така, що

$$G_i = S^{-1} P S.$$

Враховуючи це, застосуємо до системи диференціальних рівнянь (1.2) перетворення

$$x = Sy \tag{1.11}$$

В результаті отримаємо

$$S \frac{dy}{dt} = PSy,$$

звідки, помножаючи обидві частини зліва на S^{-1}, одержимо

$$\frac{dy}{dt} = S^{-1} PSy, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dt} = G_i y \quad (i \in \{1, 2\}. \tag{1.12}$$

A. i=1. *Дикритичний вузол.*

При $i = 1$ сиситема диференціальних рівнянь (1.12) в координатній формі має вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda y_2. \end{cases}$$

Обидва рівняння цієї системи не залежать один від одного і легко інтегруються. Маємо

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda t},$$

де C_1, C_2 – дійсні сталі. Тоді

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

і тому згідно з заміною(1.11)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тут вектори

$$\mathbf{e_1} = S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

є лінійно незалежними і тому отримане співвідношення є розкладом вектора $x(t)$ у базисі $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$. Координати вектора $x(t)$ в цьому базисі мають вид

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}. \tag{1.14}$$

Ці рівняння є параметричними рівняннями фазової траекторії $x(t)$ на фазовій площині (x_1, x_2).

При $C_1 = C_2 = 0$ фазова траекторія є точкою спокою $(0, 0)$. Якщо $C_2 > 0,\ C_1 = 0$, то відповідна фазова траекторія - вісь ξ_2. В решті випадків ($C_1 > 0, C_2 \geq 0$) в силу (1.14) $\xi_2 = C\xi_1$ $(C \geq 0)$ і тому фазові траекторії є промінями з початком в точці $(0, 0)$. Таким чином, фазовий портрет складається з усіх променів, що виходять з точки $(0, 0)$. При цьому, враховуючи те що $e^{\lambda t} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$, якщо $\lambda < 0$ і $e^{\lambda t} \longrightarrow +\infty$ при $t \longrightarrow +\infty$, приходимо до висновку, що точки на фазових таекторіяї зі зростанням t прямують в точку спокою при $\lambda < 0$ і до нескінченності при $\lambda > 0$.

У першому випадку ($\lambda < 0$)фазовий портрет (і точку спокою $(0, 0)$ називають *стійкий дикритичний вузол*, а у другому ($\lambda > 0$) – *нестійкий дикритичний вузол*

B. $i = 2$. *Вироджений вузол.*

При $i = 2$ система диференціальних рівнянь (1.12) в координатній формі має вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda y_2. \end{cases}$$

Інтегруючи її знизу уверх, одержимо

$$y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad y_1(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda t}.$$

Тоді

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідки з урахувнням заміни (1.11) одержуємо, що

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t} S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda t} S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо розклад вектора $x(t)$ у базисі (1.13). Координатами $x(t)$ у цьому базисі є

$$\xi_1 = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}. \tag{1.15}$$

При $C_1 = C_2 = 0$ фазовою кривою є точка спокою $(0, 0)$. При $C_2 = 0$ маємо

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad \xi_2 = 0,$$

тобто фазові криві розташовані на вісі ξ_1 і точки на них зі зростанням t рухаються до точки спокою $(0, 0)$ при $\lambda < 0$ і до нескінченності при $\lambda > 0$. Нехай тепер $C_2 \neq 0$. Тоді з (1.15) ясно, що фазова траекторія перетинає при $t = -\frac{C_1}{C_2}$ вісь ξ_2 у точці $\xi_2 = C_2 e^{-\lambda \frac{C_1}{C_2}}$ і кожна точка цієї траекторії зі зростанням t рухається до точки спокою $(0, 0)$ при $\lambda < 0$ і до нескінченності при $\lambda > 0$ Щоб бильш детально дослідити вигляд фазової траекторії треба з другого рівняння (1.14) визначити t через ξ_2 і потім з першого рівняння (1.15) визначити ξ_1 через ξ_2. будемо мати

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{C_2}, \qquad \xi_1 = \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{t}{C_2} \right) C_2 e^{\lambda t} = \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{1}{\lambda C_2} \ln \frac{\xi_2}{C_2} \right) \xi_2,$$

тобто маємо наступну явну залежність ξ_1 від ξ_2

$$\xi_1 = \left(C_1 + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\xi_2}{C_2} \right) \frac{\xi_2}{C_2}.$$

Дослідив цю функцію і побудував її графік,одержимо вид фазової траекторіі.

