Кореновський

Затверджено Вченою радою ОНУ
імені І. І. Мечникова
від «20» грудня 2016 р. № 4

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
(повна назва вищого навчального закладу)

Кафедра математичного аналізу

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з науково-педагогічної роботи
( )
« » 2020 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія міри та інтеграла
(назва навчальної дисципліни)

Рівень вищої освіти бакалавр (перший рівень)

Спеціальність 111 Математика
(код і назва спеціальності (тей))

Інститут/факультет математики, фізики та інформаційних технологій
(назва інституту, факультету)

2020–2021

Робоча програма складена на основі навчальної програми з дисципліни
«___Теорія міри та інтеграла___».
(назва навчальної дисципліни)

Розробники: Кореновський А. О., д.ф.-м.н, професор

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № 1 від «31» серпня 2020 року

Завідувач кафедри ________ (___Кореновський А. О___)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 1 від «15» 09 2020 року

Голова НМК ________ (___Страхов Є. М.___)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № ____ від «____» _______________ 20____ року

Завідувач кафедри ____________ (_____________________________)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № ____ від «____» _______________ 20____ року

Завідувач кафедри ____________ (_____________________________)
(підпис) (прізвище та ініціали)

1 Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><th rowspan="2">Найменування показників</th><th rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</th><th colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</th></tr>
<tr><th>денна форма навчання</th><th>заочна форма навчання</th></tr>
<tr><td rowspan="16">Загальна кількість:
кредитів — 4
годин — 120
залікових модулів — 3
змістових модулів — 3
ІНДЗ* — ____
(вид завдання)</td><td rowspan="16">Галузь знань
11 Математика та статистика
(шифр і назва)
Спеціальність
111 Математика
(код і назва)
Спеціалізації:
____
(назва)
Рівень вищої освіти:
бакалавр (перший рівень)</td><td colspan="2">Нормативна / за вибором (ВНЗ/студента)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>3-й</td><td>-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>5-й</td><td>-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>30 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>30 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>60 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">у т.ч. ІНДЗ*: — год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма підсумкового контролю: екзамен</td></tr>
</table>

* — за наявності

2 Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета. Сформувати у студентів загальну та фахову компетентність. В курсі теорії міри та інтеграла студенти знайомляться з поняттям міри та інтеграла Лебега, а також з загальними принципами побудови міри та інтеграла, засвоюють методи розв'язання типових задач. Також розглядаються приклади застосування освоєних методів та результатів до суміжних питань.

Завдання.

1. Вивчити класичні підходи до побудови міри та інтеграла як необхідної бази для сприйняття навчального матеріалу інших природничих та спеціальних дисциплін.
2. Надати навички застосування вивченого матеріалу до теоретичного та експериментального дослідження при вирішенні професійних завдань.
3. Сформувати цілісний математичний апарат сучасного спеціаліста–математика.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

1. Загальних (ЗК):
   (a) ЗК.06 Здатність ставити та вирішувати задачі на основі абстрактного мислення, аналізу й синтезу.
2. Спеціальних фахових (КФС):
   (a) ФК.01 Спроможність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;

(Вказуються компетентності, елементи яких формуються, відповідно до стандартів вищої освіти й освітньої програми та їх коди)

Очікувані результати навчання. У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: аксіоми, означення, твердження, леми, теореми, критерії, які входять до програми курсу.

вміти: формулювати аксіоми, означення, твердження, леми, теореми, критерії; доводити твердження, леми, теореми, критерії, які входять до програми курсу і були приведені з доведенням. Розв'язувати вправи з матеріалу з задачника для відповідних спеціальностей.

Програмні результати навчання

1. ПРН.04 Відтворювати базові знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань та для використання математичних методів у обраній професії;
2. ПРН.12 Уміння розв'язувати задачі з математичною строгістю та математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями;
3. ПРН.13 Уміння розв'язувати конкретні математичні задачі, сформульовані в термінах даної предметної області, здійснювати базові перетворення математичних моделей з метою розв'язування математичних та/або прикладних задач.

