Форма № Н - 3.04

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики , фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Завідувач кафедри (відділення)

____
"____"__________________20___ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Функціональний аналіз

(назва навчальної дисципліни)

напрям підготовки 111 – Математика
(шифр і назва напряму підготовки)

спеціальність Математика
(шифр і назва спеціальності (тей)

спеціалізація ________________

інституту Факультет математики , фізики та інформаційних технологій
(назва факультету)

2020-2021 навчальний рік

Робоча програма з курсу **Функціональний аналіз** для студентів за напрямом підготовки
111 - Математика, спеціальністю Математика

Розробники: (вказати авторів, їхні наукові ступені, вчені звання та посади).
Леончик Євген Юрієвич, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу
.

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри
математичного аналізу
Протокол № 1 від. „31” серпня 20 20 р.

Завідувач кафедрою ____________ Кореновський А.О.
(підпис) (Прізвище, ініціали)

Схвалено методичною комісією за напрямом підготовки
111 - Математика, спеціальністю Математика

(шифр, назва)

Протокол № 1 від „15” 09 20 р.

Голова ____________ Страхов Е.Ю.
(підпис) (Прізвище, ініціали)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	***заочна форма навчання***
Кількість кредитів – 7	Галузь знань 11-Математика (шифр і назва)	Нормативна	
	Напрям підготовки **2121.2 “Математика”** (шифр і назва)		
Модулів – 4	Спеціальність (професійне спрямування): **математика**	***Рік підготовки:***	
Змістових модулів – 12		3-й,4-й	-й
Індивідуальне науково-дослідне завдання ___________ (назва)		***Семестр***	
Загальна кількість годин - **210**		6-й, 7-й	-й
		Лекції	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента - 4	Освітньо-кваліфікаційний рівень: **бакалавр**	50 год.	год.
		Практичні, семінарські	
		40 год.	год.
		Лабораторні	
		год.	год.
		Самостійна робота	
		120 год.	год.
		ІНДЗ: год.	
		Вид контролю: **залік, екзамен**	

Примітка.
Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить (%):

для денної форми навчання –

для заочної форми навчання –

АНОТАЦІЯ

Більшість базових математичних дисциплін, що включені до програм класичних університетів, зазнали значного розвитку й сформувалися в усій своїй цілості й досконалості у окремі та незалежні у своєму напрямку підрозділи математичної науки вже навіть не в минулому столітті, набагато раніше. Такими є, наприклад, математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія, теорія диференційних рівнянь, тощо.

Функціональний аналіз разом із теорією міри й інтегралу Лебега є чи не наймолодшим з обов'язкових курсів, необхідних для здобуття базової математичної освіти. Розвиток та становлення функціонального аналізу як науки прийшовся на середину минулого століття. Велику (чи не найголовнішу) роль у цьому процесі зіграли такі радянські вчені як А.Н. Колмогоров, П.Г. Лівшиц, М.Г. Крейн, С.В. Фомін, А.П. Потапов та інші. До речі, М.Г. Крейн, А.П. Потапов та П.Г. Лівшиц представляють саме одеську школу функціонального аналізу.

Саме Андрій Миколайович Колмогоров свого часу ініціював створення у межах університетської освіти курсу теорії функцій та функціонального аналізу. Він розробив програму і був першим лектором цього курсу на механіко-математичному факультеті Московського Державного Університету з 1946 року. Він вважав, що предмет і методи функціонального аналізу стануть невід'ємною ланкою у формуванні та розвитку молодої математичної свідомості.

Перед усім, функціональний аналіз як окремий розділ математичної науки з усією повнотою відображає ідеї про єдність абстрактної та прикладної математики. Цей навчальний курс привчає студентів до так званого подвійного бачення: з одного боку, слідкувати за внутрішньою логікою теорії множин, загальної теорії неперервних відображень метричних і топологічних просторів, лінійних просторів та функціоналів і операторів на них, теорії міри та інтегрування у загальних просторах з мірою, та з іншого – не забувати і про проблеми класичного і навіть прикладного аналізу, що обслуговується вище визначеними більш абстрактними математичними напрямами. У функціональному аналізі здійснюється так званий синтез ідей, з якими студентам вже доводилося працювати на початкових етапах освіти у курсах класичного аналізу, алгебри, геометрії, диференційних рівнянь.

2. Мета курсу. Метою курсу «Функціональний аналіз» (ФА) є вивчення студентами основних понять, фактів та методів цієї дисципліни та набуття навичок їх застосування при розв'язанні практичних задач та в наукових дослідженнях.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних компетентностей:

ЗК.01 Здатність навчатися та самонавчатися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики.