Отриманий фазовий портрет(і точка спокою $(0, 0)$) системи диференціальних рівнянь (1.1) при $\lambda < 0$ носить назву *стійкий вироджений вузол*, а при $\lambda > 0$ – *нестійкий вироджений вузол.*

II. $\det P = 0$. У цьому випадку система диференціальних рівнянь (1.1) має нескінченну кількість точок спокою і серед коренів характеристичного рівняння (1.5) матриці P існує хоча б один нульовий корінь.

A. *Випадок одного нульового кореня.* Нехай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda \neq 0$ і $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ – дійсні власні вектори матриці P, що відповідають цим кореням. Тоді система диференціальних рівнянь має фундаментальну сім'ю розв'язків

$$\mathbf{e_1}, \quad e^{\lambda t}\mathbf{e_2}$$

і кожний її розв'язок має вид

$$x(t) = C_1\mathbf{e_1} + C_2 e^{\lambda t}\mathbf{e_2}.$$

Це представлення є розкладом вектора $x(t)$ у базисі $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ і його координатами у цьому базисі є

$$\xi_1 = C_1, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda t}. \tag{1.16}$$

При фіксованих C_1, C_2 дані рівняння є параметричними рівняннями фазової траєкторії.З вигляду цих рівнянь ясно, шо фазові траєкторії є симитричними відносно вісів ξ_1 і ξ_2. При $C_2 = 0$, $C_1 > 0$ маємо

$$\xi_1 = C_1, \quad \xi_2 = 0,$$

тобто фазова траєкторія є точкою спокою $(C_1, 0)$. Таким чином, вісь ξ_1 повністю заповнена точками спокою. При $C_2 > 0, C_1 > 0$ фазова крива є промінем з початком в точці спокою $C_1, 0)$ і паралельним вісі ξ_2 Точки на цьому промені зі зростанням t прямують у точку спокою $(C_1, 0)$ при $\lambda < 0$ і у нескінченість при $\lambda > 0$.

B. *Випадок двох нульових коренів.*

У цьому випадку структура фазового портрету залежить від вигляду жорданової нормальної форми матриці P. Вона має один з видів

$$\text{або} \quad G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причому при кожному $i \in \{1, 2\}$ існує невироджена матриця S така, що $G_i = S^{-1}PS$. При $i = 1$, застосовуючи до системи диференціальних рівнянь перетворення (1.11), отримаємо згідно з (1.12) систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 0y_1 + 0y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 0y_1 + 0y_2, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що

$$y_1(t) = C_1, \quad y_2(t) = C_2,$$

де C_1, C_2 –двйсні сталі. Тоді для вектора-стовпчика $y(t)$ з координатами $y_1(t)$, $y_2(t)$ будемо мати зображення

$$y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і тому з урахуванням заміни (1.11) знаходимо, що

$$x(t) = C_1 S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це представлення є розкладом вектора $x(t)$ у базисі (1.13). Його координатами у цьому базисі є

$$\xi_1 = C_1, \quad \xi_2 = C_2$$

Тому фазова траекторія є точкою спокою (C_1, C_2). Таким чином у розглянутому випадку всі фазові траекторії системи диференціальних рівнянь є точками спокою, тобто фазова площина суцільно заповнена точками спокою.

При $i = 2$ використовуючи перетворення (1.11) одержуємо згідно з (1.12) систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 0y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = 0y_1 + 0y_2, \end{cases}$$

Інтегруючи цю систему знизу уверх, будемо мати

$$y_2(t) = C_2, \quad y_1(t) = C_1 + C_2 t,$$

де C_1, C_2 – дійсні сталі, тобто

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і тому в силу заміни (1.11)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це представлення є розкладом фазового вектора $x(t)$ у базисі (1.13) і його координатами у цьому базисі є

$$\xi_1 = C_1 + C_2 t, \quad \xi_2 = C_2$$

При $_2 = 0$ маємо фазову траекторію

$$\xi_1 = C_1, \quad \xi_2 = 0$$

Вона є точкою спокою $(C_1, 0)$, тобто вісь ξ_1 суцільно заповнена точками спокою системи диференціальних рівнянь (1.1). При $C_2 \neq 0$ фазовою траєкторією є пряма, що паралельна вісі ξ_1 і перетинає вісь ξ_2 у точці $\xi_2 = C_2$, причому зі зростанням t точка на цій фазовій траєкторії прямує до $+\infty$ при $C_2 > 0$ і до $-\infty$ при $C_2 < 0$.