3 Зміст навчальної дисципліни

Вступ до предмету

Змістовий модуль 1. Міра Лебега.

Тема 1. Побудова міри Лебега.

Тема 2. Властивості міри Лебега.

Тема 3. Порівняння міри Лебега з мірою Жордана.

Тема 4. Невимірні за Лебегом множини.

Змістовий модуль 2. Вимірні функції.

Тема 5. Означення вимірних функцій та їх елементарні властивості.

Тема 6. Збіжність за мірою та зв'язок зі збіжністю майже всюди.

Тема 7. Майже рівномірна збіжність та теорема Єгорова.

Тема 8. Структура вимірних функцій та теорема Лузіна.

Змістовий модуль 3. Інтеграл Лебега.

Тема 9. Інтеграл Лебега для обмежених функцій.

Тема 10. Інтеграл Лебега для невід'ємних вимірних функцій.

Тема 11. Сумовні функції довільного знаку.

Тема 12. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Приклади застосування до суміжних дисциплін

4 Структура навчальної дисципліни

Назви теми	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	Усього	у тому числі				Усього	у тому числі			
		л	п/с	лаб	ср		л	п/с	лаб	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вступ	4	2	2							
Змістовий модуль 1. Міра Лебега.										
Тема 1. Побудова міри Лебега.	9	2	2		5					
Тема 2. Властивості міри Лебега.	9	2	2		5					
Тема 3. Порівняння міри Лебега з мірою Жордана.	9	2	2		5					
Тема 4. Невимірні за Лебегом множини.	9	2	2		5					
Разом за змістовим модулем 1.	36	8	8		20					
Змістовий модуль 2. Вимірні функції.										
Тема 5. Означення вимірних функцій та їх елементарні властивості.	9	2	2		5					
Тема 6. Збіжність за мірою та зв'язок зі збіжністю майже всюди.	9	2	2		5					
Тема 7. Майже рівномірна збіжність та теорема Єгорова.	9	2	2		5					
Тема 8. Структура вимірних функцій та теорема Лузіна.	9	2	2		5					
Разом за змістовим модулем 2.	36	8	8		20					
Змістовий модуль 3. Інтеграл Лебега.										
Тема 9. Інтеграл Лебега для обмежених функцій.	9	2	2		5					
Тема 10. Інтеграл Лебега для невід'ємних вимірних функцій.	9	2	2		5					
Тема 11. Сумовні функції довільного знаку.	9	2	2		5					

Назви теми	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	Усього	у тому числі				Усього	у тому числі			
		л	п/с	лаб	ср		л	п/с	лаб	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Тема 12. Граничний перехід під знаком інтеграла.	9	2	2		5					
Разом за змістовим модулем 3.	36	8	8		20					
Приклади застосування до суміжних дисциплін	8	4	4							
ІНДЗ*										
Усього годин за семестр	120	30	30		60					

* — за наявності

5 Теми семінарських занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.		
2.		

6 Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Вступ	2
1.	Побудова міри Лебега.	2
2.	Властивості міри Лебега.	2
3.	Порівняння міри Лебега з мірою Жордана.	2
4.	Невимірні за Лебегом множини.	2
5.	Означення вимірних функцій та їх елементарні властивості.	2
6.	Збіжність за мірою та зв'язок зі збіжністю майже всюди.	2
7.	Майже рівномірна збіжність та теорема Єгорова.	2
8.	Структура вимірних функцій та теорема Лузіна.	2
9.	Інтеграл Лебега для обмежених функцій.	2
10.	Інтеграл Лебега для невід'ємних вимірних функцій.	2

11.	Сумовні функції довільного знаку.	2
12.	Граничний перехід під знаком інтеграла.	2
	Приклади застосування до суміжних дисциплін	4
	Всього за семестр	30

7 Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.		
2.		

