Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Кафедра математичного аналізу

“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Проректор з науково-педагогічної роботи

______________________________

“___” ____________ 20___ р.

# РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

# ДС «Диференціальні властивості функцій»

| | |
|---|---|
| Рівень вищої освіти | **третій (освітньо-науковий)** |
| Спеціальність | **111 Математика** |
| Інститут/факультет | **Факультет математики, фізики та інформаційних технологій** |

2019 – 2020

Робоча програма складена на основі навчальної програми з дисципліни «Диференціальні властивості функцій»

Розробники:
Кореновський Анатолій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № 1 від. “31” серпня 2020 р.

Завідувач кафедри ________________________ Кореновський А. О.
(підпис)

Схвалено навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 1 від. “15” 09 2020 р.

Голова НМК ________________________ Страхов Є. М.
(підпис)

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № ___ від. “____”________________20__ р.

Завідувач кафедри ________________________(____________________)
(підпис) (прізвище та ініціали)

Переглянуто та затверджено на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № ___ від. “____”________________20__ р.

Завідувач кафедри ________________________ (____________________)
(підпис) (прізвище та ініціали)

## 1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="15">Загальна кількість:<br><br>кредитів – 3<br><br>годин – 90<br><br>залікових модулів – 1<br><br>змістових модулів – 3</td><td rowspan="15">Галузь знань<br>11 Математика та статистика<br><br>Спеціальність<br>111 Математика<br><br>Спеціалізації:<br><br>______________________<br>(назва)<br><br>Рівень вищої освіти: третій (освітньо-науковий)</td><td colspan="2">За вибором</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td>8 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>82 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма підсумкового контролю:<br>залік</td></tr>
</table>

## 2. Мета та завдання навчальної дисципліни

**Мета дисципліни:** дослідити диференціальні властивості функцій однієї дійсної змінної, які можуть бути встановлені за допомогою теорії міри та інтеграла Лебега. Ознайомитись з класами функцій обмеженої варіації і абсолютно неперервних функцій, та їх основними властивостями. Дослідити застосування цих класів до дослідження властивостей, пов'язаних з диференціюванням. Ознайомитись з методами відновлення функцій за відомою похідною.

**Завданнями** дисципліни є ознайомлення з теоретичними основами та практикою використання апарату теорії міри та інтеграла у певній предметній області.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

а) загальних (ЗК):

- здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук (ЗК-2);
- здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу і прогнозу (ЗК-3);
- здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК-4);

б) спеціальних (фахових) (СК):

- спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти (СК-5).

**Очікувані результати навчання.** В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен

**знати:** сучасні напрямки розвитку наукових досліджень у даній галузі, зокрема методи досліджень диференціальних властивостей функцій, які засновані на застосуванні теорії функцій дійсної змінної, міри та інтеграла Лебега;

**вміти:** досліджувати досить тонкі диференціальні властивості функцій та застосовувати їх до розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, до інтегральних перетворень, тощо.

## 3. Програма дисципліни

**Вступ.**

1. Предмет дослідження. Попередні відомості з курсу аналіза.
2. Приклад функції, похідна якої обмежена, але неінтегровна за Ріманом.
3. Відновлення функції за її обмеженою похідною за допомогою інтеграла Лебега.

**Змістовний модуль 1. Монотонні функції.**

1. Стрибки монотонної функції. Теорема про множину точок розриву монотонної функції.
2. Функція стрибків. Розвинення монотонної функції в суму функції стрибків та неперервної складової.
3. Лема Віталі про покриття (2 варіанти).
4. Леми про похідні числа монотонної функції. Теорема Лебега.
5. Приклад монотонної функції, яка не має похідної на заданій множині міри нуль.
6. Оцінка інтеграла від похідної монотонної функції.
7. Приклади зростаючої та строго зростаючої неперервних функцій з майже всюди нульовою похідною.
8. Теорема Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками.
9. Точки щільності. Теорема Лебега про точки щільності.
10. Апроксимативна неперервність. Теорема Данжуа.

**Змістовний модуль 2. Функції обмеженої варіації.**

1. Означення функції обмеженої варіації. Приклади.
2. Арифметичні властивості функцій обмеженої варіації.
3. Аддитивність варіації. Наслідки.
4. Критерій обмеженості варіації. Наслідки.
5. Неозначена варіація функції. Теорема про неперервність неозначеної варіації. Наслідок.
6. Теорема про похідну неозначеної варіації.
7. Теорема про точки розриву неозначеної варіації.
8. Функція стрибків для функції обмеженої варіації. Розвинення функції обмеженої варіації на суму функції стрибків і неперервної функції.
9. Теорема про співпадання похідних функції обмеженої варіації та її неозначеної варіації.
10. Обчислення варіації неперервної функції за допомогою границь (дві теореми).
11. Індикатриса Банаха. Теорема Банаха.