ПРИКЛАД 1. Накреслити фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dx}{dt} = x + y \end{cases}$$

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Корені дійсні, різні і додатні. Отже точка спокою $(0, 0)$ – нестійкий вузол. Для $\lambda_1 = 1$ знаходимо власний вектор $(0, 1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вектор $(1, 1)$. На площині хОу будуємо прямі, які направлені вздовж цих векторів (система координат $\xi_1 O \xi_2$), а потім криві, що дотикаються в початку координат першої з цих прямих так, як $\lambda_2 > \lambda_1$.

1.4 Деякі застосування

I. *Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.*

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1.17}$$

зі сталими дійсними коефіцієнтами a і b. Покладаючи

$$y = x_1, \quad y' = x_2,$$

зведемо його до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -bx_1 - ax_2. \end{cases} \tag{1.18}$$

Фазові траєкторії системи (1.18) називаються фазовими траєкторіями рівняння (1.17), які зображуються на площині $(y,\, y')$. Характеристичні рівняння системи диференціальних рівнянь (1.18) і диференціального рівняння (1.17) співпадають: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, і тому всі фазові портрети для рівняння (1.17) такі ж самі, як і для системи двох рівнянь (1.18).

II. *Диференціальні рівняння першого порядку.* Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \tag{1.19}$$

де $a,\, b\, c\, d$ – дійсні сталі. Точки (x, y), що є розв'язками алгебраїчної системи

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$$

називаються особливими точками диференціального рівняння (1.!9). Якщо

$$ad - bc \neq 0, \tag{1.20}$$

то ця система має єдиний розв'зок $(0, 0)$, тобто рівняння (1.19) має єдину особливу точку $(0, 0)$. Далі, будемо вважати, що умова (1.20) виконується і розглянемо поряд з рівнянням (1.19) систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} = ax + by, \end{cases} \tag{1.21}$$

яка при $x = x_1,\, y = x_2$ є системою виду (1.1). В силу умови (1.20) вона має єдину точку спокою $(0, 0)$. Нехай точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ і є відмінною від точки спокою $(0, 0)$. Тоді через цю точку при деякому значені $t = t_0$ проходить єдина фазова траєкторія

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

системи диференціальних рівнянь (1.21). Оскільки точка (x_0, y_0) відмінна від точки спокою, то виконується одна з нерівностей

$$\text{або} \quad cx_0 + dy_0 \neq 0 \quad \text{або} \quad ax_0 + by_0 \neq 0.$$

Припустимо спочатку, що виконується перша з цих нерівностей. Тоді у деякому околі t_0

$$cx(t) + dy(t) \neq 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{dx(t)}{dt} \neq 0.$$

Тому для $x(t)$ існує обернена функція $t(x)$, що визначена у деякому околі I_0 точки x_0. Підставляючи цю функцію замість t у співвідношення $y = y(t)$, отримуємо функцію $y(t(x)) = \varphi(x)$ визначену у вказаному околі x_0, для якої згідно з (1.21)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{ax + b\varphi(x)}{cx + d\varphi(x)},$$

тобто вона є єдиним розв'язком диференціального рівняння (1.19), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$. Інтегральна крива, що відповідає цьому розв'язку проходить через точку (x_0, y_0) і в околі цієї точки співпадає при $t \in I_0$ з фазовою кривою системи диференціальних рівнянь (1.21).

Якщо $cx_0 + dy_0 = 0$, то $ax_0 + by_0 \neq 0$ і тому $ax(t) + by(y(t) \neq 0$ в деякому околі I_1 точки t_0, тобто $\frac{dy(t)}{dt} \neq 0$ при $t \in I_1$. Тоді для $y(t)$ існує обернена функція $t(y)$, підставляючи яку замість t у $x(t)$, отримємо функцію $x(t(y)) = \psi(y)$, визначену у деякому околі точки y_0, що є розв'язком перевернутого до (1.19) рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{cx + dy}{ax + by}, \tag{1.22}$$

який задовольняє умову $\psi(y_0) = x_0$. Відповідна для цього розв'язку інтегральна крива рівняння (1.22) проходить через точку (x_0, y_0) і в околі цієї точки співпадає при $t \in I_1$ з фазовою кривою системи диференціальних рівнянь (1.21).

З вишевикладеного зрозуміло, що портрет інтегральних кривих в околі особливої точки диференціальних рівнянь першого порядку (1.19) і (1.22), а точніше диференціального рівняння

$$(ax + by)dx = (cx + dy)dy, \tag{1.23}$$

співпадає з фазовим портретом (без точки спокою) системи диференціальних рівнянь (1.21) з єдиною різницею, яка полягає у відсутності стрілок на інтегральних кривих, які на фазових траекторіях вказують напрямок руху точок на цих траекторіях зі зростанням t.