ЗК.02 Здатність використовувати в професійній діяльності базові знання в галузі математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук.

ЗК.03 Здатність адептуватися до нових математичних ідей та методів, проявляти творчий (креативний) підхід, ініціативу.

ЗК.04 Здатність застосовувати професійні математичні знання й уміння на практиці.

ЗК.05 Здатність вести дослідницьку діяльність, включаючи аналіз проблем, постановку цілей і завдань, вибір способів та методів дослідження, а також оцінку його якості.

ЗК.06 Здатність ставити та вирішувати задачі на основі абстрактного мислення, аналізу й синтезу.

ФК.01 Спроможність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК.02 Спроможність представляти математичні міркування та висновки з ясністю та точністю у формі, придатній для аудиторії, до якої звертаються, як усно, так і письмово, а також розуміти математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї ж задачі.

ФК.03 Спроможність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК.04 Спроможність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики.

ФК.08 Спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти.

3. Місце курсу у навчальному процесі. Базовими дисциплінами для курсу ФА є: математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія, міра та й л, диференціальні рівняння, теорія функцій комплексної змінної, топологія. Дисциплінами, які базуються на даному курсі, є: методи математичної фізики (диференціальні рівняння з частинними похідними) , дослідження операцій, теорія оптимального керування , різноманітні спецкурси , де використовуються поняття та факти ФА.

4. Знання, уміння та навички студентів. Студенти повинні вміти

Формулювати

- аксіоми,
- означення,
- твердження,
- леми,
- теореми,
- критерії,

які входять до програми курсу функціонального аналізу.
Доводити

- твердження,
- леми,
- теореми,
- критерії,

які входять до програми курсу функціонального аналізу за відповідний семестр і які були у цьому семестрі приведені з доведенням.

Студенти повинні володіти основними поняттями ФА:
- метричний простір, його повнота, компактність;
- лінійний нормований простір, скінченновимірні простори;
- евклідові та унітарні простори;
- ряди Фур'є , повнота та замкнутість ортонормованих систем;
- гільбертовий простір;
- лінійний неперервний функціонал, спряжений простір;
- лінійний оператор, простір лінійних операторів;
- спряжені та компактні оператори, обернений оператор

та знати основні факти ФА:
- принципи вкладених куль та стискуючих відображень, критерії компактності;
- теореми Арцела, Ф. Ріса, Ріса-Фішера, Хана-Банаха, про повноту спряженого простору, Банаха-Штейнгауза, Банаха про обернений оператор, про компактні оператори;
- альтернативу Фредгольма.

Студенти повинні набути навички розв'язання типових задач та застосування теоретичних положень ФА при проведенні елементів наукових досліджень під час практичних занять.

Розв'язувати вправи за матеріал відповідного семестру з будь - якого задачника з функціонального аналізу для відповідних спеціальностей. Базовими задачниками вважаються:

а) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.:Наука, 1984.

б) Антоневич А.Б., Князьев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Минск: Вышэйш. шк., 1978.

5. Програма з функціонального аналізу

1) Метричні простори. Визначення, приклади метричних просторів.
2) Нерівності Юнга, Гьольдера та Мінковського для різних просторів.
3) Типологія метричних просторів. Відкриті та замкнені множини і їх доповнення. Збіжність послідовностей у метричному просторі. Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори, приклади повних і неповних метричних просторів.
4) Підпростір метричного простору. Теорема про зв`язок між замкненістю і повнотою. Лема про вкладені кулі.
5) Сепарабельні простори. Усюди щільні і ніде не щільні множини. Множини першої та другої категорій. Теорема Бера.
6) Принцип стискуючих відображень.
7) Компактність. Теорема про зв`язок компактності із замкненістю і обмеженістю.
8) Цілком обмежені множини, означення та приклади. Критерій компактності (теорема Хаусдорфа).
9) Предкомпактність. Критерій предкомпактності. Лічильна компактність, теорема про зв`язок лічильної компактності з предкомпактністю.