**Змістовний модуль 3. Абсолютно неперервні функції.**

1. Різні означення абсолютно неперервної функції та їх еквівалентність. Приклади.
2. Арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій.
3. Зв'язок абсолютної непрервності з обмеженістю варіації. Наслідок.
4. Теорема про сталість абсолютно неперервної функції.
5. Невизначений інтеграл Лебега. Абсолютна неперервність невизначеного інтеграла Лебега.
6. Теорема про похідну невизначеного інтеграла Лебега.

7. Абсолютно неперервна функція як невизначений інтеграл Лебега від своєї похідної.
8. Точки Лебега. Диференційовність невизначеного інтеграла Лебега в точці Лебега. Приклад функції, у якої невизначений інтеграл Лебега диференційовний у точці, що не є точкою Лебега.
9. Теорема про точки Лебега сумовної функції.
10. Варіація невизначеного інтеграла Лебега.
11. Стнгулярна функція. Розвинення неперервної функції на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти.
12. Теорема про абсолютно непрервну та сингулярну компоненти монотонної функції. Наслідок.
13. Умови монотонності функції в термінах похідних чисел.
14. Теорема про відновлення функції за її сумовною похідною.
15. Приклад функції з несумовною похідною.

**Заключна частина. Недиференційовні функції.**

1. Приклад Ван-дер-Вардена непрервної ніде недиференційовної функції.
2. Односторонні похідні числа функції. Приклад функції із заданими односторонніми похідними числами в точці.
3. Леми про рівність протилежних похідних чисел.
4. Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. Наслідок для монотонної функції.

## 4. Структура навчальної дисципліни

| Назви змістових модулів і тем | Кількість годин | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Денна форма | | | | | |
| | усього | у тому числі | | | | |
| | | л | п | лаб. | інд. | с. р. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **Модуль 1** | | | | | | |
| **Вступ** | | | | | | |
| Предмет дослідження. Попередні відомості з курсу аналіза. Приклад функції, похідна якої обмежена, але неінтегровна за Ріманом.Відновлення функції за її обмеженою похідною за допомогою інтеграла Лебега | 5 | 1 | | | | 4 |
| Разом Вступ | 5 | 1 | | | | 4 |
| **Змістовий модуль 1. Монотонні функції.** | | | | | | |
| Стрибки монотонної функції. Теорема про множину точок розриву монотонної функції. | | 2 | | | | 2 |
| Функція стрибків. Розвинення монотонної функції в суму функції стрибків та неперервної складової. | | | | | | 2 |
| Лема Віталі про покриття (2 варіанти). | | | | | | 3 |
| Леми про похідні числа монотонної функції. Теорема Лебега. | | | | | | 3 |
| Приклад монотонної функції, яка не має похідної на заданій множині міри нуль. | | | | | | 2 |
| Оцінка інтеграла від похідної монотонної функції. | | | | | | 2 |
| Приклади зростаючої та строго зростаючої неперервних функцій з майже всюди нульовою похідною. | | | | | | 3 |
| Теорема Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками. | | | | | | 3 |
| Апроксимативна неперервність. Теорема Данжуа. | | | | | | 3 |
| Разом за змістовим модулем 1 | 25 | 2 | | | | 23 |
| **Змістовий модуль 2. Функції обмеженої варіації.** | | | | | | |
| Означення функції обмеженої варіації. Приклади. | | 2 | | | | 1 |
| Арифметичні властивості функцій обмеженої варіації. | | | | | | 1 |
| Адитивність варіації. Наслідки. | | | | | | 1 |
| Критерій обмеженості варіації. Наслідки. | | | | | | 2 |
| Неозначена варіація функції. Теорема про неперервність неозначеної варіації. Наслідок. | | | | | | 2 |
| Теорема про похідну неозначеної варіації. | | | | | | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Теорема про точки розриву неозначеної варіації. | | | | | | 2 |
| Функція стрибків для функції обмеженої варіації. Розвинення функції обмеженої варіації на суму функції стрибків і неперервної функції. | | | | | | 3 |
| Теорема про співпадання похідних функції обмеженої варіації та її неозначеної варіації. | | | | | | 3 |
| Обчислення варіації неперервної функції за допомогою границь (дві теореми). | | | | | | 3 |
| Індикатриса Банаха. Теорема Банаха. | | | | | | 3 |
| Разом за змістовим модулем 2 | 25 | 2 | | | | 23 |
| **Змістовий модуль 3. Абсолютно неперервні функції.** | | | | | | |
| Різні означення абсолютно неперервної функції та їх еквівалентність. Приклади. | | | | | | 1 |
| Арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій. | | | | | | 1 |
| Зв'язок абсолютної неперервності з обмеженістю варіації. Наслідок. | | | | | | 2 |
| Теорема про сталість абсолютно неперервної функції. | | | | | | 2 |
| Невизначений інтеграл Лебега. Абсолютна неперервність невизначеного інтеграла Лебега. | | | | | | 2 |
| Теорема про похідну невизначеного інтеграла Лебега. | | | | | | 2 |
| Абсолютно неперервна функція як невизначений інтеграл Лебега від своєї похідної. | | | | | | 2 |
| Точки Лебега. Диференційовність невизначеного інтеграла Лебега в точці Лебега. Приклад функції, у якої невизначений інтеграл Лебега диференційовний у точці, що не є точкою Лебега. | | 2 | | | | 2 |
| Теорема про точки Лебега сумовної функції. | | | | | | 2 |
| Варіація невизначеного інтеграла Лебега. | | | | | | 2 |
| Сингулярна функція. Розвинення неперервної функції на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти. | | | | | | 2 |
| Теорема про абсолютно непрервну та сингулярну компоненти монотонної функції. Наслідок. | | | | | | 2 |
| Умови монотонності функції в термінах похідних чисел. | | | | | | 2 |
| Теорема про відновлення функції за її сумовною похідною. | | | | | | 2 |
| Приклад функції з несумовною похідною. | | | | | | 2 |
| Разом за змістовим модулем 3 | 30 | 2 | | | | 28 |