8 Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Вступ	0
1.	Побудова міри Лебега.	5
2.	Властивості міри Лебега.	5
3.	Порівняння міри Лебега з мірою Жордана.	5
4.	Невимірні за Лебегом множини.	5
5.	Означення вимірних функцій та їх елементарні властивості.	5
6.	Збіжність за мірою та зв'язок зі збіжністю майже всюди.	5
7.	Майже рівномірна збіжність та теорема Єгорова.	5
8.	Структура вимірних функцій та теорема Лузіна.	5
9.	Інтеграл Лебега для обмежених функцій.	5
10.	Інтеграл Лебега для невід'ємних вимірних функцій.	5
11.	Сумовні функції довільного знаку.	5
12.	Граничний перехід під знаком інтеграла.	5
	Приклади застосування до суміжних дисциплін	0
	Всього за семестр	60

До самостійної роботи відноситься:

1. Підготовка до лекцій, практичних, семінарських, лабораторних занять;

2. Написання рефератів, ессе;
3.

9 Індивідуальне навчально-дослідне завдання

Не передбачено.

10 Методи навчання

1. Пояснювально-ілюстративні методи:
   - лекція;
   - пояснення;
   - інструктаж;
   - самостійне опрацювання літературних джерел;
   - робота з електронними конспектами лекцій та презентаціями.
2. Інформаційно-повідомляючий метод.
3. Репродуктивні методи:
   - закріплення вивченого на основі зразка (побудова моделей, розв'язування задач);
   - розв'язування задач за алгоритмами конкретних методів;
   - вправи;
   - практичні роботи.
4. Дослідницький метод.
5. Метод проблемного викладення (наукового пошуку).

11 Методи контролю

1. Методи усного контролю:
   - фронтальне і індивідуальне усне опитування;
   - усний іспит;
2. Методи письмового контролю:
   - письмові самостійні і контрольні роботи;
   - письмовий іспит.

12 Питання для підсумкового контролю

Тема 1.

1. Відкриті множини та їх елементарні властивості. Структура відкритої множини на дійсній прямій.

2. Замкнені множини та їх елементарні властивості. Компактні множини, критерій компактності.

3. Міра сегмента та її властивості. Теорема про диз'юнктивне розвинення фігури. Міра фігури та її властивості.

4. Міра відкритої множини та її властивості. Міра внутрішності фігури.

5. Міра компактної множини та її властивості. Міра фігури.

6. Зовнішня та внутрішня міри множини. Зовнішня та внутрішня міри відкритої та компактної множини.

7. Вимірність множини в сенсі Лебега. Елементарні властивості міри Лебега (монотонність та скінченна адитивність).

8. Критерій вимірності у сенсі Лебега. Замкненість сукупності вимірних за Лебегом множин відносно теоретико-множинних операцій в скінченному наборі.

9. Зчисленна напіваддитивність міри відкритих множин та зчисленна адитивність міри Лебега.

10. Вимірність зчисленного об'єднання та перетину вимірних множин. Неперервність міри Лебега.

11. Порівняння міри Лебега з мірою Жордана. Приклади.

12. Міра лебегової множини нуль та її властивості. Множина Кантора.

13. Приклад невимірної за Лебегом множини.

Тема 2.

1. Різні означення вимірності функції та їх еквівалентність. Зв'язок між вимірністю функції та її модуля.

2. Вимірність тотожно сталої функції, простої та неперервної функцій. Зв'язок між вимірністю функції та її модуля.

3. Вимірність функцій та арифметичні операції.

4. Вимірність границі майже всюди збіжної послідовності вимірних функцій. Вимірність похідної.

5. Означення збіжності за мірою. Єдиність границі за мірою.

6. Теорема Лебега про зв'язок збіжності за мірою зі збіжністю майже всюди. Приклад послідовності, яка збігається за мірою, та розбіжна в кожній точці.

7. Приклад послідовності, яка збігається за мірою, та розбіжна в кожній точці. Теорема Ф. Рісса про зв'язок збіжності за мірою зі збіжністю майже всюди.