Враховуючи вищевикладене, можемо будувати фазовий портрет системи диференціальних рівнянь (1.21) з використанням портрету інтегральних кривих диференціального рівняння першого порядку (1.23) і навпаки — портрет інтегральних кривих одного з рівнянь першого порядку (1.19), або (1.22) з використанням фазового портрету системи (1.21).

ПРИКЛАД 2. Зобразити графічно фазові траєкторії системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x - 4y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y,$$

а також показати напрям руху вздовж траєкторій. Власні значення матриці коефіцієнтів цієї системи знаходимо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 3 = 0.$$

Звідси знаходимо $\lambda_1 = -i\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{3}$. власні значення суто уявні і тому точка спокою $(0,0)$ системи є центром. Вид інших фазових траєкторій системи визначаємо з диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-4y}{x-y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-4y},$$

які отримуємо поділивши (формально) одне з рівнянь системи на інше, або з одного диференціального рівняння більш загального виду

$$(x-y)dx = (x-4y)dy,$$

Запишемо його у вигляді

$$(x-y)dx + (4y-x)dy = 0.$$

- Це рівняння у повних диференціалах. Розв'язуючи його, дістаємо

$$u(x, y + \int (x-y)dx = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y),$$

$$-x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = -x + 4y, \quad \varphi(y) = 2y^2$$

і тому

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + 2y^2.$$

Отже, фазовими траєкторіями даної системи диференціальних рівнянь є

$$x^2 - 2xy + 4y^2 = C^2, \quad (x-y)^2 + 3y^2 = C^2.$$

Рух по цих еліпсах є періодичним. Напрям руху можна визначити, наприклад так. Припустимо, що в даний момент точка $(x(t), y(t))$, яка рухається по одному з еліпсів, перетинає промінь $x = 0,\ y > 0$. Тоді в цей момент згідно з другим рівнянням системи $\frac{dy}{dt} = -y(t) < 0$, тобто ордината рухомої точки в даний момент часу спадає. Отже, рухи по еліпсах напрямлені проти руху годинкової стрілки.

1.5 Вправи та задачі для самостійної роботи

1. Накреслити фазові портрети наступних систем диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -6x_1 - x_2, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 5x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy_2}{dt} = 4y - 6x, \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = y - x, \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 4x, \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2(y - x), \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y, \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 0, \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 5y, \end{cases}$

13) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y, \end{cases}$

2.

1) При яких значеннях a, b, c, d для кожного розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

полярний кут точки $(x(t), y(t))$ зростає при зростанні t?

2) При яких значеннях параметра $a \in \mathbb{R}$ точка спокою системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a^2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - (3 + 2a)y \end{cases}$$

є вузлом? сідлом? центром? фокусом?

3) На площині параметрів a і b визначити таку множину, що для будь яких (a,b) з цієї множини друга компонента $y(t)$ будь-якого розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y, \\ \frac{dy}{dt} = by + x \end{cases}$$

має нескінчену множину нулів при $t \geq 0$.

4) Чи може фазова траєкторія системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$$

з точки $(-a^2-1,-1)$ потрапити у точку $(1,a^2+1)$?

5) При яких a точка спокою системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x+y), \\ \frac{dy}{dt} = a^2 y \end{cases}$$

є сідлом.

6) Дослідити поведінку фазових траєкторій системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}$$

7) Дослідити поведінку фазових траєкторій систем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

3. Накреслити інтегральні портрети в околі особливих точок наступних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{3x+4y}, \quad 2)\frac{dy}{dx} = \frac{x+4y}{2x+3y}, \quad 3)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-4y}{2y-3x},$$

$$4)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{y}, \quad 5)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-2y}{3x-4y}, \quad 6)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-3x},$$

$$7)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-y}, \quad 8)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{4y-2x}{x}, \quad 9)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

4. Накреслити фазові портрети наступних лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$1)\quad x'' - 3x' + 2x = 0,\quad 2)\quad x'' - 9x = 0,\quad 3)\quad x'' - 2x' + 2x = 0,$$

$$4)\quad x'' + 9x = 0,\quad 5)\quad x'' - 8x' + 17x = 0,\quad 6)\quad x'' + x' = 0,$$

$$7)\quad y'' + 7y' + 10y = 0,\quad 8)\quad y'' - 8y' + 20y = 0,\quad 9)\quad y'' - 25y = 0.$$

$$10)\quad u'' - 2u' + 5u = 0,\quad 11)\quad u'' + 4u' + 4u = 0,\quad 12)\quad u'' + 17u' = 0.$$