Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з науково-педагогічної роботи

____

"___" _______________ 20___ р.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

ДС «Диференціальні властивості функцій»

Рівень вищої освіти _третій (освітньо-науковий)_

Спеціальність _111 Математика_

2019 рік

Розробники:
Кореновський Анатолій Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу

Робоча програма затверджена на засіданні кафедри математичного аналізу

Протокол № 1 від. "31" серпня 2020р.

Завідувач кафедри ________________ Кореновський А. О.
(підпис)

Обговорено та рекомендовано до затвердження навчально-методичною комісією (НМК) факультету математики, фізики та інформаційних технологій

Протокол № 1 від "15" 09 2020 року

Голова НМК ________________ Страхов Є. М.

Вступ

Навчальна програма дисципліни «Диференціальні властивості функцій» складена відповідно до освітньо-наукової програми підготовки докторів філософії (PhD) спеціальності 111 Математика.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є сучасні методи теорії функцій дійсної змінної, теорії міри та інтеграла Лебега, теорії диференціювання функцій.

Місце навчальної дисципліни в структурі освітнього процесу. Дисципліна «Диференціальні властивості функцій» належить до дисциплін вільного вибору аспіранта. Вона забезпечує ознайомлення з теоретичними основами та практикою використання сучасного апарату математичних досліджень у певній предметній області.

Програма навчальної дисципліни складається з таких змістових модулів:

1. Монотонні функції.
2. Функції обмеженої варіації.
3. Абсолютно неперервні функції.

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета дисципліни: дослідити диференціальні властивості функцій однієї дійсної змінної, які можуть бути встановлені за допомогою теорії міри та інтеграла Лебега. Ознайомитись з класами функцій обмеженої варіації і абсолютно неперервних функцій, та їх основними властивостями. Дослідити застосування цих класів до дослідження властивостей, пов'язаних з диференціюванням. Ознайомитись з методами відновлення функцій за відомою похідною.

Завданнями дисципліни є ознайомлення з теоретичними основами та практикою використання апарату теорії міри та інтеграла у певній предметній області.

Процес вивчення дисципліни спрямований на формування елементів наступних **компетентностей**:

а) загальних (ЗК):

- здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук (ЗК-2);
- здатність вирішувати проблеми в професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу і прогнозу (ЗК-3);

- здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань (ЗК-4);

б) спеціальних (фахових) (СК):

- спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти (СК-5).

Очікувані результати навчання. В результаті вивчення дисципліни аспірант повинен

знати: сучасні напрямки розвитку наукових досліджень у даній галузі, зокрема методи досліджень диференціальних властивостей функцій, які засновані на застосуванні теорії функцій дійсної змінної, міри та інтеграла Лебега;

вміти: досліджувати досить тонкі диференціальні властивості функцій та застосовувати їх до розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, до інтегральних перетворень, тощо.

На вивчення навчальної дисципліни відводиться 90 годин, що становить 3 кредити ЄКТС.

2. Програма дисципліни

Вступ.

1. Предмет дослідження. Попередні відомості з курсу аналіза.
2. Приклад функції, похідна якої обмежена, але неінтегровна за Ріманом.
3. Відновлення функції за її обмеженою похідною за допомогою інтеграла Лебега.

1. Монотонні функції.

1. Стрибки монотонної функції. Теорема про множину точок розриву монотонної функції.
2. Функція стрибків. Розвинення монотонної функції в суму функції стрибків та неперервної складової.
3. Лема Віталі про покриття (2 варіанти).
4. Леми про похідні числа монотонної функції. Теорема Лебега.
5. Приклад монотонної функції, яка не має похідної на заданій множині міри нуль.
6. Оцінка інтеграла від похідної монотонної функції.
7. Приклади зростаючої та строго зростаючої неперервних функцій з майже всюди нульовою похідною.
8. Теорема Фубіні про почленне диференціювання ряду з монотонними доданками.
9. Точки щільності. Теорема Лебега про точки щільності.
10. Апроксимативна неперервність. Теорема Данжуа.

2. Функції обмеженої варіації.

1. Означення функції обмеженої варіації. Приклади.
2. Арифметичні властивості функцій обмеженої варіації.
3. Аддитивність варіації. Наслідки.
4. Критерій обмеженості варіації. Наслідки.
5. Неозначена варіація функції. Теорема про неперервність неозначеної варіації. Наслідок.
6. Теорема про похідну неозначеної варіації.
7. Теорема про точки розриву неозначеної варіації.
8. Функція стрибків для функції обмеженої варіації. Розвинення функції обмеженої варіації на суму функції стрибків і неперервної функції.
9. Теорема про співпадання похідних функції обмеженої варіації та її неозначеної варіації.
10. Обчислення варіації неперервної функції за допомогою границь (дві теореми).
11. Індикатриса Банаха. Теорема Банаха.

3. Абсолютно неперервні функції.

1. Різні означення абсолютно неперервної функції та їх еквівалентність. Приклади.
2. Арифметичні властивості абсолютно неперервних функцій.
3. Зв'язок абсолютної непрервності з обмеженістю варіації. Наслідок.
4. Теорема про сталість абсолютно неперервної функції.
5. Невизначений інтеграл Лебега. Абсолютна неперервність невизначеного інтеграла Лебега.
6. Теорема про похідну невизначеного інтеграла Лебега.
7. Абсолютно неперервна функція як невизначений інтеграл Лебега від своєї похідної.
8. Точки Лебега. Диференційовність невизначеного інтеграла Лебега в точці Лебега. Приклад функції, у якої невизначений інтеграл Лебега диференційовний у точці, що не є точкою Лебега.
9. Теорема про точки Лебега сумовної функції.
10. Варіація невизначеного інтеграла Лебега.
11. Стнгулярна функція. Розвинення неперервної функції на абсолютно неперервну та сингулярну компоненти.
12. Теорема про абсолютно непрервну та сингулярну компоненти монотонної функції. Наслідок.
13. Умови монотонності функції в термінах похідних чисел.
14. Теорема про відновлення функції за її сумовною похідною.
15. Приклад функції з несумовною похідною.

Заключна частина. Недиференційовні функції.

1. Приклад Ван-дер-Вардена непрервної ніде недиференційовної функції.
2. Односторонні похідні числа функції. Приклад функції із заданими односторонніми похідними числами в точці.
3. Леми про рівність протилежних похідних чисел.
4. Теорема Данжуа – Юнг – Сакса. Наслідок для монотонної функції.

3. Рекомендована література

1. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974. 480 с.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1972. 496 с.
3. А. А. Кореновский. Дифференциальные свойства функций действительной переменной (курс лекций).
4. Дифференциальные свойства функций действительной переменной (курс лекций). А. А. Кореновский. Электр. ресурс, Методические указания

4. **Форма підсумкового контролю успішності навчання:** залік

5. **Засоби діагностики успішності навчання:**

   Методи усного контролю: фронтальне та індивідуальне опитування, усний залік

   Методи письмового контролю: письмові контрольні роботи, тести

   Індивідуальні самостійні практичні завдання