10) Критерій компактності у просторі функцій, неперервних на компактному просторі (теорема Арцеля-Асколі).
11) Лінійні простори. Базіс. Підпростори лінійного простору. Означення нормованого простору. Банахові простори.
12) Еквівалентні норми. Теорема про еквівалентні норми у скінченномірних лінійних нормованих просторах. Повнота скінченномірних просторів.
13) Властивість Гейне-Бореля. Лема про “майже перпендикуляр”. Терема Рісса (критерій скінченномірності).
14) Фактор-простір та його властивості.
15) Простір із скалярним добутком, приклади. Нерівність Коши-Буняковського-Шварца.
16) Ортогональність векторів. Процес ортогоналізації. Ортонормовані базиси.
17) Теорема про зв`язок між проекцією та найближчим елементом.
18) Ряди Фур`є., нерівність Бесселя, рівність парсеваля.
19) Гільбертові простори. Теорема Рісса-Фішера.
20) Зв`язок між повнотою і замкненістю ортонормованої системи.
21) Ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.
22) Теорема про проекцію.
23) Лінійні функціонали. Норма лінійного функціоналу. Зв`язок між неперервністю та обмеженістю лінійних функціоналів.
24) Теорема Хана-Банаха та її наслідки.
25) Спряжений простір. Повнота спряженого простору.
26) Зображення лінійних неперервних функционалів у різних просторах.
27) Теорема Рісса про загальнйй вигляд лінійного неперервного функціоналу у гільбертовому просторі.
28) Лінійні оператори, означення та приклади. Неперевність та обмеженість лінійних операторів. Зв`язок між неперервністю та обмеженістю лінійних операторів.
29) Означення рефлексивного простору. Означення слабкої збіжності послідовності елементів лінійного нормованого простору. Зв`язок слабкої збіжності та збіжності за нормою.
30) Простір лінійних операторів. Теорема про його повноту.
31) Теорема Банаха-Штейнгауза.
32) Зв`язок між рівномірною збіжністю послідовності операторів і збіжністю у кожній точці простору.
33) Критерій поточкової збіжності.
34) Обернені оператори. Теорема Банаха про обернений оператор.
35) Теорема Банаха про обернений оператор.
36) Неперервність і лінійність спряженого оператору. Приклади спряжених операторів.
37) Компактні оператори. Приклади компактних операторів. Замкненість простору компактних операторів у просторі усіх лінійних обмежених операторів.
38) Теорема Шаудера про компактність оператору, спряженого до компактного.
39) Скінченномірність ядра і замкненість образу оператору I+A, де I – тотожний оператор, A – компактний оператор. Біортогональні системи. Альтернатива Фредгольма.
40) Власні значення і власні вектори операторів. Обмеженість і замкненість спектру лінійного обмеженого оператору.
41) Лінійність спектру компактного оператору у банановому просторі.

6. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	Денна форма				
	Форма контролю	усього	у тому числі		
			л	практ	ср
1	2	3	4	5	6
I семестр. I модуль.					
Тема 1. Матричні простори	ІЗ	20	5	3	12
Тема 2. Повні простори	ІЗ	19	5	2	12
Тема 3. Предкомпактність	ІЗ	19	5	2	12
Всього годин		58	15	7	36
I семестр. II модуль.					
Тема 1. Банахові простори	ІЗ	20	5	3	12
Тема 2. Фактор-простір	ІЗ	20	5	3	12
Тема 3. Ряди Фур`є	ІЗ	20	5	3	12
Тема 4. Гільбертові простори	ІЗ	20	5	3	12
Всього годин		80	20	12	48
II семестр. I модуль.					
Тема 1. Лінійні функціонали	ІЗ	21	5	4	12
Тема 2. Лінійні оператори	ІЗ	21	5	4	12
Тема 3. Обернені та обмежені оператори	ІЗ	21	5	4	12
Всього годин		63	15	12	36
II семестр. II модуль.					
Тема 1. Спряжені оператори	ІЗ	25	4	7	14
Тема 2. Компактні оператори	ІЗ	26	4	8	14
Всього годин		51	8	15	28

Форма контролю: КО – контрольне опитування (поточне),
ІЗ – індивідуальне завдання (аудиторна письмова контрольна робота)

7. Практичні заняття

I Семестр

(лекції – 34 години, практичні заняття – 22)

I Модуль

1. Метричні та топологічні простори. Повні метричні простори.

№ п.п	Тематика занять	Лекцій (годин)	Практ. (годин)
1	Поняття метричного простору, означення та основні приклади метричних просторів.	2	2
2	Неперервні відображення метричних просторів. Ізометрія.	1	
3	Збіжність до границі. Граничні точки множин. Щільні підмножини. Відкриті та замкнені множини.	2	2
4	Повні метричні простори, означення і приклади повних метричних просторів.	2	4
5	Теорема про вкладені кулі.	1	
6	Теорема Бера. Поповнення простору.	2	
Всього:		10	8

II Модуль

2. Компактність. Компактність у метричних просторах.