8. Означення майже рівномірної збіжності. Теорема Єгорова.

Тема 3.

1. Суми Дарбу – Лебега для обмеженої функції та їх елементарні властивості. Означення верхнього та нижнього інтегралів Лебега для обмеженої функції. Приклади.

2. Рівносильність інтегровності в сенсі Лебега та вимірності обмеженої функції.

3. Теорема про середнє та повна адитивність інтеграла Лебега для обмежених функцій. Наслідок (про інтегровність еквівалентних функцій, про еквівалентність нулю невід'ємної функції і інтегралом, що дорівнює нулю, про інтегровність простої функції).

4. Лінійність інтеграла Лебега для обмеженої функції. Теореми про інтегровність модуля та про інтегрування нерівностей.

5. Приклад, який показує, що граничний перехід під знаком інтеграла, взагалі кажучи, недопустимий. Теорема Лебега про обмежену збіжність.

6. Означення інтеграла Лебега для невід'ємної вимірної функції. Приклад (інтеграл від степеневої функції по відрізку $[0, 1]$).

7. Елементарні властивості інтеграла Лебега від невід'ємних вимірних функцій (інтеграл по множині нульової міри, інтегрування еквівалентних функцій, інтегрування по вимірній підмножині, інтегрування нерівностей).

8. Повна аддитивність та лінійність інтеграла Лебега для невід'ємних функцій.

9. Теорема Леві про монотонну збіжність. Наслідок для рядів.

10. Теорема Фату (два доведення).

11. Означення інтеграла Лебега для вимірної функції довільного знаку. Рівносильність сумовності функції та її модуля.

12. Елементарні властивості сумовних функцій (інтегрування по множині нульової міри, сумовність на вимірній підмножині, сумовність функції, яка має сумовну мажоранту).

13. Приклад, який показує, що повна аддитивність для інтеграла Лебега, взагалі кажучи, не має місця. Теореми про скінченну аддитивність інтеграла Лебега для сумовних функцій довільного знаку.

14. Лінійність інтеграла Лебега для сумовних функцій довільного знаку.

15. Абсолютна неперервність інтеграла Лебега.

16. Теорема Лебега про мажоровану збіжність.

13 Розподіл балів, які отримують студенти

Поточний контроль			Модульний контроль 1	Модульний контроль 2	Підсумковий контроль	Сума балів
Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Змістовий модуль 3				
			25	25	50	100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90–100	**A**	відмінно	зараховано
85–89	**B**	добре	
75–84	**C**		
70–74	**D**	задовільно	
60–69	**E**		
35–59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0–34	**F**	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

14 Методичне забезпечення

1. Теорія міри та інтеграла. Курс лекцій. Упор. А. О. Кореновський. Одеса. Астропринт. 1999.

15 Рекомендована література

Основна

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972.
2. И.П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974.
3. С.А. Теляковский. Сборник задач по теории функций действительной переменной. М., Наука. 1980.
4. Теорія міри та інтеграла. Курс лекцій. Упор. А. О. Кореновський. Одеса. Астропринт. 1999.

Додаткова

1. Ю. С. Очан. Сборник задач по математическому анализу. Общая теория множеств и функций. М., Просвещение, 1981.
2. М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. Мера и интеграл. М., Факториал. 1998.
3. А. Я. Дороговцев. Элементы общей теории меры и интеграла. К., Вища школа, 1989.

4. Б. З. Вулих. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., Наука, 1973.
5. Г. П. Толстов. Мера и интеграл. М., Наука, 1976.
6. І. М. Фішман. Основи теорії функцій дійсної змінної. К., Радянська школа. 1963.
7. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. М., Наука, 1967.
8. И. Н. Песин. Развитие понятия интеграла. М., Наука, 1966.

Електронні інформаційні ресурси

1. Теорія міри та інтеграла. Курс лекцій. Упор. А. О. Кореновський. Одеса. Астропринт. 1999. http://fs.onu.edu.ua/clients/client11/web11/metod/imem/korenovsky_1.pdf