| Заключна частина | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Приклад Ван-дер-Вардена непрервної ніде недиференційовної функції. Односторонні похідні числа функції. Приклад функції із заданими односторонніми похідними числами в точці. Леми про рівність протилежних похідних чисел. Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. Наслідок для монотонної функції. | 5 | 1 | | | | 4 |
| Разом Заключна частина | 5 | 1 | | | | 4 |
| **Усього годин** | **90** | **8** | | | | **82** |

## 5. Теми семінарських занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1. | | |
| 2. | | |
| …. | | |

## 6. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1. | | |
| 2. | | |
| …. | | |

## 7. Теми лабораторних занять

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| … | | |

## 8. Самостійна робота

| № з/п | Назва теми | Кількість годин |
|---|---|---|
| 1 | Предмет дослідження. Попередні відомості з курсу аналіза. Приклад функції, похідна якої обмежена, але неінтегровна за Ріманом.Відновлення функції за її обмеженою похідною за допомогою інтеграла Лебега | 4 |
| 2 | Стрибки монотонної функції. Теорема про множину точок розриву монотонної функції. | 2 |
| 3 | Функція стрибків. Розвинення монотонної функції в суму функції стрибків та неперервної складової. | 2 |
| 4 | Лема Віталі про покриття (2 варіанти). | 3 |
| 5 | Леми про похідні числа монотонної функції. Теорема Лебега. | 3 |
| 6 | Приклад монотонної функції, яка не має похідної на заданій множині міри нуль. | 2 |
| 7 | Оцінка інтеграла від похідної монотонної функції. | 2 |
| 8 | Приклади зростаючої та строго зростаючої неперервних функцій з майже всюди нульовою похідною. | 3 |
| 9 | Теорема Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками. | 3 |
| 10 | Апроксимативна неперервність. Теорема Данжуа. | 3 |
| 11 | Означення функції обмеженої варіації. Приклади. | 1 |
| 12 | Арифметичні властивості функцій обмеженої варіації. | 1 |
| 13 | Аддитивність варіації. Наслідки. | 1 |
| 14 | Критерій обмеженості варіації. Наслідки. | 2 |
| 15 | Неозначена варіація функції. Теорема про неперервність неозначеної варіації. Наслідок. | 2 |
| 16 | Теорема про похідну неозначеної варіації. | 2 |
| 17 | Теорема про точки розриву неозначеної варіації. | 2 |
| 18 | Функція стрибків для функції обмеженої варіації. Розвинення функції обмеженої варіації на суму функції стрибків і неперервної функції. | 3 |
| 19 | Теорема про співпадання похідних функції обмеженої варіації та її неозначеної варіації. | 3 |
| 20 | Обчислення варіації неперервної функції за допомогою границь (дві теореми). | 3 |
| 21 | Індикатриса Банаха. Теорема Банаха. | 3 |
| 22 | Різні означення абсолютно неперервної функції та їх еквівалентність. Приклади. | 1 |
| 23 | Арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій. | 1 |
| 24 | Зв'язок абсолютної неперервності з обмеженістю варіації. Наслідок. | 2 |
| 25 | Теорема про сталість абсолютно неперервної функції. | 2 |
| 26 | Невизначений інтеграл Лебега. Абсолютна неперервність невизначеного інтеграла Лебега. | 2 |
| 27 | Теорема про похідну невизначеного інтеграла Лебега. | 2 |
| 28 | Абсолютно неперервна функція як невизначений інтеграл Лебега від своєї похідної. | 2 |