№ п.п	Тематика занять	Лекцій (годин)	Практ. (годин)
1	Поняття про компактність. Неперервні відображення компактних просторів.	2	2
2	Злічена компактність. Майже компактні множини.	2	2
3	Компактність у метричних просторах. Компактність та повна обмеженість.	2	2
4	Майже компактні підмножини у метричних просторах. Рівномірна у сукупності неперервність. Теорема Арцела.	2	2
Всього:		8	8

II Семестр

(лекції – 24 години, практичні заняття – 24)

I Модуль

4. Лінійні неперервні функціонали.

№ п.п	Тематика занять	Лекцій (годин)	Практ. (годин)
1	Лінійні функціонали, означення, геометричний зміст.	1	3
2	Лінійні функціонали на нормованих лінійних просторах, означення, неперервність, обмеженість, норма функціоналу.	3	
3	Продовження функціоналів. Теорема Хана-Банаха для дійсних, комплексних та нормованих просторів та наслідки з неї.	3	3
4	Спряжений простір. Приклади спряжених просторів. Другий спряжений простір.	5	3
5	Слаба топологія і слаба збіжність у лінійному топологічному просторі.	2	
Всього:		14	9

II Модуль

5. Лінійні оператори.

№ п.п	Тематика занять	Лекцій (годин)	Практ. (годин)
1	Означення та приклади лінійних операторів. Неперервність і обмеженість. Норма. Приклади лінійних операторів.	2	3
2	Сума і добуток операторів. Простір лінійних операторів. Повнота простору лінійних операторів.	1	
3	Обернений оператор, поняття оберненості. Основні теореми.	1	3
4	Кільце лінійних операторів.	1	
5	Спряжені оператори. Спряжені оператори у евклідовому просторі. Самоспряжені оператори.	1	3
6	Спектр оператора. Резольвента.	2	3
7	Компактні оператори, означення і основні приклади.	1	3
8	Основні властивості компактних операторів. Власні значення компактного оператора.	1	
Всього:		10	15

8. Методи навчання

Метод проблемного викладення (наукового пошуку)

Пояснювально-ілюстративні методи:

- лекція
- пояснення
- інструктаж
- самостійне опрацювання літературних джерел
- робота з електронними конспектами лекцій та презентаціями

Інформаційно – повідомляючий метод

Наочні методи(презентації, ілюстрації)

Репродуктивні методи:

- закріплення вивченого на основі зразка (побудова моделей, розв'язування задач)
- розв'язування задач за алгоритмами конкретних методів
- вправи
- лабораторні роботи
- практичні роботи

Дослідницький метод

Методи формування і стимулювання пізнавальної діяльності:

- пізнавальні ігри
- навчальні дискусії
- аналіз життєвих ситуацій

9. Методи контролю

Методи усного контролю:

- фронтальне і індивідуальне усне опитування
- усний іспит
-

Методи письмового контролю:

- письмові самостійні і контрольні роботи
- тести
- письмовий іспит

10. Розподіл балів, які отримують студенти

Поточне тестування (I семестр)		Сума
Змістовний модуль 1	Змістовний модуль 2	
50	50	**100**

Поточне тестування (II семестр)		Сума
Змістовний модуль 1	Змістовний модуль 2	
50	50	**100**

11. Рекомендована література

Основна

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональний анализ.- М.: Наука,1980.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Елементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989.
3. Банах С. Курс функціонального аналізу. – Київ: Радянська школа, 1948.
4. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – Киев: Наукова думка, 1969.
5. Рудин У. Основы функционального анализа. – М.: Мир,1966.

6. Рисс Ф., Надь Б.С. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир,1979.
7. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - Киев: Наукова думка, 1980.
8. Городецкий В.В., Нашибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. - М.: Наука, 1977.

Додаткова

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов. – М.: Наука, 1966.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1979.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Наука, 1965.
5. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.

12. Критерії оцінювання знань.

Шкала оцінок за результатами семестру:

Кількість балів	**> 60**	**0-59**	**60-73**	**74-89**	**90-100**
Оцінка	залік	незадовільно	задовільно	добре	відмінно

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ

ECTS-оцінка	**Визначення назви оцінювання за шкалою ECTS**	**За 100 бальною шкалою**
A	відмінно	90-100
B	дуже добре	85-89
C	добре	74-84
D	задовільно	65-73
E	достатньо для виконання мінімальних вимог навчального курсу	60-64
FX	недостатньо: потрібна додаткова робота без повторного вивчення курсу	35-59
F	недостатньо: потрібна значна додаткова робота з повторним вивченням навчального курсу	<35