| 29 | Точки Лебега. Диференційовність невизначеного інтеграла | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| | Лебега в точці Лебега. Приклад функції, у якої невизначений інтеграл Лебега диференційовний у точці, що не є точкою Лебега. | |
| 30 | Теорема про точки Лебега сумовної функції. | 2 |
| 31 | Варіація невизначеного інтеграла Лебега. | 2 |
| 32 | Сингулярна функція. Розвинення неперервної функції на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти. | 2 |
| 33 | Теорема про абсолютно непрервну та сингулярну компоненти монотонної функції. Наслідок. | 2 |
| 34 | Умови монотонності функції в термінах похідних чисел. | 2 |
| 35 | Теорема про відновлення функції за її сумовною похідною. | 2 |
| 36 | Приклад функції з несумовною похідною. | 2 |
| 37 | Приклад Ван-дер-Вардена непрервної ніде недиференційовної функції. Односторонні похідні числа функції. Приклад функції із заданими односторонніми похідними числами в точці. Леми про рівність протилежних похідних чисел. Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. Наслідок для монотонної функції. | 4 |
| | **Разом** | **82** |

## 9. Індивідуальне навчально-дослідне завдання

## 10. Методи навчання

<u>Метод проблемного викладення (наукового пошуку)</u>

<u>Пояснювально-ілюстративні методи:</u>

- лекція
- пояснення
- інструктаж
- самостійне опрацювання літературних джерел
- робота з електронними конспектами лекцій та презентаціями

<u>Інформаційно – повідомляючий метод</u>

<u>Наочні методи(презентації, ілюстрації)</u>

<u>Репродуктивні методи:</u>

- закріплення вивченого на основі зразка (побудова моделей, розв’язування задач)
- розв’язування задач за алгоритмами конкретних методів
- вправи
- лабораторні роботи
- практичні роботи

<u>Дослідницький метод</u>

<u>Методи формування і стимулювання пізнавальної діяльності:</u>

- пізнавальні ігри
- навчальні дискусії
- аналіз життєвих ситуацій

## 11. Методи контролю

Методи усного контролю:

- фронтальне і індивідуальне усне опитування
- усний іспит

Методи письмового контролю:

- письмові самостійні і контрольні роботи
- тести
- письмовий іспит

## 12. Розподіл балів, які отримують студенти

| Поточне тестування та самостійна робота | | | Сума балів |
|---|---|---|---|
| ЗМ 1 | ЗМ 2 | ЗМ 3 | |
| 30 | 30 | 40 | 100 |

**Шкала оцінювання: національна та ECTS**

| Сума балів за всі види навчальної діяльності | Оцінка ECTS | Оцінка за національною шкалою | |
|---|---|---|---|
| | | для екзамену, курсового проекту (роботи), практики | для заліку |
| 90–100 | **A** | відмінно | зараховано |
| 85–89 | **B** | добре | |
| 75–84 | **C** | | |
| 70–74 | **D** | задовільно | |
| 60–69 | **E** | | |
| 35–59 | **FX** | незадовільно з можливістю повторного складання | не зараховано з можливістю повторного складання |
| 0–34 | **F** | незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни | не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни |

## 13. Методичне забезпечення

1. А. А. Кореновский. Дифференциальные свойства функций действительной переменной (курс лекций).

## 14. Рекомендована література


1. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974. 480 с.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972. 496 с.


## 15. Електронні інформаційні ресурси

1. Дифференциальные свойства функций действительной переменной (курс лекций). А. А. Кореновский. Электр. ресурс, Методические указания.